P. HEBRONI

Über lineare Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendungen auf lineare Integrodifferentialgleichungen. 3. Mitteilung

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 229-252

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__229_0>

Über lineare Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendungen auf lineare Integrodifferentialgleichungen

III. Mitteilung

von

P. Hebroni

Jerusalem

Einleitung.

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der beiden vorangehenden in dieser Zeitschrift erschienenen Mitteilungen (5 (1937), 403—429; 6 (1938), 258—284). Sie sucht die in den beiden früheren Arbeiten über die homogenen und inhomogenen linearen Differentialgleichungen im Ring

$$y' = ya, \ z' = za + b$$

erhaltenen Resultate auf das homogene und inhomogene lineare Differentialsystem

$$(1) \qquad y'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r)$$

$$(2) \qquad z'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} z_\lambda a_{\lambda\varkappa} + b_\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r)$$

zu übertragen. Wie in den früheren Arbeiten wird auch hier ein nicht notwendig vertauschbarer Ring R mit Einheitselement zugrunde gelegt. In R werden absoluter Betrag, Differentiation und Integration als so definiert vorausgesetzt, daß sie den Axiomen (V_2), (V_3) und (V_4) der I. Mitteilung, § 1 genügen. Jedoch sehen wir uns hier veranlaßt, $(V_{4,5})$ zu verschärfen, und zwar zum folgenden Axiom

$(V'_{4,5})$ Sind

$$(3) \qquad a_1, a_2, \ldots$$

irgendwelche Elemente in R und setzt man

$$u_0 = v_0 = 1, \ u_1 = v_1 = \int a_1, \ u_n = \int (a_n u_{n-1}), \ v_n = \int (v_{n-1} a_n), \ n \geqq 1,$$

so ist mit gewissen Zahlen $A_0, \ldots, A_n, \ldots$, die von den Elementen (3) nicht abhängen,

$$|u_0| = |v_0| \leqq A_0, \quad |u_n| \leqq A_n |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|, \qquad (n \geqq 1)$$
$$|v_n| \leqq A_n |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|.$$

Nach diesen Festsetzungen bilden wir im § 1 den Ring $[R]$, der aus allen r-reihigen Matrizen

$$[a] = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ a_{21} \ldots a_{2r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{pmatrix} = [a_{ik}]$$

mit Elementen aus R besteht. Indem wir in $[R]$ in geeigneter Weise absoluten Betrag, Differentiation und Integration definieren können wir nachweisen, daß in $[R]$ die Axiome $[V_1]$, $[V_2]$, $[V_3]$, und $[V_4']$ gelten, die den Axiomen $(V_1), \ldots, (V_4)$ für R entsprechen. Der Strich soll andeuten, daß in $[R]$ nicht bloß das Analogon von $(V_{4,5})$, sondern auch von $(V'_{4,5})$ gilt.

In § 2 betrachten wir nun die lineare homogene Differentialgleichung in R

$$[y]' = [y][a] \tag{4}$$

und formulieren für sie im Wesentlichen alle Sätze, die wir früher für die Differentialgleichungen R

$$y' = ya \tag{5}$$

bewiesen haben. Dabei nehmen die Begriffe Hauptlösung, Fundamentallösung und Anfangswert einer Lösung von (4) hier für (4) dieselbe Stellung ein, die sie früher für (5) eingenommen haben. Die Beweise brauchen wir nicht zu rekapitulieren, da $[R]$ denselben Axiomen gehorcht wie R. Das rechtsseitige Ideal K_r von R_d, das in den beiden ersten Abhandlungen eine bedeutende Rolle spielte, findet in $[R]$ sein Analogen im rechtsseitigen Ideal $[K_r]$, das definiert ist als die Gesamtheit der Matrizen von $[R]$, die erstzeilig sind (d.h. alle Elemente außerhalb der ersten Zeile sind 0), und deren Elemente K_r angehören. Die Sätze über die in K_r gelegenen Lösungen von (5) übertragen wir im § 3 auf die Gleichung (4) und ihre in $[K_r]$ gelegenen Lösungen. Diese Resultate ermöglichen uns in § 4, die Auflösungstheorie des linearen Differentialsystemes (1) in R zu entwickeln. Hierbei fragen wir von vornherein nach denjenigen Lösungen von (1), die in einem gegebenen rechtsseitigen Ideal K_r von R_d enthalten sind. Dies bedeutet keine Einschränkung, da K_r mit R_d, dem Ring aller differenzierbaren Elemente von R identifiziert werden kann. Außerdem bedeutet es eine Abkürzung und ist den Anwendungen auf Integrodifferentialgleichungen besser angepaßt.

Von den auf das Differentialsystem (1) sich beziehenden Resultaten seien erwähnt:

1. (1) bezitzt immer in R Fundamentalsysteme, d.h. Systeme von je r Lösungen

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ir} \qquad (1 \leqq i \leqq r) \tag{5'}$$

mit der Eigenschaft, daß $[y_{ik}]$ in $[R]$ invertierbar ist.

2. Ist (5′) ein System von irgendwelchen r Lösungen von (1), und sind $c_1, \ldots, c_r$ irgendwelche in K_r gelegene Konstanten, so ist

$$\widetilde{y}_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda y_{\lambda\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r) \tag{6}$$

eine in K_r gelegene Lösung von (1).

3. Ist (5′) ein Fundamentalsystem von (1), so ist jede in K_r gelegene Lösung $\widetilde{y}_\varkappa$, $1 \leqq \varkappa \leqq r$, von (1) in der Form (6) darstellbar mit in K_r gelegenen konstanten Koeffizienten c_λ.

4. Ist (5′) ein Fundamentalsystem von (1) und setzt man

$$y^*_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{i\lambda}\, y_{\lambda\varkappa}, \qquad (1 \leqq i, \varkappa \leqq r),$$

so stellen die Größen y^*_{ik} dann und nur dann ein Fundamentalsystem von (1) dar, wenn die Matrix $[c_{ik}]$ in $[R]$ invertierbar ist.

5. Zu jedem gegebenen System von in K_r gelegenen Konstanten $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_r$ besitzt (1) eine und nur eine Lösung $y_1, \ldots, y_r$, so daß der Anfangswert von $y_\varkappa = c_\varkappa$ für $1 \leqq \varkappa \leqq r$ ist. Diese Lösung ist in K_r gelegen.

§ 5 bringt die Anwendungen dieser Sätze auf das lineare System von Integrodifferentialgleichungen 1. Ordnung

$$y'_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2 \left(y_{00\lambda} \mid a_{\lambda\varkappa}\right). \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r). \tag{7}$$

Zunächst möge der Sinne der in (7) auftretenden Zeichen hier noch einmal erklärt werden. (Vgl. I. Mitteilung, § 7.)

