W. DOEBLIN

Remarques sur la théorie métrique des fractions continues

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 353-371
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__353_0>

Remarques sur la théorie métrique des fractions continues

par

W. Doeblin [1])

Paris

But de ce travail: Les propriétés métriques des développements en fractions continues furent étudiées après Gauß par plusieurs mathématiciens éminents, en particulier par MM. Borel, Kuzmin, P. Lévy, Khintchine et Denjoy. Nous nous proposons de montrer qu'une certaine partie des résultats obtenus peut être démontrée assez facilement en utilisant la théorie des chaînes à liaisons complètes. Nous appliquons donc les méthodes et théorèmes du Calcul des Probabilités; il n'est peut-être pas superflu de remarquer que cet usage n'implique aucun abandon de rigueur. Nous traduirons quelquefois le langage des probabilités dans le langage de la théorie de la mesure. La méthode employée permettra de préciser sur quelques points les résultats connus.

§ 1. La formule de Gauß. Application de la théorie des chaines à liaisons complètes.

Notations, la formule fondamentale de Borel-Lévy. Soit x un nombre irrationel compris entre 0 et 1,

$$x = \frac{1}{x_1},\ x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \ldots, x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}},$$

a_n est la partie entière de x_n, x_n (a_n) est le n-ième quotient complet (incomplet). Tous les x_n sont > 1, les $a_n \geqq 1$, pour n'importe quel nombre irrationnel le développement est illimité. x est une fonction homographique de x_n de la forme

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}},$$

---

[1]) „M. Doeblin m'a remis ce travail il y a plus d'un an; probablement à la fin de 1937. C'est par suite d'un malentendu, dont je suis sans doute le principal responsable, que je ne vous l'ai pas envoyé plus tôt" (P. Lévy au Secrétariat de la Rédaction).

Q_n augmente indéfiniment avec n, $Q_n > kr^n$, où $r > 1$. x est toujours compris entre deux réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ successives, il ne diffère de $\frac{P_n}{Q_n}$ que d'une quantité $\frac{1}{Q_n^2}$.

Posons avec M. Paul Lévy $y_n = \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$, on a $y_n = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$. Choisissons le nombre $x = (0, a_1, \ldots)$ au hasard entre 0 et 1, la probabilité d'un ensemble mesurable étant prise égale à la mesure. Soit $Pr_{n-1}\{x_n > x\}$ la probabilité pour que $x_n > x_1$ $a_1, \ldots, a_{n-1}$ étant connus; l'on trouve (cf. p. ex. P. Lévy [2]))

$$(1) \qquad Pr_{n-1}\{x_n > x\} = \frac{y_{n-1} + 1}{y_{n-1}x + 1} = 1 - \Phi_{y_{n-1}}(x) \qquad (x > 1)$$

expression toujours comprise entre $\frac{1}{x}$ et $\frac{2}{x}$. Cette formule qui justifie l'introduction des y_n, due à M. P. Lévy, est fondamentale pour ce qui suit.

Elle se trouve déjà sous une forme un peu différente dans le mémoire fondamental [3]) de M. Borel.

En langage de la théorie de la mesure, si nous désignons par mes $\{F \mid H\}$ la mesure de l'ensemble des points où F a lieu dans l'ensemble où H est vérifiée, l'on a

$$\text{mes}\,\{x_n > x \mid a_1 \ldots, a_{n-1}\} = \frac{y_{n-1} + 1}{y_{n-1}x + 1}.$$

Les chaînes à liaisons complètes. Envisageons un point mobile ne pouvant prendre que les positions $E_1, \ldots, E_r, \ldots$ (ou plus simplement $1, \ldots, r, \ldots$) et dont la position est déterminée dans une suite dénombrable d'épreuves successives pouvant être illimitée dans les deux sens (de la forme $\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots$) ou commençant à un instant initial 0 (de la forme $0, 1, 2, \ldots$). Nous appelons chemin C antérieur décrit par le point mobile l'ensemble ordonné de ses positions antérieures. Si le point a été à l'épreuve $n-1$ dans E_{b_1}, à l'épreuve $n-2$ dans E_{b_2}, etc., nous écrirons $C = (b_1, b_2, \ldots)$. Si C' désigne le chemin $(b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots)$, nous écrirons encore $C = (b_1, \ldots, b_m) + C'$ ou $C = C''_m + C'$, avec $C''_m = (b_1, \ldots, b_m)$. Nous supposerons que la probabilité pour que le point passe à l'instant n dans E_k soit une fonction $p_k^{(1)}(C)$ bien définie du chemin antérieur C.

---

[2]) Théorie de l'addition des variables aléatoires [Paris 1937], Chapitre IX.

[3]) Sur les probabilités dénombrables [Rend. Circ. Mat. di Palermo **26** (1909), 247—271].

Les $p_k^{(1)}(C)$ définissent alors une chaîne (constante, dénombrable) à liaisons complètes (cf. MM. Onicescu et Mihoc [4])). Ces chaînes ont été étudiées sous certaines hypothèses dans un mémoire récent. [5])

Application aux fractions continues. La formule de Gauß. Il résulte de la formule de Borel-Lévy qu'il est équivalent de choisir le nombre x au hasard entre 0 et 1 avec répartition uniforme de la probabilité, ou de déterminer dans des épreuves successives les nombres $a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots$, la probabilité de $a_m = p$, $a_1, \ldots, a_{m-1}$ étant connue et donnée par $\frac{y(y+1)}{(py+1)(y(p+1)+1)}$ où $y = (a_{m+1}, \ldots, a_1)$, puis de choisir x_n suivant la loi (1). Envisageons donc une chaîne à liaisons complètes, où, si $C = (b_1, b_2, \ldots)$, $y = (b_1, b_2, \ldots)$

$$p_k^{(1)}(C) = \frac{y(y+1)}{(ky+1)(y(k+1)+1)}.$$

Au lieu d'appliquer maintenant les résultats de la théorie des chaînes à liaisons complètes, nous allons redémontrer dans le cas particulier envisagé (avec une démonstration différente de celle donnée dans [5])) ceux dont nous aurons besoin pour établir la formule de Gauß.

