

COMPOSITIO MATHEMATICA

L. FEJES

Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 474-476

http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__474_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe

von

L. Fejes

Budapest

In einer vorherigen Arbeit ¹⁾ habe ich gezeigt, daß eine beliebige geschlossene konvexe Kurve in einen „n-Eckring“ mit der relativen Größe $\frac{T_n - t_n}{T_n} < \frac{6\pi}{n^2}$ eingeschlossen werden kann. Die genaue Abschätzung $\frac{T_n - t_n}{T_n} \leq \sin^2 \frac{\pi}{n}$ habe ich dagegen nur für $n \leq 6$ bewiesen.

Es sei hier gezeigt, daß sich mit Hilfe eines von Herrn E. Sas herrührenden Satzes bzw. Beweisganges ²⁾ für $n \geq 5$ unmittelbar die Abschätzung

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} < \sin^2 \frac{\pi}{n-2} \quad (1)$$

ergibt.

Der Satz des Herrn E. Sas lautet: Es läßt sich in eine jede geschlossene konvexe Kurve mit dem Flächeninhalt T ein n -Eck einbeschreiben mit dem Flächeninhalt $t_n \geq \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} T$. Wir übertragen zunächst den Beweis mit einer kleinen Änderung auf umbeschriebene n -Ecke und beweisen, daß einer geschlossenen konvexen Kurve mit dem Flächeninhalt T für $n \geq 5$ ein n -Eck mit dem Flächeninhalt

$$T_n < \frac{n-2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2} T \quad (2)$$

umbeschrieben werden kann ³⁾.

¹⁾ L. FEJES, Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen [Comp. Math. 6 (1939), 456—467].

²⁾ E. SAS, Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen [Comp. Math. 6 (1939), 468—470].

³⁾ Die Abschätzung $T_n \leq \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} T$, welche bedeuten würde, daß die extremalen Kurven die Ellipsen sind, ist im Gegensatz zu der entsprechenden Aufgabe für einbeschriebene n -Ecke im allgemeinen nicht richtig. Ein Quadrat läßt sich z.B. nicht in ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $T_3 < 2T$ einschließen.

Stellen wir zum Beweis die Kurve mit E. Sas dar durch die Gleichungen

$$x = \cos t, \quad y = e(t) \sin t, \quad (3)$$

wobei $e(t)$ außer in den Punkten $t = 0, t = \pi$ eine stetige, eindeutige, positive, nach 2π periodische Funktion mit beschränkter Schwankung von t bedeutet. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Kurve durch die Punkte $x = -1, x = +1, y = 0$ läuft und völlig zwischen den Geraden $x = -1, x = +1$ liegt, was durch passende Wahl des Koordinatensystems leicht erreicht werden kann. Wir zeichnen nun in den zu $t = t, t + \frac{2\pi}{n}, t + 2\frac{2\pi}{n}, \dots, t + (n-1)\frac{2\pi}{n}$ gehörigen Punkten der Kurve die n Tangenten bzw. beliebige Stützgeraden und betrachten von dem so erhaltenen n -Eck denjenigen Teil, welcher zwischen den Geraden $x = -1, x = +1$ liegt. Dieser ist ein der Kurve umbeschriebenes Polygon \mathfrak{P}_{n+2} mit höchstens $n+2$ Seiten, dessen Flächeninhalt

$$T_{n+2}(t) < 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e\left(t + i\frac{2\pi}{n}\right) \sin^2\left(t + i\frac{2\pi}{n}\right) \quad (4)$$

ausfällt. Um dies einzusehen, betrachten wir den Kreis $x = \cos t, y = \sin t$ und zugleich das umbeschriebene reguläre n -Eck mit den Berührungspunkten $t = t, t + \frac{2\pi}{n}, t + 2\frac{2\pi}{n}, \dots, t + (n-1)\frac{2\pi}{n}$ und ersetzen jede Seite d_i durch eine Strecke s_i , welche die Kurve (3) im Punkt $t + i\frac{2\pi}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) berührt, während die x -Koordinaten der Endpunkte von d_i und s_i übereinstimmen. Zu jedem Eckpunkt des regulären n -Eckes gehört demnach je ein Endpunkt von zwei aufeinanderfolgenden Strecken; verbinden wir sie! Dadurch erhalten wir ein Polygon \mathfrak{P}_{2n} mit höchstens $2n$ Ecken, welches \mathfrak{P}_{n+2} enthält. (Es sei bemerkt, daß je zwei Seiten von \mathfrak{P}_{2n} — und zwar diejenigen, welche die Kurve (3) auf verschiedenen Seiten der x -Achse berühren — auch gemeinsame Punkte besitzen können.) Das Inhaltsmaß von \mathfrak{P}_{2n} ist aber eben die rechte Seite von (4), womit die Ungleichung (4) bewiesen ist.

Bildet man den Mittelwert von (4), so erhält man:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{n+2}(t) dt < \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \int_0^{2\pi} e(t) \sin^2 t dt = \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} T.$$

Es gibt daher unter den soeben konstruierten Polygonen

$\{\mathfrak{P}_{n+2}\}$ wenigstens ein Polygon mit dem Flächeninhalt $T_{n+2} < \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} T$, woraus sich nach Ersetzung von $n + 2$ durch n für $n \geq 5$ unmittelbar (2) ergibt.

Es gilt nunmehr:

$$\frac{t_n}{T_n} > \frac{\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{n-2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2}} > \frac{\frac{n-2}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n-2}}{\frac{n-2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2}} = \cos^2 \frac{\pi}{n-2}.$$

Dies ist aber eben die Ungleichung (1).

(Eingegangen den 6. September 1939.)