Es seien $s_1, t_1, u_1, s_2, t_2, u_2$ Variable im Bereich $0 \ldots 1$; es sei x eine reelle oder komplexe Größe, die in einem einfach zusammenhängenden, endlichen und abgeschlossenen Bereich B variabel ist. Die Funktionensysteme

$$y_{00}(x, s_1, t_1, s_2, t_2),\ a_{00ik}(x, s_1, t_1, s_2, t_2),\ a_{01ik}(x, s_1, t_1, u_2), \quad (1 \leqq i,k \leqq r),$$
$$a_{10ik}(x, u_1, s_2, t_2),\ a_{11ik}(x, u_1, u_2),$$

seien in $s_1, t_1, u_1, s_2, t_2, u_2$ stetig, in x stetig, resp. regulär. Die Operation σ_2 ist definiert durch

$$\sigma_2(a_{00} \mid b) = \int_0^1 \int_0^1 a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 +$$
$$+ \int_0^1 a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, t_2) b_{01}(\lambda_1, t_1, t_2) d\lambda_1 + \int_0^1 a_{00}(s_1, t_1, s_2, \lambda_2) b_{10}(t_1, \lambda_2, t_2) d\lambda_2 +$$
$$+ a_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)\, b_{11}(t_1, t_2).$$

Das Zeichen b links bedeutet also das System der 4 Funktionen $b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{11}$; ebenso bedeutet das Zeichen $a_{\lambda\varkappa}$ in (7) das System der Funktionen $a_{00\lambda\varkappa}, a_{01\lambda\varkappa}, a_{10\lambda\varkappa}, a_{11\lambda\varkappa}$. Die Differentiation in (7) ist nach x zu nehmen.

Dem Integrodifferentialsystem (7) wird nun das Differentialsystem in zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen

$$(8) \qquad (y)'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} (y)_\lambda\, (a)_{\lambda\varkappa}$$

gegenübergestellt. $(a)_{\lambda\varkappa}$ bedeutet hierbei die Matrix $(a)_{\lambda\varkappa} = (a_{00\lambda\varkappa}\varepsilon_{00} + a_{01\lambda\varkappa}\varepsilon_{01} + a_{10\lambda\varkappa}\varepsilon_{10} + a_{11\lambda\varkappa}\varepsilon_{11})$.

Da im Ringe der zweigliedrigen Matrizen (V_1), (V_2), (V_3) und (V'_4) gelten, gelten für (8) die oben für (1) entwickelten Sätze. Für das rechtsseitige Ideal K_r tritt das Ideal K der kernigen Matrizen, das heißt Matrizen der Form $a_{00}\,\varepsilon_{00}$, auf. Dies Ideal ist sogar zweiseitig. Als Anfangswert der differenzierbaren Matrizen (a) hat man den Wert von (a) in dem festgewählten, für alle (a) gleichen Punkt x_0 von B zu betrachten.

Diese Tatsachen ermöglichen, die Auflösung von (7) auf diejenige von (8) zurückzuführen. Genauer gilt: Sind

$$(9) \qquad (y)_{i1}, (y)_{i2}, \ldots, (y)_{ir} \qquad (1 \leqq i \leqq r)$$

r Lösungen von (8), und sind $c_{00\varkappa}(s_1, t_1, s_2, t_2)$, $1 \leqq \varkappa \leqq r$, irgendwelche r Funktionen, die von den s und t, nicht aber von x abhängen, so ist

$$(10) \qquad y_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(c_{00\lambda} \mid y_{\lambda\varkappa})$$

eine Lösung von (7).

2. Ist die Matrix der r^2 Größen (9) invertierbar, so ist jede Lösung von (7) mit Hilfe geeignet gewählter, von x unabhängiger $c_{00\lambda}$, $1 \leqq \lambda \leqq r$, in der Form (10) darstellbar.

3. Ist x_0 ein gegebener Punkt in B und sind $c_{001}, \ldots, c_{00r}$ gegebene Funktionen von den s und t, die von x nicht abhängen, so besitzt (7) eine und nur eine Lösung $y_{001}, \ldots, y_{00r}$ mit der Eigenschaft, daß für $x = x_0$ $y_{00\varkappa} = c_{00\varkappa}$, $1 \leqq \varkappa \leqq r$, ist.

§ 6 betrachtet das inhomogene lineare Differentialsystem in R

$$z'_{\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} z_{\lambda}\, a_{\lambda\varkappa} + b_{\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r) \tag{2}$$

und führt seine Auflösung auf diejenige von (1) zurück. U.a. wird hier bewiesen: Zu jedem gegebenen System von Konstanten $c_1, \ldots, c_r$ besitzt (2) eine und nur eine Lösung $z_1, \ldots, z_r$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varkappa$ $c_{\varkappa}$ der Anfangswert von $z_{\varkappa}$ ist.

§ 7 bringt die Anwendung dieser Sätze auf das inhomogene lineare Integrodifferentialsystem

$$z'_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(z_{00\lambda} \mid a_{\lambda\varkappa}) + b_{00\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r) \tag{11}$$

und beweist u.a.: zu jedem gegebenen Punkt x_0 in B und zu jedem gegebenen System von Funktionen $c_{00\lambda}$, $1 \leqq \lambda \leqq r$, die von den s und t, nicht aber von den x abhängen, besitzt (11) eine und nur eine Lösung $z_{001}, \ldots, z_{00r}$, so daß für $x = x_0$

$$z_{00\varkappa} = x_{00\varkappa}.$$

§ 1.

Der Ring $[R]$, *der Unterring* $[R_d]$ *und das Ideal* $[I]$.

Es sei r eine natürliche Zahl. Es sei R ein Ring, in dem die Axiome $(\mathrm{V}_1), \ldots, (\mathrm{V}_4)$ vom § 1 der I. Mitteilung erfüllt sind. Das letzte dieser Axiome, $(\mathrm{V}_{4,5})$, wollen wir entsprechend den Zielen, die wir hier verfolgen, etwas erweitern und zwar folgendermaßen:

$(\mathrm{V}'_{4,5})$ Sind

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

irgendwelche Elemente in R und setzt man

$$u_0 = v_0 = 1,\ u_1 = v_1 = \int a_1, \ldots,\ u_n = \int (a_n u_{n-1}),\ v_n \int (v_{n-1} a_n) \qquad (n \geqq 1),$$

so ist für gewisse positive Zahlen $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, die von den Elementen (1) unabhängig sind,

$$\left.\begin{aligned} |u_0| = |v_0| \leqq A_0, \quad |u_n| &\leqq |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|\, A_n, \\ |v_n| &\leqq |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n| \cdot A_n, \end{aligned}\right\} \quad (n \geqq 1),$$

während
$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$
eine ganze Funktion darstellt.

Bemerkungen: 1. Ist hierin $a_n = a$, $1 \leqq n < \infty$, so geht $(V'_{4,5})$ in $(V_{4,5})$ der I. Mitteilung über.