Partons d'un chemin initial quelconque et déterminons successivement les $n-1$ positions ultérieures du point mobile d'après la loi de la chaîne, puis une variable x_n', étant $> x$ dans des cas de probabilité $1 - \Phi_{C_{n-1}+C}(x) = \frac{y+1}{yx+1}$, y étant le nombre représentant tout le chemin antérieur $C_{n-1} + C$. Soit $F_C^{(n)}(x)$ la fonction de probabilités totales de x_n'; nous allons montrer que $F_C^{(n)}(x)$ tend vers une limite $F(x)$ indépendente de C, si $n \to \infty$, et cela uniformément par rapport à C et x.

Appelons $Pr\{C_m \mid C\}$ la probabilité pour que le point, ayant décrit antérieurement le chemin C, décrive le chemin C_m comportant m positions successives. On déduit immédiatement [6]) de

---

[4]) Sur les chaînes de variables statistiques [Bull. Sc. math. (2) **59** (1935), 174—192].

[5]) W. Doeblin et R. Fortet, Sur des chaînes à liaisons complètes [Bull. Sc. Math. **65** (1937), 132—148].

[6]) $Pr\{C_m \mid C_l + C'\}$ est la probabilité pour que le point mobile dont les l derniers états sont donnés par le chemin C_l et les positions précédant ceux-ci par C', décrive le chemin C_m, c'-à-d., si $C_m = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, occupe d'abord la position b_m, puis la position b_{m-1} etc. Cette probabilité est donc le produit de la probabilité pour que le point passe sous l'hypothèse indiquée dans b_m, par la

la formule (1,1) qu'on a, quels que soient C', C'' et C_m, C_l,

$$Pr\{C_m \mid C'\} > h\, Pr\{C_m \mid C''\}$$

et

$$Pr\{C_m \mid C_l + C'\} = Pr\{C_m \mid C_l + C''\}(1+\theta\varrho^l) \text{ avec } \varrho<1 \text{ et } |\theta|<k.$$

Les valeurs exactes de ϱ, h, K ne nous importent pas. On aura aussi

$$\Phi_{C_m+C'}(x) = \Phi_{C_m+C''}(x)(1+\theta'\varrho^m).$$

Nous n'avons maintenant qu'à appliquer le raisonnement classique de Markoff avec de légères modifications. Envisageons

$$F_C^{(n+m)}(x) = \sum_{C_m} F_{C_m+C}^{(n)}(x)\, Pr\{C_m \mid C\}.$$

On a

$$F_{C_m+C}^{(n)}(x) = \sum_{C_n} \Phi_{C_n+C_m+C}(x)\, Pr\{C_n \mid C_m + C\}$$

$$= \sum_{C_n} \Phi_{C_n+C_m+C'}(x)(1+\theta'\varrho^{m+n}x) Pr\{C_n \mid C_m + C'\}(1+\theta''\varrho^m)$$

$$= F_{C_m+C'}^{(n)}(x)(1+\theta'''\varrho^m),$$

$$F_C^{(n+m)}(x) - F_{C'}^{(n+m)}(x) = \sum F_{C_m+C}^{(n)}(x) Pr\{C_m \mid C\} - F_{C_m+C'}^{(n)}(x) Pr\{C_m \mid C'\}$$

$$= O(\varrho^m) + \Sigma' + \Sigma''[F_{C_m+C}^{(n)}(x)(Pr\{C_m \mid C\} - Pr\{C_m$$

où Σ' est étendu aux chemins pour lesquels $Pr\{C_m|C\} - Pr\{C_m|C'\} > 0$, Σ'' aux autres. On a donc, en appelant $\overline{F}^{(n)}$ (resp. $\underline{F}^{(n)}$) la borne supérieure (inférieure) de $F_C^{(n)}$ quand C varie,

$$| F_C^{(n+m)}(x) - F_{C'}^{(n+m)}(x) | < K\varrho^m +$$
$$+ [\overline{F}^n(x) + E^{(n)}(x)]\, \Sigma' (Pr\{C_m \mid C\} - Pr\{C_m \mid C'\}),$$

et comme

$$Pr\{C_m \mid C'\} > h\, Pr\{C_m \mid C\},$$

on a

$$| \overline{F}^{(m+n)} - \underline{F}^{(m+n)} | < K\varrho^m + (1-h)[\overline{F}^{(n)} - \overline{E}^{(n)}],$$

---

probabilité pour que sous cette hypothèse il passe alors dans b_{m-1}, multipliée par ... etc. Désignons respectivement par y_τ et y les nombres représentant les chemins C_τ et $C_\tau + C'$, l'on a $y - y_\tau < \theta_1\varrho^\tau$ avec $\varrho < 1$ $[y = (b_1, b_2, \ldots, b_\tau, b_{\tau+1} \ldots),$ $y_\tau = (b_1, \ldots, b_\tau)]$.

$$p_k^1(C_\tau + C') = \frac{y_\tau + 1 + y - y_\tau}{y_\tau x + 1 + (y - y_\tau x)} = \frac{y_\tau + 1}{y_\tau x + 1}[1+\bar\theta\varrho^\tau].$$

En formant le produit qui représente la probabilité $Pr[C_m \mid C_\tau + C']$ et en évaluant l'influence du chemin C' on obtient la formule indiquée dans le texte.

donc

$$|\overline{F}^{(n)} - \underline{F}^{(n)}| < K' c^{-\lambda\sqrt{n}}.$$

Ceci posé, supposons que la probabilité initiale des chemins C pour lesquels les nombres caractéristiques y sont $< \lambda$ est donnée par la formule $\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$, on vérifie par un calcul immédiat que si i est la position du point mobile à l'épreuve 1, y' le nombre caractérisant le chemin $i + C$, la loi de probabilité de y' est encore $\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$. Donc $\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2y}{y + 1}$ est une « mesure invariante » pour les chemins C. Dès lors si nous désignons par $F'^{(n)}(x)$ la loi de probabilité de x_n, la probabilité initiale des chemins C étant donnée par la « mesure invariante », on aura visiblement

$$F'^{(1)}(x) = F'^{(n)}(x) = \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2x}{x + 1}.$$

Comme $\overline{F}^{(n)} \geqq F'^{(n)} \geqq F^{(n)}$, il résulte de (2) que

$$\left| F_C^{(n)} - \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2x}{x + 1} \right| < K e^{-\lambda\sqrt{n}}.$$

ce qui établit la formule de Gauß. En appliquant les résultats établis par M. Fortet par une méthode analytique, on obtient pour la différence

$$F_C^{(n)} - \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2x}{x + 1}$$

une borne de l'ordre de $e^{-\lambda n}$, analogue à celle qui a été obtenue par M. P. Lévy par une méthode différente très élégante, qui revient au fond à ramener la chaîne à liaisons complètes à une chaîne simple grâce à l'introduction des y_n et à étudier l'équation de récurrence de cette chaîne.

