COMPOSITIO MATHEMATICA

PIERRE HENRI BLOCH

Ueber eine Laplace-Transformierte, welche in keiner Halbebene beschränkt ist

Compositio Mathematica, tome 9 (1951), p. 289-292

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__9__289_0>

Ueber eine Laplace-Transformierte, welche in keiner Halbebene beschränkt ist

von

Pierre Henri Bloch

Bern

Es war bisher eine offene Frage, ob es Laplace-Transformierte gibt, die in keiner Halbebene beschränkt sind [1]).

In dieser Arbeit soll nachgewiesen werden, daß tatsächlich solche Laplace-Transformierte existieren. Dazu muß eine Funktion $F(t)$ gefunden werden, deren Laplace-Transformierte $f(s)$ [2]) in keiner Halbebene beschränkt ist. Im Folgenden wird eine solche Funktion $F(t)$ angegeben [3]).

Im Intervall

$$J_0\colon\quad 0 \leqq t < 1$$

sei

$$F(t) \equiv 0$$

und im Intervall

$$J_m\colon\quad m \leqq t < m+1,\ m = 1,\ 2,\ 3,\dots$$

gelte

$$F(t) = e^{t^3} e^{i\nu_m t},$$

wobei die Zahlen ν_m reell und noch zu bestimmen sind. Wir fordern, daß die Zahlen ν_m folgende Ungleichungen erfüllen:

$$|\nu_m| \geqq |\nu_{m-1}| + 1,\ \nu_0 = 0,\ \nu_1 < 0, \tag{1}$$

$$\frac{\nu_m}{\nu_{m+1}} < 0, \tag{2}$$

---

[1]) Vgl. G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. I, Theorie der Laplace-Transformation, Basel 1950, Verlag Birkhäuser, S. 181.

[2]) Der Laplace-Transformation $f(s) = f(x+iy) = \int_0^\infty F(t)\, e^{-st}\, dt$ wird in dieser Arbeit der Riemannsche Integralbegriff zugrunde gelegt und für die Funktionen $F(t)$ werden dieselben Voraussetzungen gemacht wie a.a.O. [1]), S. 29 ff.

[3]) Es wird eine ähnliche Methode verwendet, wie bei P. H. Bloch, Ueber den Zusammenhang zwischen den Konvergenzabszissen, der Holomorphie- und der Beschränktheitsabszisse bei der Laplace-Transformation, Comment. Math. Helvetici 22 (1949).

$$(3) \qquad \left| \int_{T_1}^{T_2} F(t)\, e^{-xt}\, e^{-iyt}\, dt \right| < (1/2)^m$$

gilt im Bereich

$$m \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq m + 1, \; x \geqq -m, \; |y| \leqq |\nu_{m-1}|,$$

$$(4) \qquad \left| \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, e^{-xt}\, e^{-iyt}\, dt \right| < (1/2)^m$$

gilt im Bereich

$$0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq m, \; x \geqq -m, \; |y| \geqq |\nu_m|.$$

Die Existenz der Zahlen ν_m zeigen wir durch vollständige Induktion und nehmen als Induktionsvoraussetzung an, Zahlen $\nu_0 = 0, \nu_1, \ldots, \nu_{m-1}$, die den Ungleichungen (1) — (4) genügen, seien bereits gefunden. Wir zeigen, daß sich dann ν_m konstruieren läßt. Als Hilfssatz benötigen wir hierfür das verallgemeinerte Riemannsche Lemma [4]).

Nach dem Riemannschen Lemma bestimmen wir zunächst eine positive Zahl ν'_m so, daß

$$(5) \qquad \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{t^3}\, e^{-xt}\, e^{-iyt}\, dt \right| < (1/2)^m,$$

wenn nur

$$m \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq m + 1, \; x \geqq -m, \; |y| \geqq \nu'_m$$

und eine zweite positive Zahl ν''_m so, daß

$$(6) \qquad \left| \int_{t_1}^{t_2} F(t)\, e^{-xt}\, e^{-iyt}\, dt \right| < (1/2)^m,$$

wenn nur

$$0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq m, \; x \geqq -m, \; |y| \geqq \nu''_m \text{ gilt.}$$

Nun sei

$$(7) \qquad \nu_m = (-1)^m \,\text{Maximum}\, (\nu'_m + |\nu_{m-1}|,\; \nu''_m,\; |\nu_{m-1}| + 1).$$

Wir behaupten, die so bestimmte Zahl ν_m erfüllt die Ungleichungen (1) — (4).