2. Es ist

$$(1') \qquad |1| = |u_0| \leqq A_0.$$

Wir bilden alle r-reihigen Matrizen, deren Elemente R angehören, indem wir setzen

$$[a]=\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \\ \dots\dots \\ a_{r1} \dots a_{rr} \end{pmatrix}=[a_{i\varkappa}],\ [b]=\begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1r} \\ \dots\dots \\ b_{r1} \dots b_{rr} \end{pmatrix}=[b_{i\varkappa}],\ [c]=\begin{pmatrix} c_{11} \dots c_{1r} \\ \dots\dots \\ c_{r1} \dots c_{rr} \end{pmatrix}=[c_{ik}], \dots$$

Die Gesamtheit dieser Matrizen bezeichnen wir mit $[R]$. Wir schreiben

$$[a] = [b]$$

dann und nur dann, wenn

$$a_{i\varkappa} = b_{i\varkappa}, \qquad (1 \leqq i, \varkappa \leqq n).$$

Wir setzen, entsprechend den Regeln bei gewöhnlichen Matrizen

$$[a] \pm [b] = [a_{i\varkappa} \pm b_{i\varkappa}], \quad [a] \cdot [b] = \Big[\sum_{\lambda=1}^{r} a_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa}\Big]$$

$$[0] = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ \dots\dots \\ 0 \dots 0 \end{pmatrix}, \quad [1] = \begin{pmatrix} 10 \dots 00 \\ \dots\dots \\ 00 \dots 01 \end{pmatrix}.$$

Man erkennt leicht, daß $[R]$ einen Ring bildet, in welchem $[0]$ und $[1]$ das Null- resp. Einheitselement sind. Bezeichnen wir die Axiome (V_1), (V_2), (V_3), (V_4), wenn sie für $[R]$ ausgesprochen werden, mit $[V_1]$, $[V_2]$, $[V_3]$, $[V_4]$, so können wir also sagen, $[V_1]$ sei für $[R]$ erfüllt.

Es sei $[a]$ irgendein Element in $[R]$. Wir setzen

$$|[a]| = \operatorname*{Max}_{i,\varkappa} |a_{i\varkappa}|$$

und nennen diese Zahl den *absoluten Betrag von* $[a]$. Wie man leicht erkennt, sind in $[R]$ die Axiome

$[V_{2,1}] : |[0]| = 0,$
$[V_{2,2}] : |[a]| > 0,$ wenn $[a] \neq [0],$
$[V_{2,3}] : |-[a]| = |[a]|,$

die den Axiomen $(V_{2,1})$, $(V_{2,2})$ und $(V_{2,3})$ der I. Mitteilung entsprechen, erfüllt. Es gilt in $[R]$ aber auch $[V_{2,4}]$, das eine Übertragung von $(V_{2,4})$ auf unseren Ring $[R]$ ist, und das besagt:

$[V_{2,4}]$: $$|[a]+[b]| \leqq |[a]| + |[b]|.$$

Denn es ist für gewisse α und β

$$\operatorname*{Max}_{i,\varkappa} |a_{i\varkappa} + b_{i\varkappa}| = |a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}|;$$

also ist

$$|[a]+[b]| = \operatorname*{Max}_{i,\varkappa} |a_{i\varkappa}+b_{i\varkappa}| =$$

$$|a_{\alpha\beta}+b_{\alpha\beta}| \leqq |a_{\alpha\beta}| + |b_{\alpha\beta}| \leqq \operatorname*{Max}_{i,\varkappa} |a_{i\varkappa}| + \operatorname*{Max}_{i,\varkappa} |b_{i\varkappa}| = |[a]| + |[b]|.$$

Ferner läßt sich auch nach geringer Modifikation $(V_{2,5})$ auf unseren Ring übertragen. Und zwar gilt in $[R]$

$[V_{2,5}]$: $$|[a]\cdot[b]| \leqq rA\,|[a]|\cdot|[b]|.$$

Hierin bedeutet A die im Axiom $(V_{2,5})$ der I. Mitteilung genannte Zahl. Denn es ist wegen $(V_{2,5})$ in der I. Mitteilung

$$|[a]\cdot[b]| = \left|\left[\sum_{\lambda=1}^{r} a_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa}\right]\right| = \operatorname*{Max}_{i,\varkappa} \left|\sum_{\lambda=1}^{r} a_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa}\right| \leqq \operatorname*{Max}_{i,\varkappa} \sum_{\lambda=1}^{r} |a_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa}| \leqq$$

$$\leqq r \operatorname*{Max}_{i,\lambda,\varrho,\varkappa} |a_{i\lambda}\, b_{\varrho\varkappa}| \leqq r \operatorname*{Max}_{i,\lambda,\varrho,\varkappa} A\,|a_{i\lambda}|\cdot|b_{\lambda\varkappa}| = rA \operatorname*{Max}_{i,\varkappa} |a_{i\varkappa}| \cdot \operatorname*{Max}_{i,\varkappa} |b_{i\varkappa}| =$$

$$= rA\,|[a]|\cdot|[b]|.$$

Man darf also in $(V_{2,5})$ a und b durch $[a]$ und $[b]$ ersetzen, wenn man nur rA statt A setzt. Diese geringfügige Änderung schadet aber nichts, da in $(V_{2,5})$ A nur der Bedingung unterworfen war, eine positive, von a und b unabhängige Konstante zu sein.

Die Voraussetzungen $[V_2]$ sind also sämtlich in $[R]$ erfüllt. Sie verwandeln $[R]$ in einen metrischen Raum, ähnlich wie in der I. Mitteilung (V_2) R in einen solchen Raum verwandelt haben. Aus der Vollständigkeit von R folgert man ferner leicht die Vollständigkeit von $[R]$, so daß auch $[V_3]$ in $[R]$ erfüllt ist.

Sind für $1 \leqq i,\varkappa \leqq r$ sämtliche Elemente $a_{i\varkappa}$ von $[a] = [a_{i\varkappa}]$ in R differenzierbar, so setzen wir

$$[a]' = [a'_{i\varkappa}].$$

Wir nennen diese Operation „*Differentiation*" *von* $[a]$ und bezeichnen $[a]$ als *differenzierbar*. Aus dieser Definition der Differenzierbarkeit folgt: $[a]$ ist differenzierbar dann und nur dann, wenn alle $a_{i\varkappa}$ für $1 \leqq i,\varkappa \leqq r$ in R differenzierbar sind.

Ist $[a] = [a_{i\varkappa}]$ irgendein Element in $[R]$, so setzen wir

$$\int [a] = \left[\int a_{i\varkappa}\right].$$

Wir nennen diese Operation *Integration von* $[a]$ und nennen $\int [a]$ ein Integral in $[R]$. Es gilt offenbar wegen $(V_{4,2})$,

$[V_{4,2}]$: jedes Element $[a]$ in $[R]$ ist integrierbar.