Remarquons qu'on a aussi (il suffit de revoir la démonstration)

$$F_C^{(n)}(x_1) - F_C^{(n)}(x_2) = \frac{1}{\lg 2} \left(\lg \frac{2x_1}{x_1 + 1} - \lg \frac{2x_2}{x_2 + 1} \right) (1 + \theta K e^{-\lambda\sqrt{n}}),$$

précision qui est utile. Il en résulte en particulier que la mesure relative de l'ensemble où $a_{n+m} = p$ dans l'ensemble où $a_1, \ldots, a_m$ ont certaines valeurs données, est égale à

$$\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{(p+1)^2}{p(p+2)} (1 + \theta k e^{-\lambda\sqrt{n}}),$$

de même la mesure relative de l'ensemble où $a_{n+m}, a_{n+m+1}, \ldots,$

$a_{n+m+r}, \ldots,$ satisfont à certaines conditions dans l'ensemble où $a_1, \ldots, a_m$ ont certaines valeurs, est égale à la valeur donnée par la formule de Gauß multipliée par un facteur de la forme $1 + \theta k e^{-\lambda\sqrt{n}}$. La valeur donnée par la formule de Gauß est celle qu'on obtiendrait en supposant que la probabilité initiale des chemins antérieurs C' est donnée par la distribution stationnaire affectant aux nombres y, caractérisant les chemins antérieurs, la probabilité $\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2\lambda}{\lambda + 1} < \lambda$. Nous savons qu'avec cette distribution initiale on obtient une chaîne stationnaire; la distribution des nombres y'_n caractérisant les chemins $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + C'$ est donnée par la même formule. Si $y_{ne} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-e})$, la probabilité (pour la chaîne stationnaire) pour que y_{ne} soit $< \lambda$, qui est plus grande que la probabilité pour que $y'_n < \lambda$, et plus petite que celle pour que $y'_n < \lambda + k\varrho^e$, est égale à $\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2\lambda}{\lambda + 1} + O(\varrho^e)$. Par conséquent en revenant au cas où X est choisi avec probabilité uniforme dans $(0, 1)$, nous déduisons de ce qui précède que la probabilité pour que $y_{n+m} < \lambda$ dans l'ensemble où y_m a une valeur donnée, ne diffère de $\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$ que d'une quantité $< K e^{-C\sqrt{n}}$.

Remarque: D'autres démonstrations de la formule de Gauß furent données par Mm. KUZMIN [Atti Congresso Bologna 6 (1928), 83—89], P. LEVY [Bull. Soc. Math. de Fr. 57 (1929), 178—194], A. DENJOY [C. R. 202 (1936), 537—539].

§ 2. Loi de Gauß et théorème du logarithme itéré dans la théorie métrique des fractions continues.

Nous venons de voir que le rapport de la mesure de l'ensemble des points x de (0,1) où $a_{n+m} = p$ et où $a_1, \ldots, a_m$ ont certaines valeurs déterminées, à la mesure de l'ensemble où $a_n, \ldots, a_m$ ont ces valeurs, est donné par

$$\frac{1}{\lg 2} \lg \frac{(p+1)^2}{p(p+2)} \cdot (1 + \eta_n), \quad |\eta_n| < K e^{-C\sqrt{n}}, \tag{2.1}$$

et qu'on a des résultats analogues pour x_n et y_n.

Nous allons maintenant appliquer les méthodes et résultats du premier Chapitre de notre Thèse [7]) à l'étude des sommes $\sum_1^n f(a_i)$,

[7]) W. DOEBLIN, Thèse [Paris 1938 = Bull. Soc. Roumaine Sc. 39 (1937), 57—115].

$\sum_1 f(x_i)$ etc. et nous étendrons aux fractions continues certains résultats qui sont connus depuis longtemps pour les développements décimaux ordinaires.

1) Considérons les sommes $S^n(x) = \sum_1^n f(a_i)$, $f(p)$ étant borné. On trouve immédiatement que

$$E(S^{(n)}) = \int_0^1 S^n(x)dx = nM + O(1), \quad M = \frac{1}{\lg 2} \sum_{p=1}^{\infty} \lg \frac{(p+1)^2}{p(p+2)} \cdot f(p) \quad (2.2).$$

En évaluant

$$E(S^n - nM)^2 = \sum_1^n E[f(a_i) - M]^2 +$$
$$+ 2 \sum_1^{n-1} E[\{f(a_i) - M\} \sum_{j=i+1}^{n} \{f(a_j) - M\}]$$

par un procédé analogue à celui de M. Fréchet [8]), on trouve

$$E[S^n - n \cdot M]^2 = \sigma^2 n + O(1),$$

σ^2 ayant la même forme que dans le cas des chaînes simples, les s_{ij} ayant des significations un peu différentes. Supposons d'abord $\sigma \neq 0$, alors il résulte des démonstrations et théorèmes de notre travail cité que

a) *la mesure des points de* (0,1) *où*

$$z_1 \sigma \sqrt{n} < S^n(x) - nM < z_2 \sigma \sqrt{n}$$

est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + O(n^{-\delta}) \qquad (\delta > 0), \tag{2.3}$$

b) *pour presque tout point x on a si $n > n(x, c)$ et $c > \frac{3}{2}$,*

$$| S^n(x) - n\, M | < \sqrt{2\sigma^2 n\, (\lg_2 n + c \lg_3 n)},$$

et pour presque tout x l'inégalité inverse est satisfaite pour une infinité de n si $c \leqq \frac{1}{2}$.

Il nous reste à analyser le cas $\sigma = 0$. Un raisonnement du

---

[8]) M. Fréchet, Compléments à la théorie des probabilités discontinues en chaîne [Ann. Pisa (2) 2 (1933), 131—164].

même type que celui employé dans le § 6, chap. 1, loc. cit. [7]), mais un peu plus compliqué, montre que, les probabilités de passage étant toujours positives, on a toujours $\sigma \neq 0$ en dehors du cas banal où $f(p)$ est constante.