---

[4]) Voraussetzung: $f(t)$ in $0 \leqq a \leqq t \leqq b < \infty$ beschränkt und im Riemannschen (oder Lebesgueschen) Sinne integrierbar.

Behauptung: Zu jeder positiven Zahl M und jeder nicht negativen reellen Zahl m existiert eine positive Zahl ν so, daß für $a \leqq a' \leqq b' \leqq b$

$$\left| \int_{a'}^{b'} f(t)\, e^{-xt}\, e^{-iyt}\, dt \right| < M,$$

wenn nur $|y| \geqq \nu$, $x \geqq -m$ ist.

Beweis z.B. a.a.O. [1]), S. 168 ff.

Daß die Ungleichungen (1) und (2) erfüllt sind, ist trivial.

Es bleibt zu zeigen, daß ν_m auch die Ungleichungen (3) und (4) befriedigt.

Nach der Ungleichung (5) gilt

$$(8) \qquad \left| \int_{T_1}^{T_2} e^{t^3} e^{i\nu_m t} e^{-xt} e^{-iyt} \, dt \right| < (1/2)^m,$$

wenn nur

$$m \leqq T_1 \leqq T_2 \leqq m+1, \; x \geqq -m, \; | \nu_m - y | \geqq \nu'_m.$$

Da $|| \nu_m | - | y || \leqq | \nu_m - y |$, gilt die Ungleichung (8) auch, wenn $|| \nu_m | - | y || \geqq \nu'_m$ und da nach Gleichung (7) $| \nu_m | \geqq | \nu_{m-1} | + \nu'_m$, ist die Ungleichung (8) sicher immer erfüllt, wenn $| y | \leqq | \nu_{m-1} |$ ist. Damit ist nachgewiesen, daß ν_n die Ungleichung (3) erfüllt.

Auch die Ungleichung (4) ist erfüllt. Nach der Ungleichung (6) gilt nämlich

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} F(t) e^{-xt} e^{-iyt} \, dt \right| < (1/2)^m,$$

wenn nur

$$0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq m, \; x \geqq -m, \; | y | \geqq \nu''_m.$$

Diese Ungleichung gilt noch viel mehr, wenn $| y | \geqq | \nu_m |$ ist, da nach Gleichung (7) $| \nu_m | \geqq \nu''_m$ gilt.

Damit ist die Existenz der Zahlenfolge ν_m bewiesen.

Aus der Ungleichung (3) folgt, daß die mit der Funktion $F(t)$ gebildete Laplace-Transformierte $f(s) = \int_0^\infty F(t) e^{-st} \, dt$ in der ganzen s-Ebene existiert.

Nun zeigen wir, daß die Funktion $f(s)$ in keiner Halbebene beschränkt ist. Wir behaupten, $| f(s) |$ geht für folgende vier Punktfolgen gegen Unendlich:

$$(9) \qquad s_k = 2k + i\,\nu_{2k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(10) \qquad s_k = 2k + 1 + i\,\nu_{2k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(11) \qquad s_k = -2k + i\,\nu_{2k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(12) \qquad s_k = -(2k+1) + i\,\nu_{2k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wir beweisen die Behauptung für die Punktfolge (9) und bemerken, daß der Beweis für die übrigen Punktfolgen gleich verläuft. Es ist

$$f(2k + i\,\nu_{2k}) = \int_0^{2k} + \int_{2k}^{2k+1} + \int_{2k+1}^{\infty} = I + II + III.$$

Das Glied $II = \int_{2k}^{2k+1} e^{t^3} e^{-2kt}\, dt$ geht mit k gegen Unendlich.

Der Absolutwert des Gliedes I ist wegen der Ungleichung (4) kleiner als $(1/2)^{2k}$ und der Absolutwert des Gliedes III ist wegen der Ungleichung (3) kleiner als $\sum_{r=2k+1}^{\infty} (1/2)^r$. Damit ist bewiesen, daß $|f(2k + i\nu_{2k})|$ mit k gegen Unendlich geht.

Da nach den Ungleichungen (1) und (2) die Zahlen ν_{2k} positiv und die Zahlen ν_{2k+1} negativ sind und da weiter nach der Ungleichung (1) die $|\nu_k|$ wachsen, ist offensichtlich, daß in jeder Halbebene mindestens eine der Punktfolgen (9) — (12) von einem gewissen k an vollständig enthalten ist und somit $|f(s)|$ auf dieser Punktfolge gegen Unendlich geht.

(Oblatum 19-1-51).