Dies ist Übertragung von $(V_{4,2})$ in $[R]$. Wie man leicht erkennt, gilt in $[R]$ auch die Übertragung $[V_{4,1}]$ von $(V_{4,1})$. Sie lautet

$[V_{4,1}]$: die Gesamtheit der differenzierbaren Elemente von $[R]$ bildet einen Unterring $[R_d]$ von $[R]$, der das Einheitselement $[1]$ enthält, und zwar ist, falls $[a]$ und $[b]$ $[R_d]$ angehören,

$$([a] \pm [b])' = [a]' \pm [b]', \qquad ([a] \cdot [b])' = [a]'[b] + [a][b]'.$$

$[V_{4,1}]$ folgt so: es seien $[a]$ und $[b]$ differenzierbare Elemente in $[R]$. Dann ist

$$[a]' \pm [b]' = [a'_{i\varkappa}] \pm [b'_{i\varkappa}] = [a'_{i\varkappa} \pm b'_{i\varkappa}] = [(a_{i\varkappa} \pm b_{i\varkappa})'] = [a_{i\varkappa} \pm b_{i\varkappa}]' = ([a] \pm [b])',$$

$$[a]' \cdot [b] + [a][b]' = [a'_{i\varkappa}][b_{i\varkappa}] + [a_{i\varkappa}][b'_{i\varkappa}] = \left[\sum_{\lambda=1}^{r} a'_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa}\right] + \left[\sum_{\lambda=1}^{r} a_{i\lambda} b'_{\lambda\varkappa}\right] =$$

$$= \left[\sum_{\lambda=1}^{r} (a'_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa} + a_{i\lambda} b'_{\lambda\varkappa})\right] = \left[\sum_{\lambda=1}^{r} (a_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa})'\right] = \left[\sum_{\lambda=1}^{r} a_{i\lambda} b_{\lambda\varkappa}\right]' = ([a][b])'.$$

Mit $[a]$ und $[b]$ sind also auch $[a] \pm [b]$ und $[a][b]$ differenzierbar. Daraus folgt, daß die differenzierbaren Elemente von $[R]$ einen Ring $[R_d]$ bilden. $[1]$ ist differenzierbar, da die Elemente dieser Matrix 0 oder 1 sind und diese in R differenzierbar sind. In $[R]$ gilt also wirklich $[V_{4,1}]$. Wir behaupten: in $[R]$ gelten auch die den Axiomen $(V_{4,3})$ und $(V_{4,4})$ entsprechenden Tatsachen

$[V_{4,3}]$: die Integrale von $[R]$ bilden ein zweiseitiges Ideal $[I]$ in $[R_d]$,

$[V_{4,4}]$: Es ist immer $\left(\int [a]\right)' = [a]$.

Wir beweisen zunächst $[V_{4,4}]$. Dies geschieht einfach so: Es gilt für jedes Element $[a]$

$$[a] = [a_{i\varkappa}] = \left[\left(\int a_{i\varkappa}\right)'\right] = \left[\int a_{i\varkappa}\right]' = \left(\int [a_{i\varkappa}]\right)' = \left(\int [a]\right)',$$

womit auch die Differenzierbarkeit jedes Integrales $\int [a]$ in $[R]$ bewiesen ist. Nun beweisen wir $[V_{4,3}]$:

Es sei $[a]$ ein Integral in $[R]$, und es sei $[a] = \int [b] = \int [b_{i\varkappa}]$. Nach dem eben Gesagten ist $[a]$ differenzierbar, also in $[R_d]$ enthalten.

Es sei $[c]$ irgendein Element in $[R_d]$, so daß alle $c_{i\varkappa}$ differenzierbar sind. Dann ist wegen $(\mathrm{V}_{4,3})$

$$\sum_{\lambda=1}^{r} a_{i\lambda}\, c_{\lambda\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \left(\int b_{i\lambda}\right) c_{\lambda\varkappa}$$

ein Integral in R. Man darf also setzen

$$\sum_{\lambda=1}^{r} a_{i\lambda}\, c_{\lambda\varkappa} = \int d_{i\varkappa}\,.$$

Somit ist

$$[a][c] = \left[\sum_{\lambda=1}^{r} a_{i\varkappa}\, c_{\lambda\varkappa}\right] = \left[\int d_{i\varkappa}\right] = \int [d_{i\varkappa}];$$

$[a][c]$ ist also ein Integral in $[R]$. Ähnlich beweist man, daß auch $[c][a]$ ein Integral in $[R]$ ist. Da außerdem wegen

$$\int[a] - \int[b] = \left[\int a_{i\varkappa}\right] - \left[\int b_{i\varkappa}\right] = \left[\int a_{i\varkappa} - \int b_{i\varkappa}\right] =$$
$$= \left[\int (a_{i\varkappa} - b_{i\varkappa})\right] = \int [a_{i\varkappa} - b_{i\varkappa}]$$

$\int[a] - \int[b]$ ein Integral in $[R]$ ist, ist die Gesamtheit der Integrale in $[R]$ wirklich ein zweiseitiges Ideal in $[R_d]$, w.z.b.w.

In $[R]$ gilt aber auch das $(\mathrm{V}'_{4,5})$ entsprechende Axiom $[\mathrm{V}'_{4,5}]$, wenn man nur die in $(\mathrm{V}'_{4,5})$ auftretenden Konstanten $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ passend abändert. Es gilt nämlich

$[\mathrm{V}'_{4,5}]$: Sind $\overset{n}{[a]} = [\overset{n}{a}_{i\varkappa}]$, $1 \leqq n < \infty$, irgendwelche Elemente in $[R]$ und setzt man

$$\begin{aligned} &[u]_0 = [v]_0 = [1], \quad [u]_1 = [v]_1 = \int \overset{1}{[a]}, \\ &[u]_n = \int \left(\overset{n}{[a]}[u]_{n-1}\right), \quad [v]_n = \int \left([v]_{n-1}\overset{n}{[a]}\right) \end{aligned} \qquad (1 \leqq n < \infty),$$

so existieren von den $\overset{n}{[a]}$ unabhängige, positive Zahlen $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n, \ldots$ mit folgenden beiden Eigenschaften: 1. ist

$$(2) \qquad |[u]_n| \leqq A'_n |\overset{1}{[a]}| \cdot |\overset{2}{[a]}| \cdots |\overset{n}{[a]}|, \quad |[v]_n| = A'_n |\overset{1}{[a]}| \cdot |\overset{2}{[a]}| \cdots |\overset{n}{[a]}| \qquad (n \geqq 0),$$

2. ist
$$\sum_{n=0}^{\infty} A'_n z^n$$

eine ganze Funktion.