Ces résultats se généralisent immédiatement au cas où l'on a $\dfrac{\Sigma f^4(p)}{p^2} < \infty$; une évalution élémentaire de $E(S^n - nM)^4$ montre que

$$E[S^n - nM]^4 < Kn^2, \text{ donc } E \mid S^n - nM \mid^3 < K' n^{\frac{3}{2}}.$$

Il suffit alors de substituer cette valeur à la place de la limitation

$$E \mid S^n - nM \mid^3 < 2 \max \mid f(p) \mid E[S^n - nM]^2$$

employée dans la démonstration donnée loc. cit. [7]), Chap, 1, § 4. On étendra ces résultats sans doute encore au cas où l'on a $\Sigma \, |f^{2+\varepsilon}(p)| \, p^{-2} < \infty$. Pour la loi de Gauß $\Sigma f^2(p) p^{-2} < \infty$ suffira probablement.

Il suffit de poser $f(p) = 1$, $f(q) = 0$, $q \neq p$, pour en déduire les résultats relatifs aux fréquences des $a_i = p$ dans le développement. En posant avec M. P. Lévy, loc. cit. [2]) $f(a_n) = \lg a_n$, $S^n(x) = \lg (a_1, \ldots, a_n)$, l'on retrouve sous une forme sensiblement plus précise un résultat de M. Khintchine [9]).

2) Etudions maintenant la fréquence des indices i pour lesquels on a, dans le développement de x, $a_i \geqq \varphi(i)$, $\varphi(i)$ étant un entier $\to \infty$ si $i \to \infty$ [10]). Appelons m_i une variable aléatoire égale à 1 si $a_i \geqq \varphi(i)$, $= 0$ dans le cas contraire, (la fonction caractéristique de l'ensemble où $a_i \geqq \varphi(i)$). On vérifie facilement que

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\right] = \frac{1}{\lg 2} \sum_{i=1}^{n} \lg\left[1 + \frac{1}{\varphi(i)}\right] + O(1) = \sum_{i=1}^{n} m_i' + O(1).$$

Dans le cas où $\Sigma \dfrac{1}{\varphi(i)}$ converge, il en résulte, en vertu de l'inégalité de Tchebyscheff, que $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ est presque partout borné (première partie du théorème de M. Borel). Supposons donc $\Sigma \dfrac{1}{\varphi(i)}$ divergente. Quelle que soit la valeur de m_i, la valeur moyenne de

[9]) Metrische Kettenbruchprobleme [Compositio Math. 1 (1935), 361—382].

[10]) Nous croyons répondre, en partie. avec les résultats établis dans ce numéro, à un désideratum exprimé par M. Denjoy dans une Note aux C. R. 202 (1936), 371—373.

$\sum_{j=i+1}^{n} (m_j - m_j')$, évaluée si m_i est connue (c'est à dire l'intégrale de Lebesgue de la somme considérée, calculée dans l'ensemble où $m_i = 1$, resp. $= 0$, divisée par la mesure de cet ensemble) est bornée; comme $\varphi(i) \to \infty$, que la mesure relative des points x où $a_j > \varphi(j)$, dans l'ensemble où $a_1, \ldots, a_{j-1}$ ont des valeurs données, ne varie que de $\frac{1}{\varphi(j)}$ à $\frac{2}{\varphi(j)}$ si ces valeurs varient, on déduit en tenant compte de (2.1) que la valeur moyenne considérée tend vers 0 si $i \to \infty$. Donc

$$\sigma^2(n) = E\left[\sum_{i=1}^{n} (m_i - m_i')\right]^2 \approx \sum_{i=1}^{n} E(m_i - m_i')^2 \approx \frac{1}{\lg 2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varphi(i)}.$$

On trouve de même par des calculs élémentaires que $E\left[\sum_{i=1}^{n} (m_i - m_i')\right]^4 = O\left[\sum \frac{1}{\varphi(i)}\right]^2$. En appliquant alors la méthode habituelle, mais en faisant un groupement de termes différent: les groupes y_i et z_i (loc. cit. [7]), p. 74) groupant des termes m_i tels que $E[y_i - E(y_i)]^2 \approx \sigma(n)^{\frac{2}{3}}$, respectivement $E[z_i - E(z_i)]^2 \approx \sigma(n)^{\frac{1}{3}}$, on conclut encore que *la mesure de l'ensemble où*

$$z_1\, \sigma(n) < \sum_{i=1}^{n} m_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lg 2} \lg\left(1 + \frac{1}{\varphi(i)}\right) < z_2 \sigma(n),$$

est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z_i^2}{2}} dz + O[\sigma^{-} \qquad (\delta > 0).$$

L'on démontre alors qu'on peut appliquer le théorème habituel du logarithme itéré: Pour presque tout x, l'on a, si $c > \frac{3}{2}$ et $n > n(x, c)$,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} m_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lg 2} \lg\left[1 + \frac{1}{\varphi(i)}\right] \right| \leqq \sqrt{2\sigma^2(n)\, (\lg_2 n + 2 \lg_3 n)},$$

et *pour presque tout x l'inégalité inverse est satisfaite une infinité de fois si $c \leqq \frac{1}{2}$.*

3) Passons maintenant aux sommes $S^n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k})$ (f borné p. ex.). Pour les étudier on peut indifféremment ramener ce cas au cas traité dans 1 par une substitution d'états analogue

à celle utilisée généralement pour ramener les chaînes multiples de Markoff aux chaînes simples, ou appliquer les mêmes raisonnements que dans 1). On retrouve tout de suite le résultat établi par M. Khintchine [11]), à savoir que $\frac{1}{n} S^n(x)$ tend presque partout vers M:

$$M = \int_1^\infty g(x) \frac{dx}{\lg 2 x(x+1)}.$$

$$g(x) = f(p, q, \ldots, r) \text{ si } x = (p, q, \ldots, r, \ldots).$$

$E[S^n - nM]^2$ sera encore de la forme $n\sigma^2 + O(1)$. Si $\sigma \neq 0$, le théorème sur la loi de Gauß et le théorème du logarithme itéré s'appliquent, mais le cas $\sigma = 0$ peut se présenter même si f n'est pas constante.

4) Nous pouvons passer de là aux sommes $\sum\limits_i^n f(x_i)$ et $\sum\limits_i^n f(y_i)$. Si f est une fonction (bornée p. ex.) continue, en utilisant le fait que

$$y_i = (a_i, a_{i-1}, \ldots, a_{i-k}) + O(\lambda^k) \text{ et } x_i = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k}) + O(\lambda^k)$$

l'on retrouve immédiatement que pour presque tout x

$$\frac{1}{n} \sum_1^n f(y_i) \to \int_1^\infty f(y) \frac{dy}{\lg 2 \cdot y(y+1)}, \quad \frac{1}{n} \sum_i^n f(x_i) \to \int_1^\infty f(x) \frac{dx}{\lg 2 x(x+1)}.$$

Supposons maintenant que $f(y)$ satisfait à une inégalité de Hölder et que $\int_1^\infty f^4(y) y^{-2} dy < \infty$. Envisageons le carré de l'écart-type

$$E\left[\sum_{i=1}^n f(y_i) - nM\right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n E[f(y_i) - M]^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} E\left[\left(f(y_i) - M\right) \sum_{j=i+1}^n \left(f(y_j) - M\right)\right].$$

Soit

$$\bar{y}_j = (a_j, a_{j-1}, \ldots, a_{j-e}), \quad y_j = \bar{y}_j + O[\lambda^{\frac{j-i}{2}}],$$

où e est la partie entière de $\frac{j-i}{2}$,

---

[11]) Zur metrischen Kettenbruchtheorie [Compositio Math. 3 (1936), 276—285].

$$E[(f(y_i)-M)(f(y_j)-M)]=$$
$$=E[(f(y_i)-M)(f(\bar{y}_j)-M)]+O[e^{-\tau(j-i)}]=O[e^{-\tau\sqrt{j-i}}].$$

Soit E' l'espérance mathématique calculée en supposant que la loi de probabilité de y_i soit donnée par la formule de Gauß; alors on trouve

$$E[(f(y_i)-M)(f(y_j)-M)] = E'[\ldots] + O[e^{-\tau'\sqrt{i}}],$$

donc

$$E\left[\sum_1^n f(y_i) - nM\right]^2 = n\sigma^2 + O(1).$$

Si $\sigma \neq 0$, l'on déduit facilement à l'aide du raisonnement habituel, qu'on peut appliquer à

$$\sum_1^n f(y_j) = \sum_1^n f(a_j, \ldots, a_{j-\varrho}) + O(1),$$

$\varrho \approx n^{\frac{1}{100}}$, les théorèmes sur la loi de Gauß et du logarithme itéré. Tout cela s'étend aux sommes $\sum_1^n f(x_i)$, $\sum_1^n f(x_i, y_{i+1})$ etc.

Le cas des fonctions $f(x_i)$ demande toutefois quelques modifications supplémentaires, la valeur de x_i déterminant complètement les grandeurs $x_{i+1}, \ldots$. Pour établir que, si $\sigma \neq 0$, $\sum_m^{n+m} f(x_i)$ tend vers la loi de Gauß uniformément par rapport aux valeurs $a_1, \ldots, a_m$, l'on écrira

$$\sum_{m+1}^{n+m} f(x_i) = \sum_{m+1}^{n+m} f(\bar{x}_i) + O(1),\ \bar{x}_i = (a_i, \ldots, a_{i+\varrho}),\ \varrho \approx n^{\frac{1}{100}},$$

et l'on obtiendra encore pour la probabilité pour que $\sum_{m+1}^{n+m} f(x_i)-nM$ soit comprise entre $a\sigma\sqrt{n}$ et $b\sigma\sqrt{n}$ une expression de la forme (2.3). En ce qui concerne le théorème du logarithme itéré, il faut, comme d'habitude, montrer que, si le maximum Y_n de $\left|\sum_1^m f(x_i)-mM\right|$ quand m varie de 1 à n est $> L$, alors la probabilité pour que $\left|\sum_1^n f(x_i) - nM\right| > L - C$ est $> \gamma$, C et γ étant des constantes convenables. On utilisera le fait que, f satisfaisant à une condition de Hölder,

$$\left|\sum_1^m f(x_i) - \sum_1^m f(\bar{x}_i)\right| < K \text{ si } x_i = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+m});$$

donc $Y_n > L$ entraîne, pour un $m \leqq n$,

$$\left|\sum_1^n f(\bar{x}_i) - mM\right| > L - K$$

et l'on continuera le raisonnement de la façon habituelle.

Dans le cas particulier où $f(y) = \lg y$ [12]) on prouve facilement que $\sigma \neq 0$; on montre en effet que dans le cas contraire $\sum_1^n f(y_j) - nM$ serait presque partout bornée et l'on voit immédiatement que cela est impossible. $M = \frac{\pi^2}{12 \lg 2}$, $\sum_1^n f(y_i) = \lg Q_n$. On voit *en appelant z_n la différence entre x et sa n-ième réduite (en valeur absolue):*

a). *Pour presque tout nombre x, si $n > n(x, c)$, on a*

$$\exp\left\{-2\sqrt{2n\sigma^2(\lg_2 n + c \lg_3 n)}\right\} < z_n e^{+n\frac{\pi^2}{6 \lg 2}} <$$
$$< \exp\left\{2\sqrt{2n\sigma^2(\lg_2 n + c \lg_3 n)}\right\}$$

si $c > \frac{3}{2}$, et pour presque tout x les inégalités inverses sont satisfaites une infinité de fois si $c \leqq \frac{1}{2}$.

b). La mesure de l'ensemble où

$$\exp\{2a\sqrt{n}\,\sigma\} < z_n \exp\left\{\frac{\pi^2}{6 \lg 2} n\right\} < \exp\{2b\sqrt{n}\,\sigma\}$$

est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx + O[n^\delta].$$

5) Désignons par $\Gamma_x^{(n)}(p)$ le nombre des $a_i = p$ dans le développement du nombre x arrêté au n-ième terme. On voit sans peine que

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \left\{\Gamma_x^{(n)}(p) - n\frac{1}{\lg 2}\lg\frac{(p+1)^2}{p(p+2)}\right\}\left\{\Gamma_x^{(n)}(q) - n\frac{1}{\lg 2}\lg\frac{(q+1)^2}{q(q+2)}\right\} dx \to \varphi(p, q),$$

$\varphi(p, q)$ désignant une certaine constante. On voit alors en appliquant le groupement de termes du § 2, chap. 1, de notre

[12]) cf. Khintchine, loc. cit. [9]), et P. Lévy, loc. cit. [2]).

travail cité et la méthode de démonstration du § 3 que la mesure de l'ensemble des points x où les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\alpha_1 \sqrt{n} < \Gamma_x^{(n)}(p_1) - n\frac{1}{\lg 2}\lg\frac{(p_1+1)^2}{p_1(p_1+2)} < \beta_1\sqrt{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_r \sqrt{n} < \Gamma_x^{(n)}(p_r) - n\frac{1}{\lg 2}\lg\frac{(p_r+1)^2}{p_r(p_r+2)} < \beta_r\sqrt{n},$$

tend vers

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^r D}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots\int_{\alpha_r}^{\beta_r} e^{-P_2(x_1,\ldots,x_r)}\,dx_1\cdots dx_r,$$

P_2 désignant une forme quadratique de $x_1, \ldots, x_r$.