Beweis. Um den Beweis von $[\mathrm{V}'_{4,5}]$ vorzubereiten, behaupten wir zunächst die Formel

$$(2') \qquad [u]_n = \left[\sum_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}} \int \left(\overset{n}{a}_{i\lambda_1} \cdot \int \left(\overset{n-1}{a}_{\lambda_1\lambda_2} \cdot \int \left(\ldots \int \left(\overset{2}{a}_{\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}} \int \overset{1}{a}_{\lambda_{n-1}\varkappa}\right)\right)\right)\ldots\right)\right]$$

(nur die eckigen Klammern sind hier die Matrixzeichen). Für $n = 1$ ist diese Formel gewiß richtig, da

$$[u]_1 = \int [\overset{1}{a}] = \left[\int \overset{1}{a}_{i\varkappa}\right].$$

Man darf also den Schluß von n auf $n+1$ anwenden. Es gelte also (2′) für ein gewisses n. Dann ist

$$[u]_{n+1} = \int ([\overset{n+1}{a}][u]_n) =$$

$$= \int \left[\sum_{\varrho_1 \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}} \overset{n+1}{a}_{i\varrho} \cdot \int \left(\overset{n}{a}_{\varrho\lambda_1} \int \left(\overset{n-1}{a}_{\lambda_1\lambda_2} \int \left(\cdots \int \left(\overset{2}{a}_{\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}} \int \overset{1}{a}_{\lambda_{n-1}\varkappa} \right) \right) \right) \cdots \right) \right]$$

$$= \left[\sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \int \left(\overset{n+1}{a}_{i\lambda_1} \cdot \int \left(\overset{n}{a}_{\lambda_1\lambda_2} \int \left(\cdots \int \left(\overset{2}{a}_{\lambda_{n-1}\lambda_n} \int \overset{1}{a}_{\lambda_n\varkappa} \right) \right) \right) \cdots \right) \right].$$

Dies ist aber die Formel (2′), wenn man in (2′) n durch $n+1$ ersetzt. (2′) gilt also allgemein.

Nun folgt aus (2′) für $n \geqq 1$

$$|[u]_n| = \operatorname*{Max}_{i\varkappa} \left| \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}} \int \left(\overset{n}{a}_{i\lambda_1} \int \left(\overset{n-1}{a}_{\lambda_1\lambda_2} \cdots \int \left(\overset{2}{a}_{\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}} \int \overset{1}{a}_{\lambda_{n-1}\varkappa} \right) \right) \cdots \right) \right|$$

$$\leqq \operatorname*{Max}_{i\varkappa} \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}} \left| \int \left(\overset{n}{a}_{i\lambda_1} \cdot \int \left(\overset{n-1}{a}_{\lambda_1\lambda_2} \int \left(\cdots \int \overset{1}{a}_{\lambda_{n-1}\varkappa} \right) \right) \cdots \right) \right|,$$

und nach $(V'_{4,5})$ ist dies

$$\leqq \operatorname*{Max}_{i\varkappa} \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}} |\overset{n}{a}_{i\lambda_1}| \cdot |\overset{n-1}{a}_{\lambda_1\lambda_2}| \, | \cdots |\overset{1}{a}_{\lambda_{n-1}\varkappa}| \, A_n \leqq A_n r^{n-1} \prod_{s=1}^{n} \operatorname*{Max}_{i\varkappa} |\overset{s}{a}_{i\varkappa}|$$

$$= A_n r^{r-1} \prod_{s=1}^{n} |[\overset{s}{a}]| \leqq A_n r^n \prod_{s=1}^{n} |[\overset{s}{a}]|,$$

und für $n = 0$ ist wegen (1′)

$$|[u]_0| = |[1]| = |1| \leqq A_0 = A_0 r^0.$$ Es gilt also

$$|[u]_n| \leqq A_n r^n \prod_{s=1}^{n} |[\overset{s}{a}]| \qquad (0 \leqq n < \infty).$$

Ähnlich beweist man

$$|[v]_n| = A_n r^n \prod_{s=1}^{n} |[\overset{s}{a}]| \qquad (0 \leqq n < \infty).$$

Daraus folgt: Setzt man

$$A'_n = A_n r^n \qquad (n \geqq 0),$$

so ist (2) erfüllt, womit der 1. Teil von $[V'_{4,5}]$ bewiesen ist. Offenbar ist (3) eine ganze Funktion. Denn nach $(V'_{4,5})$ ist

$$\sum_0^\infty A_n z^n$$

eine ganze Funktion. Daher ist es

$$\sum_{n=0}^{\infty} A'_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n z^n$$

auch. $[\mathrm{V}'_{4,5}]$ ist also vollständig bewiesen.

Aus $[\mathrm{V}'_{4,5}]$ erhält man durch die Spezialisierung

$$\overset{n}{[a]} = [a]$$

die $(\mathrm{V}_{4,5})$ entsprechende Tatsache:

$[\mathrm{V}_{4,5}]$: Ist $[a]$ irgendein Element in $[R]$, und setzt man

$$\begin{array}{ll} [u]_0 = [v]_0 = [1], & [u]_1 = [v]_1 = \int [a], \\ [u]_n = \int ([a][u]_{n-1}), & [v]_n = \int ([v]_{n-1}[a]) \end{array} \qquad (1 \leqq n < \infty),$$

so existieren gewöhnliche, von $[a]$ unabhängige, positive Zahlen A'_n, $0 \leqq n < \infty$, derart, daß

$$|\,[u]_n\,| \leqq A'_n\,|\,[a]\,|^n, \qquad |\,[v]_n\,| \leqq A'_n\,|\,[a]\,|^n,$$

und daß $\sum_{n=0}^{\infty} A'_n z^n$ eine ganze Funktion ist.

Die hier für $[R]$ nachgewiesenen Eigenschaften $[\mathrm{V}_1]$, $[\mathrm{V}_2]$,$[\mathrm{V}_3]$ und $[\mathrm{V}_4]$ ermöglichen, in $[R]$ dieselbe Theorie zu entwickeln, wie wir sie für R in den §§ 1—4 der I. Mitteilung entwickelt haben. Die für das folgende wichtigen Definitionen und Sätze sollen hier und in den §§ 2 und 3 formuliert werden. Dabei mögen den übertragenen Sätzen der Übersichtlichkeit wegen ihre Nummern in Mitteilung I hier in Klammern beigefügt werden.

Definition. Ist

$$[c]' = [0],$$

so wollen wir $[c]$ eine *Konstante* in $[R]$ nennen.

Satz 1 (14). Ist $[a]$ differenzierbar, so existiert für $[a]$ eine Darstellung der Form

$$[a] = [c] + \int [b], \tag{4}$$

wo $[c]$ konstant ist. Diese Darstellung ist eindeutig.

Definition. Die in der eindeutigen Darstellung (4) des differenzierbaren Elementes $[a]$ auftretende Konstante $[c]$ nennen wir den *Anfangswert von* $[a]$.

Wir fügen noch hinzu den leicht beweisbaren

Satz 2. Der Anfangswert einer Summe resp. Differenz ist gleich der Summe resp. der Differenz der Anfangswerte der Summanden. Der Anfangswert eines Produktes ist gleich dem Produkte der Anfangswerte der Faktoren.

§ 2.

Die lineare homogene Differentialgleichung in $[R]$ $[y]' = [y][a]$.