6) Posons

$$\frac{1}{u_n} = \left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| Q_n^2,\quad u_n = x_n + \frac{1}{y_{n-1}}.$$

La loi de répartition de y_{n-1} (la mesure de l'ensemble des points où $y_{n-1} < \lambda$) tend rapidement vers la valeur donné par la formule de Gauß et en appliquant la formule de Borel-Lévy, l'on trouve par un calcul facile que la mesure de l'ensemble des points x pour lesquels $x_n + \frac{1}{y_{n-1}} < \lambda$ (la loi des probabilités totales $H_n(\lambda)$ de $x_n + \frac{1}{y_{n-1}}\Big)$, tend rapidement vers

$$H(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lg 2}\cdot\frac{1}{x},\ \text{si } \lambda > 2$$

$$H(\lambda) = \frac{1-\lambda}{\lambda\lg 2} + \frac{\lg\lambda}{\lg 2},\ \text{si } 1 < \lambda \leqq 2.$$

On déduit de ce qui précède que pour presque tout x les nombres $u_1, \ldots, u_n, \ldots$, sont partout denses dans $(1, \infty)$, que la fréquence des indices i pour lesquels $a < u_m < b$ tend vers $H(b) - H(a)$ pour presque tout x. Si l'on envisage $\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{u_n}$, cette grandeur tend pour presque tout x vers une limite M. En ce qui concerne

$$\sum_1^n u_i = \sum_1^n a_i + \sum_1^{n-1}\frac{1}{x_i} + \sum_1^{n+1}\frac{1}{y_i},$$

$\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{x_i}$ et $\frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{y_i}$ tendant vers des limites finies, à $\sum\limits_1^n u_i$ s'applique tout ce qui sera établi sur Σa_n.

7) Considérons maintenant la suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, etc., la loi de probabilité de x_1 étant donnée par la formule de Gauß. Alors la loi de probabilité de x_n est aussi donnée par la formule de Gauß et la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ forme une suite stationnaire. Soit $f(x)$ une fonction mesurable telle que $E[f(x_n)] = \int_1^\infty f(x) \frac{dx}{\lg 2 \cdot x(x+1)} < \infty$. Il résulte du théorème connu de Birkhoff-Khintchine que — sauf pour des valeurs de x_1 appartenant à un ensemble auquel la formule de Gauß donne une probabilité nulle, c'est-à-dire sauf pour des valeurs de $X = \frac{1}{x_1}$ appartenant à un ensemble de mesure nulle —

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = \varphi(X_1)$$

existe. Pour démontrer que $\varphi(X)$ est une constante presque partout, nous pouvons approcher f par des fonctions continues et utiliser le résultat que nous avons directement établi pour les fonctions continues, mais il suffit aussi, suivant le procédé habituel, d'établir que l'ensemble $(1, \infty)$ est indécomposable pour la transformation

$$T(x_n) = x_{n+1} = (x_n - a_n)^{-1} = (x_n - [x_n])^{-1},$$

c'est-à-dire de démontrer que, si E_1 et E_2 sont deux ensembles disjoints de mesures positives avec $E_1 + E_2 = (1, \infty)$, il y a au moins un $x_1 \epsilon E_1$ et n avec $x_n = T^{(n)}(x_1) \epsilon E_2$. Or E_1 étant de mesure positive, nous pouvons trouver un nombre rationnel $(0, b_1, \ldots, b_m)$ tel que tous les nombres de la forme $(0, b_1, \ldots, b_m)$ appartiennent à E_1, sauf peut-être des nombres dont la mesure de Lebesgue relative dans l'ensemble des points $(0, b_1, \ldots, b_m)$ est $< \varepsilon$. Si tous les nombres $x_1, \ldots, x_n$ appartenaient à E_1 dès que x_1 lui appartient, si nous choisissons x avec une distribution uniforme de probabilité dans $(0,1)$, la probabilité pour que $x_n \epsilon E_2$, si $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$, serait $< \varepsilon$ quel que soit n et nous savons qu'elle tend, quels que soient $b_1, \ldots, b_m$, vers la valeur donnée par la formule de Gauß, ce qui nous fournit la contradiction cherchée. Il résulte des deux méthodes que *pour presque tout* X

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = \int_1^\infty \frac{f(x)dx}{x(x+1)\lg 2},$$

et ce résultat contient évidemment comme cas particulier ceux qu'on obtient en supposant $f(x_i) = f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k})$.[13])

[13]) cf. A. Khintchine, loc. cit. [11]), et P. Levy, loc. cit. [2]).