Es sei die Differentialgleichung

$$[y]' = [y][a] \tag{5}$$

vorgelegt. Wir betrachten zugleich mit ihr die zu ihr adjungierte Differentialgleichung

$$[z]' = -[a][z]. \tag{6}$$

Wir setzen

$$[\bar{y}] = [1] + \int [a] + \int\Big(\Big(\int [a]\Big)[a]\Big) + \int\Big(\Big(\int\Big(\Big(\int [a]\Big)[a]\Big)\Big)[a]\Big) + \cdots \tag{7}$$

$$[\bar{z}] = [1] - \int [a] + \int\Big([a]\int [a]\Big) - \int\Big([a]\int\Big([a]\int [a]\Big)\Big) + \cdots \tag{8}$$

Dann gelten folgende Sätze:

Satz 3 (16). Die Reihen (7) und (8) sind konvergent.

Satz 4 (18). $[\bar{y}]$ befriedigt (5), $[\bar{z}]$ befriedigt (6).

Satz 5 (21). $[\bar{y}]$ und $[\bar{z}]$ sind invertierbar, und zwar ist

$$[\bar{y}][\bar{z}] = [\bar{z}][\bar{y}] = [1].$$

Definitionen. Wir bezeichnen $[\bar{y}]$ als die ***Hauptlösung von*** (5).

Wir bezeichnen jede invertierbare Lösung von (5) als ***Fundamentallösung*** von (5).

Die Hauptlösung ist also wegen Satz 5 eine Fundamentallösung.

Satz 6 (22). Ist $[\tilde{y}]$ irgendeine Lösung von (5) und ist $[c]$ irgendeine Konstante, so ist

$$[y] = [c][\tilde{y}] \tag{9}$$

eine Lösung von (5).

Satz 7 (23). Ist $[\tilde{y}]$ irgeneine Fundamentallösung von (5), so ist jede Lösung $[y]$ von (5) mit Hilfe einer gewissen Konstanten $[c]$ in der Form (9) darstellbar.

Satz 8 (23). Verschiedenen Werten von $[c]$ in (9) entsprechen verschiedene Lösungen $[y]$ von (5).

Satz 9 (25). Ist $[\tilde{y}]$ eine Fundamentallösung von (5), so ist die Lösung $[c][\tilde{y}]$ von (5) dann und nur dann eine Fundamentallösung, wenn $[c]$ invertierbar ist.

Satz 10 (26). 1. Es gibt eine und nur eine Lösung $[y]$ von (5) mit dem gegebenen Anfangswert $[c]$.

2. Ist $[\tilde{y}]$ die Hauptlösung von (5) und stellt man die Lösung $[y]$ nach Satz 7 in der Form

$$[y] = [c][\tilde{y}]$$

dar, so ist $[c]$ der Anfangswert von $[y]$.

3. Es gibt eine und nur eine Lösung von (5) mit dem Anfangswert $[1]$; es ist die Hauptlösung.

Satz 11 (27). (5) besitzt eine und nur eine Lösung, die ein Integral ist, es ist die triviale Lösung $[y] = [0]$.

Satz 12 (26′). Eine Lösung von (5) ist dann und nur dann invertierbar, wenn ihr Anfangswert es ist.

§ 3.

Spezielle Lösungen der linearen Differentialgleichung $[y]' = [y][a]$.

Satz 13 (28). Ist $[K_r]$ irgendein rechtsseitiges Ideal in $[R_d]$ und ist $[y]$ irgendeine Lösung und $[\tilde{y}]$ eine Fundamentallösung von (5), so liegt $[y]$ dann und nur dann in $[K_r]$, wenn in der nach Satz 7 bestehenden und nach Satz 8 eindeutigen Darstellung

$$[y] = [c][\tilde{y}]$$

$[c]$ in $[K_r]$ liegt.

Satz 14 (29). Eine Lösung $[y]$ von (5) gehört dann und nur dann $[K_r]$ an, wenn ihr Anfangswert $[K_r]$ angehört.

Satz 15 (29′). Zu jedem gegebenen, in $[K_r]$ gelegenen Anfangswert $[c]$ besitzt (5) eine und nur eine in $[K_r]$ gelegene Lösung $[y]$ mit dem Anfangswert $[c]$. Sie ist durch

$$[y] = [c][\bar{y}]$$

gegeben, wo $[\bar{y}]$ die Hauptlösung von (5) bedeutet.

Für die Anwendungen sind drei Annahmen über $[K_r]$ wichtig:

I. $[K_r]$ bedeutet die Gesamtheit der erstzeiligen r-reihigen, differenzierbaren Matrizen in R, d.h. $[K_r]$ besteht aus allen Elementen $[a]$ in $[R_d]$, die die Eigenschaft haben, daß $a_{i\varkappa} = 0$ für $i \neq 1$.

II. Man wählt irgendein rechtsseitiges Ideal K_r in R_d und bezeichnet mit $[K_r]$ die Gesamtheit der Elemente $[a]$ von $[R]$ mit der Eigenschaft, daß alle $a_{i\varkappa}$ K_r angehören.

III. Man bezeichnet mit $[K_r]$ die Gesamtheit der Elemente $[a]$ von $[R]$ mit der Eigenschaft, daß alle $a_{i\varkappa}$ beiden in I und II ausgesprochenen Forderungen genügen, so daß gleichzeitig alle $a_{i\varkappa}$ enthalten sind in K_r und $a_{i\varkappa} = 0$ wenn $i \neq 1$.

Auf die zu (5) duale Gleichung $[w]' = [a][w]$ brauchen wir hier nicht einzugehen. Die sie betreffenden Sätze ergeben sich durch Dualisierung aus dem Vorigen. (Vergleiche übrigens I. Mitteilung, § 4.)

§ 4.

Die in K_r enthaltenen Lösungen des linearen Differentialsystemes

$$y'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r).$$

Es sei K_r ein rechtsseitiges Ideal in R_d. Mit $[K_r]$ wollen wir das eben in § 3 beschriebene rechtsseitige Ideal verstehen, so daß $[K_r]$ die Gesamtheit der Matrizen $[a]$ in $[R_d]$ darstellt, die folgenden Bedingungen genügen:

1. $a_{1\varrho}$ ist enthalten in K_r für $1 \leqq \varrho \leqq r$,

2. $$a_{\lambda\varrho} = 0 \quad \text{für } 2 \leqq \lambda \leqq r \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r).$$

Es sei das lineare Differentialsystem

$$y'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} y_\lambda a_{\lambda\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r) \tag{10}$$

vorgelegt. Wir suchen nach Lösungen von (10) die in K_r enthalten sind. Wir stellen (10) die Matrizendifferentialgleichung

$$[y]' = [y][a] \tag{11}$$

gegenüber, in der $[a]$ die Koeffizientenmatrix von (10) bedeutet.

Definition. Ein System von nicht notwendig in K_r enthaltenen und nicht notwendig voneinander verschiedenen Lösungen

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{ir} \qquad (1 \leqq i \leqq r)$$

von (10) in eine Matrix

$$[I] = \begin{pmatrix} y_{11}, \ldots, y_{1r} \\ \cdots\cdots \\ y_{r1}, \ldots, y_{rr} \end{pmatrix}$$

zusammengefaßt, bezeichnen wir als *Lösungsmatrix von* (10). Offenbar gilt der

Satz 16. 1. Es ist jede Lösungsmatrix von (10) eine Lösung von (11) und umgekehrt.