§ 3. La loi de Poisson. [14])

Désignons toujours par mes $\{F, H\}$ la mesure relative de l'ensemble où F a lieu dans l'ensemble où H est vérifiée. Soit $\varphi_n(p, \theta)$ la mesure de l'ensemble où il y a p élements a_i $(i=1, \ldots, n)$ plus grands que θn,

$$\varphi_n(p, \theta) =$$

$$\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_p} \prod_{i=1}^{n} (1-\text{mes}\,\{a_i>\theta n \mid H_{j_1\ldots j_p i}\}) \prod_{e=1}^{n} \frac{\text{mes}\,\{a_{j_e} > \theta n \mid H_{j_1\ldots j_p j_e}\}}{1-\text{mes}\,\{a_{j_e} > \theta n \mid H_{j_1\ldots j_p j_e}\}},$$

l'hypothèse $H_{j_1\ldots j_p i}$ étant que tous les a_e $(e<i)$ sont $\leqq \theta n$, sauf ceux qui correspondent à un indice $j_1, \ldots, j_p$ $(<i)$, ces derniers étant $> \theta n$. Considérons

$$\text{mes}\,\{a_i > \theta n \mid H_{j_1\ldots j_p i}\}.$$

Si $i - j_e > m$, j_e désignant le plus grand des indices $j_1, \ldots, j_p < i$, alors nous pouvons écrire

$$\text{mes}\,\{a_i > \theta n \mid H_{j_1\ldots j_p i}\} =$$
$$= \text{mes}\,\{a_i > \theta n \mid a_{i-1} \leqq \theta n, \ldots, a_{i-m} \leqq \theta n\}\ (1+\varepsilon_m),$$

$|\varepsilon_m|$ étant $< \varepsilon$ si $m > m_0$.

$$\text{mes}\,\{a_i > \theta n\} =$$
$$=\text{mes}\,\{a_i>\theta n \mid E\}\,\text{mes}\,\{E\}+\text{mes}\,\{a_i>\theta n \mid \overline{E}\}\,\text{mes}\,\{\overline{E}\}$$
$$=\text{mes}\,\{a_i>\theta n \mid E\}+\text{mes}\,\{\overline{E}\}\,(\text{mes}\,\{a_i>\theta n \mid \overline{E}\}-\text{mes}\,\{a_i>\theta n \mid E\}).$$

Si $E = a_{i-1} \leqq \theta n, \ldots, a_{i-m} \leqq \theta n$,

$$\text{mes}\,\{E\} < \frac{2m}{\theta n},$$

donc en vertu de (1.1) et (2.1), si $i > m$,

$$\text{mes}\,\{a_i > \theta n \mid H_{j_1\ldots j_p i}\} = \frac{1}{\lg 2 \cdot \theta n}\ (1+\varepsilon'),$$

ε' pouvant être rendu arbitrairement petit en prenant m et i suffisamment grands. Comme d'autre part le nombre des indices i pour lesquels il y a un $j_p < i$ avec $m - i \leqq j_p$ est $< mp$, et toujours eu égard à (1.1), il suit que

$$\prod_{j=1}^{n} (1 - \text{mes}\,\{a_i > \theta n \mid H_{j_1\ldots j_p i}\}) \approx e^{-\frac{1}{\theta \lg 2}},$$

[14]) cf. Khintchine, loc. cit. [9]).

quel que soit p si $n \to \infty$. D'autre part envisageons le produit Π mes $\{a_{j_e} > \theta n \mid H_{j_1 \ldots j_p j_e}\}$, pour la même raison que ci-dessus, si $j_e - j_{e-1} > m$ et $j_1 > m$, ce produit est égal à

$$\left(\frac{1}{\lg 2 \cdot \theta n}\right)^p (1+\varepsilon)^p.$$

et est de toute façon compris entre $(\theta n)^{-p}$ et $(2\theta n)^{-p}$. On en déduit immédiatement que

$$\varphi_n(p, \theta) \approx e^{-\frac{1}{\lg 2 \cdot \theta}} \left(\frac{1}{\theta \lg 2}\right)^p \frac{1}{p!}. \quad (\textit{Loi de Poisson.})$$

Il résulte de la démonstration que la mesure relative de l'ensemble où p des a_i sont $> \theta n$ $(i = m, \ldots, n+m)$ dans l'ensemble où $a_1 = \alpha_1, \ldots, a_m = \alpha_m$, tend vers la même expression, uniformément par rapport à $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, m et $\theta > \theta_0$.

Passons à la *loi de Poisson généralisée*. Affectons à chaque p un nombre $f(p)$, $= 0$ si $p \leqq \theta n$. Soit

$$F(x) = \Sigma \frac{1}{\lg 2} \lg \frac{(p+1)^2}{p(p+2)} f(p),$$

Σ' étant étendue à tous les p avec $f(p) \leqq x$. Soit

$$F^0(x) = \frac{x+|x|}{2x} = E(x), \quad F^{(1)}(x) = F(x),$$

$$F^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(n-1)}(x-z) dF^{(1)}(z).$$

Evaluons la mesure de l'ensemble où $\sum_1^n f(a_i) < x$. Considérons la mesure relative de cet ensemble dans l'ensemble où il y a p indices $j_1, \ldots, j_p$ avec $a_{j_i} > \theta n$. On voit sans peine, en vertu de la formule de Gauß, que si $j_l - j_{l-1} > m$, $j_1 > m$, cette mesure relative est sensiblement égale à $F^{(p)}(x)$. Comme la mesure de l'ensemble où il y a des indices $j_i, \ldots, j_p$ avec $j_i < m$ ou $j_l - j_{l-1} < m$, est très petite si n est suffisamment grand, nous concluons que la mesure relative considérée tend vers $F^{(p)}(x)$. D'autre part nous pouvons prendre M suffisamment grand pour que la mesure de l'ensemble où il y a plus de M quotients incomplets a_i $(i = 1, \ldots, n)$ plus grands que θn, soit inférieure à

ε quel que soit n. Dès lors la mesure de l'ensemble où $\sum\limits_{1}^{n} f(a_i) < x$, (ou la loi de probabilités totales de $\sum\limits_{1}^{n} f(a_i)$) est, si n est très grand, sensiblement égale à

$$e^{\frac{1}{\lg 2 \cdot \theta}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{F^{(p)}(x)}{\theta^p (\lg 2)^p p!},$$

et ceci, θ restant borné inférieurement, uniformément à la fonction $f(p)$. C'est *la loi de Poisson généralisée.*

§ 4. Etude de la somme $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ et de la série $\sum \frac{1}{S_n}$.

Soit $\overline{S}_n = \overline{S}_n(x) = \sum\limits_{1}^{n} a_i$ où $a_i = \alpha_i$, si $\alpha_i < n(\lg n)^{\frac{4}{3}}$, $= 0$ dans le cas contraire. S_n ne diffère de $\overline{S}_n$ que sur un ensemble de mesure arbitrairement petite. En vertu de la formule (2.1)

$$E[\overline{S}_n] = \int_0^1 \overline{S}_n(x)dx = \sum E[a_i] = [n + O(1)] \sum \frac{t}{\lg 2} \lg \frac{(t+1)^2}{t(t+2)},$$

t variant de 1 à la partie entière de $n(\lg n)^{\frac{4}{3}}$. Donc

$$E[\overline{S}_n] = \frac{n \lg n}{\lg 2} \left[1 + O\left(\frac{\lg_2 n}{\lg n}\right)\right]. \tag{4.1}$$

Considérons

$$E\{\overline{S}_n - E[\overline{S}_n]\}^2 = \int_0^1 \{\overline{S}_n(x) - E[\overline{S}_n]\}^2 dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[\bar{a}_i - E[\bar{a}_i]]^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} E[(\bar{a}_i - E[\bar{a}_i]) \sum_{j>i}^{n} (\bar{a}_j - E[\bar{a}_j])].$$

On vérifie immédiatement, toujours en vertu de (2.1), que la somme des termes rectangles est $O(n(\lg n)^2)$. D'où

$$\int_0^1 \{\overline{S}_n(x) - E[\overline{S}_n]\}^2 dx = O[n^2 (\lg n)^{\frac{4}{3}}]. \tag{4.2}$$

De (4.1) et (4.2) résulte que $\frac{\overline{S}_n}{n \lg n}$, et par conséquent $\frac{S_n}{n \lg n}$, sont équivalents au sens de Bernoulli à $\frac{1}{\lg 2}$, c'est à dire que $\frac{S_n}{n \lg n}$ converge en mesure vers $\frac{1}{\lg 2}$ [15]).

---

[15]) Résultat dû à A. Khintchine, loc. cit. [9]), cf. aussi P. Levy, loc. cit. [2]).

Considérons $\Sigma \frac{1}{S_n} - \frac{1}{E[\overline{S}_n]}$. En vertu du théorème de M. Borel, sauf pour un ensemble de points x de mesure nulle, S_n et $\overline{S}_n$ coincident si $n > n(x)$, par conséquent il nous suffit d'envisager

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{\overline{S}_n} - \frac{1}{E[\overline{S}_n]}\right) = \Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' \left(\frac{1}{\overline{S}_n} - \frac{1}{E[\overline{S}_n]}\right),$$

Σ' étant étendue aux valeurs n pour lesquelles $S_n < \frac{1}{2} E(\overline{S}_n)$, Σ'' aux n pour lesquels $S_n > \frac{3}{2} E[\overline{S}_n]$, Σ''' aux autres.

$$\text{mes}\left\{\overline{S}_n > \frac{3}{2} E[\overline{S}_n]\right\} = O[(\lg n)^{-\frac{2}{3}}].$$

Donc

$$\int_0^1 \Sigma'' \left|\frac{1}{\overline{S}_n} - \frac{1}{E[\overline{S}_n]}\right| dx < K \sum_1^\infty \frac{1}{n\,(\lg n)^{\frac{5}{3}}} < \infty.$$

$\overline{S}_n \geqq S'_n = a'_1 + \cdots + a'_n$, où $a'_i = a_i$, si $a_i < n$, $= 0$ si $a_i \geqq n$.

On a

$$E[S_n] = \frac{n \lg n}{\lg 2} + O(n) \text{ et } E\{S'_n - E[S'_n]\}^2 = O(n^2),$$

d'où

$$\text{mes}\left\{\overline{S}_n < \frac{1}{2} E[\overline{S}_n]\right\} = O[(\lg n)^{-2}],$$

$$E\left[\Sigma' \left|\frac{1}{\overline{S}_n} - \frac{1}{E[\overline{S}_n]}\right|\right] < K \sum_1^\infty \frac{1}{n\,(\lg n)^2} < \infty.$$

Si

$$\frac{1}{2} E[\overline{S}_n] < \overline{S}_n < \frac{3}{2} E[\overline{S}_n],$$

nous pouvons écrire

$$\overline{S}_n = E[\overline{S}_n]\,(1 + z_n),$$

$$E[|z_n|] < \sqrt{E\,|z_n^2|} = O[(\lg n)^{\frac{1}{3}}].$$

Par conséquent

$$E\left[\Sigma''' \left|\frac{1}{\overline{S}_n} - \frac{1}{E[\overline{S}_n]}\right|\right] < 2 \sum_1^\infty \frac{E\,|z_n|}{E[\overline{S}_n]} < K \sum_1^\infty \frac{1}{n\,(\lg n)^{\frac{4}{3}}} < \infty.$$

Donc

$$\sum_{1}^{\infty} E\left[\frac{1}{\overline{S}_n} - \frac{1}{E[\overline{S}_n]}\right] < \infty.$$

Vu la valeur de $E(\overline{S}_n)$, formule (2.2), il résulte d'une proposition élémentaire connue que pour presque tout x la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{S_n} - \frac{\log 2}{n \lg n}\right)$$

est absolument convergente. Il en résulte en particulier que $\Sigma \frac{1}{S_n}$ est presque partout divergente, résultat dû à M. Khintchine[9]), cf. aussi P. Lévy, loc. cit. [2]).

Revenons à l'étude des sommes S_n elles-mêmes. Soit η un nombre très petit. $S_n'' = \sum_{1}^{n} a_i''$, $a_i'' = a_i$, si $a_i \leqq \eta n$, $= 0$ si $a_i > \eta n$.

Soit $S_n''' = \sum_{1}^{n} (a_i - a_i')$, la somme $\frac{S_n'''}{n}$ ne comptera qu'un nombre borné de termes sauf sur un ensemble de mesure arbitrairement petite. Nous pouvons lui appliquer la proposition sur la loi de Poisson généralisée, démontrée § 3, et il en résulte qu'elle suit une loi de probabilité qui tend, si $n \to \infty$, vers une loi indéfiniment divisible dont la fonction des sauts est, si $x > \eta$, donnée par $dN'(x) = \frac{dx}{x^2 \lg 2}$. D'autre part

$$E[S_n'' - E[S_n'']]^2 = O(\eta n^2).$$

Si η est suffisamment petit, $\frac{1}{n}(S_n'' - E[S_n''])$ est donc très petit sauf sur un ensemble de mesure très petite. Nous concluons que la loi de probabilité de $\frac{1}{n}\{S_n - E[S_n']\}$ tend vers une loi quasi-stable dont la fonction caractéristique est

$$\exp\left\{i a t + \int_{0}^{\infty}\left[e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right]\frac{du}{u^2 \lg 2}\right\}.$$

(Reçu le 10 juin 1939.)