2. Jede invertierbare Lösungsmatrix von (10) ist eine Fundamentallösung von (11) und umgekehrt.

3. Die Hauptlösung von (11) ist eine Lösungsmatrix $[y]$ von (10) mit der Eigenschaft, daß für die Anfangswerte $c_{i\varkappa}$ von $y_{i\varkappa}$ die Gleichungen bestehen

$$c_{i\varkappa} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = \varkappa \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und umgekehrt.

Wir behaupten den

Satz 16'. Ist y irgendeine Lösung von (11), also eine Lösungsmatrix von (10), und sind $c_1, c_2, \ldots, c_r$ in K_r enthaltene Konstanten, so ist

$$\overset{\frown}{y}_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda \, y_{\lambda\varrho} \tag{12}$$

eine in K_r enthaltene Lösung von (10).

Beweis. Wegen (11) ist

$$y'_{i\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} y_{i\lambda} \, a_{\lambda\varkappa} \, ,$$

daher stellen $\overset{\frown}{y}_1, \ldots, \overset{\frown}{y}_r$ eine Lösung von (10) dar. Da die c_λ in K_r enthalten sind, sind es auch die $\overset{\frown}{y}_\varrho$, was zu beweisen war.

Satz 17. Ist $[y]$ eine Fundamentallösung von (11), also eine invertierbare Lösungsmatrix von (10), so ist jede in K_r enthaltene Lösung $\overset{\frown}{y}_1, \ldots, \overset{\frown}{y}_r$ von (10) in der Form (12) darstellbar, wo die c_λ konstant und in K_r enthalten sind.

Beweis. Wir setzen

$$\overset{\frown}{y}_{1\varrho} = \overset{\frown}{y}_\varrho \text{ und } \overset{\frown}{y}_{\lambda\varrho} = 0 \text{ für } \lambda \neq 1. \tag{13}$$

Dann ist $[\overset{\frown}{y}]$ eine in $[K_r]$ enthaltene Lösung von (11). Nach Satz 13 besteht eine Gleichung der Form

$$[\overset{\frown}{y}] = [c][y], \tag{14}$$

wo $[c]$ konstant und in $[K_r]$ enthalten ist. Daraus folgt

$$\overset{\frown}{y}_{1\varrho} = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{1\lambda} \, y_{\lambda\varrho} \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r).$$

Setzt man hierin $c_{1\lambda} = c_\lambda$ und beachtet (13), so kommt (12), womit der Satz bewiesen ist.

Satz 18. Ist $[y]$ eine Fundamentallösung von (11), also eine invertierbare Lösungsmatrix von (10), ist $\overset{\frown}{y}_1, \ldots, \overset{\frown}{y}_r$ eine in K_r enthaltene Lösung von (10), so sind die c_λ in der nach dem vorigen Satz bestehenden Darstellung (12) in K_r enthalten.

Beweis. Setzt man

$$(15) \qquad \begin{cases} \overset{\frown}{y}_{1\varrho} = \overset{\frown}{y}_\varrho, & \overset{\frown}{y}_{\lambda\varrho} = 0 \quad \text{für } \lambda \neq 1, \\ c_{1\varrho} = c_\varrho, & c_{\lambda\varrho} = 0 \quad \text{,,} \qquad \text{,,} \end{cases}$$

so besteht wegen (12) die Gleichung (14). $[y]$ ist eine invertierbare und $[\overset{\frown}{y}]$ ist eine in $[K_r]$ enthaltene Lösung von (11). Also ist nach Satz 13 $[c]$ in $[K_r]$ enthalten, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 19. Zu jedem gegebenen System von in K_r enthaltenen Konstanten $c_1, c_2, \ldots, c_r$ gibt es eine und nur eine Lösung $\overset{\frown}{y}_1, \ldots, \overset{\frown}{y}_r$ von (10), so daß der Anfangswert von $\overset{\frown}{y}_\varrho$ gleich c_ϱ für $1 \leqq \varrho \leqq r$ ist. Ist $[y]$ die Hauptlösung von (11), so sind die $\overset{\frown}{y}_\varrho$ gegeben durch

$$(12) \qquad \overset{\frown}{y}_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda\, y_{\lambda\varrho} \qquad (1 \leqq \varrho \leqq r).$$

Diese Lösung ist in K_r enthalten.

Beweis: 1. Man definiere die $\overset{\frown}{y}_\varrho$ durch (12) und die $\overset{\frown}{y}_{\lambda\varrho}$ und $c_{\lambda\varrho}$ durch (15). Dann stellen die $\overset{\frown}{y}_\varrho$ eine in K_r gelegene Lösung von (10) dar. Ferner besteht die Gleichung

$$[\overset{\frown}{y}] = [c][y].$$

Da $[y]$ die Hauptlösung von (11) ist, ist nach Satz 10 der Anfangswert von $[\overset{\frown}{y}] = [c]$, d.h. der Anfangswert von $\overset{\frown}{y}_{1\varrho}$ ist $c_{1\varrho}$, also ist der Anfangswert von $\overset{\frown}{y}_\varrho = c_\varrho$.

2. Es seien außer den $\overset{\frown}{y}_\varrho$ die Größen $\bar{y}_\varrho$ eine in K_r enthaltene Lösung von (10) mit denselben Anfangswerten c_ϱ. Setzt man

$$\bar{y}_{1\varrho} = \bar{y}_\varrho, \; \bar{y}_{\lambda\varrho} = 0, \quad \text{für } \lambda \neq 1, \; 1 \leqq \varrho \leqq r,$$

so ist $[\bar{y}]$ eine Lösung von (11). Es besteht also nach Satz 7 eine Gleichung der Form

$$(16) \qquad [\bar{y}] = [\bar{c}][y],$$

worin $[\bar{c}]$ konstant ist. Da $[y]$ den Anfangswert $[1]$ hat, so ist der Anfangswert von $\bar{y}_{1\varrho}$ gleich $\bar{c}_{1\varrho}$. Wegen $\bar{y}_{1\varrho} = \bar{y}_\varrho$ und weil der Anfangswert von $\bar{y}_\varrho$ gleich c_ϱ ist, ist $\bar{c}_{1\varrho} = c_\varrho$, und aus (16) folgt jetzt

$$\bar{y}_\varrho = \bar{y}_{1\varrho} = \sum_{\lambda=1}^{r} \bar{c}_{1\lambda}\, y_{\lambda\varrho} = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda\, y_{\lambda\varrho} = \overset{\frown}{y}_\varrho, \text{ w.z.b.w.}$$

Insbesondere gilt der

Satz 19′. Es gibt in R eine und nur eine Lösung von (10) mit den gegebenen Anfangswerten $0, 0, \ldots, 0$. Es ist die triviale Lösung $y_\varrho = 0$ für $1 \leqq \varrho \leqq r$.

§ 5.

Das lineare, homogene System von Integrodifferentialgleichungen

$$y'_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(y_{00\lambda} \mid a_{\lambda\varkappa}) \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r).$$

Es sei das lineare homogene Integrodifferentialsystem

$$(16) \qquad y'_{00\varkappa}(s_1, t_1, s_2, t_2; x) = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(y_{00\lambda} \mid a_{\lambda\varkappa}) \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r)$$

vorgelegt, worin $a_{i\varkappa}$ das System der vier Funktionen

$$(16') \qquad \begin{array}{ll} a_{00i\varkappa}(s_1, t_1, s_2, t_2; x), & a_{01i\varkappa}(s_1, t_1, u_2; x), \\ a_{10i\varkappa}(u_1, s_2, t_2; x), & a_{11i\varkappa}(u_1, u_2; x) \end{array}$$

bedeutet. Die Voraussetzungen, die hier über die Koeffizienten (16′) von (16) zu machen sind, sind in der Einleitung festgelegt. Multiplizieren wir (16) mit ε_{00}, so können wir sie als Gleichung in zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen so schreiben:

$$(17) \qquad (y_{00\varkappa}\, \varepsilon_{00})' = \sum_{\lambda=1}^{r} y_{00\lambda}\, \varepsilon_{00} (a)_{\lambda\varkappa},$$

worin

$$(a)_{i\varkappa} = \sum_{pq=0}^{1} a_{pqi\varkappa}\, \varepsilon_{pq}.$$

Wir stellen (17) das Differentialsystem in zweigliedrigen Matrizen

$$(18) \qquad (y)'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{1} (y)_\lambda\, (a)_{\lambda\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r)$$

gegenüber. Mit R bezeichnen wir, wie in der I. Mitteilung, § 6, den Ring der zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen, mit K das rechtsseitige (übrigens sogar zweiseitige) Ideal der kernigen Matrizen von R, also der Matrizen der Form

$$a_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)\varepsilon_{00}.$$

(18) ist ein lineares Differentialsystem in R. Da, wie man sich leicht überzeugt, in diesem Ring nicht nur das Axiom $(V_{4,5})$

(I. Mitteilung, § 1) gilt sondern auch das schärfere Axiom ($V'_{4,5}$) (§ 1 hier) so gelten für (18) die in § 4 aufgestellten Sätze.

Wir behaupten nun den

Satz 20. Ist $[y]$ eine Lösungsmatrix von (18) und sind die gegebenen Funktionen

$$c_{00\lambda} = c_{00\lambda}(s_1, t_1, s_2, t_2) \qquad (1 \leqq \lambda \leqq r)$$

von x unabhängig, so ist

$$y_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(c_{00\lambda} \mid y_{\lambda\varkappa}) \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r) \tag{19}$$

eine Lösung von (16). Hierbei bedeutet $y_{i\varkappa}$ das System der vier Funktionen, die die Komponenten der Matrix $(y)_{i\varkappa}$ in $[y]$ bilden.

Beweis. Da $[y]$ eine Lösungsmatrix von (18) bildet und die $c_{00\lambda}$ von x unabhängig sind, ist

$$y_{00\varkappa}\, \varepsilon_{00} = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{00\lambda}\, \varepsilon_{00} \cdot (y)_{\lambda\varkappa} \tag{20}$$

eine Lösung von (18), d.h. die Matrizen $y_{001}\varepsilon_{00}, \ldots, y_{00r}\varepsilon_{00}$ befriedigen (17). Also befriedigen $y_{001}, \ldots, y_{00r}$ (16). (20) ist aber mit (19) äquivalent, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 21. Ist $[y]$ eine Fundamentallösungsmatrix von (18), so ist jede Lösung $y_1, \ldots, y_r$ von (16) mit Hilfe gewisser von x unabhängiger $c_{00\lambda}$ in der Form (19) darstellbar.

Beweis. Es sei $y_{001}, y_{002}, \ldots, y_{00r}$ eine Lösung von (16). Dann ist

$$y_{001}\, \varepsilon_{00}, \ldots, y_{00r}\, \varepsilon_{00} \tag{21}$$

eine Lösung von (17), d.h. (21) ist eine in K enthaltene Lösung von (18). Nach Satz 17 ist daher

$$y_{00\varkappa}\, \varepsilon_{00} = \sum_{\lambda=1}^{r} (c)_\lambda\, (y)_{\lambda\varkappa}$$

wo die $(c)_\lambda$ von x unabhängig und in K enthalten sind, d.h. es ist

$$(c)_\lambda = c_{00\varkappa}\, \varepsilon_{00}.$$

Somit bestehen für die $y_{00\varkappa}\varepsilon_{00}$ Gleichungen der Form (20) und für die $y_{00\varkappa}$ Gleichungen der Form (19), was zu beweisen war.

Satz 22. Zu jedem gegebenen System von Funktionen

$$c_{00\lambda} = c_{00\lambda}(s_1, t_1, s_2, t_2),$$

die von x unabhängig sind, besitzt (16) eine und nur eine Lösung

$y_{001}, \ldots, y_{00r}$ mit der Eigenschaft, daß für $x = x_0$ diese Größen in $c_{001}, \ldots, c_{00r}$ übergehen. Es ist

$$y_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(c_{00\lambda} \mid \bar{y}_{\lambda\varkappa}), \tag{22}$$

worin $\bar{y}_{i\varkappa}$ das System der Koeffizienten von $(\bar{y})_{i\varkappa}$ in der Hauptlösungsmatrix $[\bar{y}]$ von (18) ist.

Beweis. Wir multiplizieren (22) mit ε_{00} und erhalten

$$y_{00\varkappa}\, \varepsilon_{00} = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{00\lambda}\, \varepsilon_{00} (\bar{y})_{\lambda\varkappa}.$$

Nach Satz 19 stellen diese Ausdrücke eine Lösung von (18) dar, deren Anfangswerte, d.h. deren Werte für $x = x_0$ mit $c_{001}\, \varepsilon_{00}, \ldots, c_{00r}\, \varepsilon_{00}$ übereinstimmen; also sind $y_{001}, \ldots, y_{00r}$ eine Lösung von (16) und deren Anfangswerte stimmen mit $c_{001}, \ldots, c_{00r}$ überein. Gäbe es eine zweite Lösung $\mathring{y}_{001}, \ldots, \mathring{y}_{00r}$ von (16) mit denselben Anfangswerten $c_{001}, \ldots, c_{00r}$, so wären $y_{001}\varepsilon_{00}, \ldots, y_{00r}\varepsilon_{00}$ und $\mathring{y}_{001}\varepsilon_{00}, \ldots, \mathring{y}_{00r}\varepsilon_{00}$ zwei verschiedene Lösungen von (18) mit denselben in K gelegenen Anfangswerten $c_{001}\varepsilon_{00}, \ldots, c_{00r}\varepsilon_{00}$, was Satz 19 widerspricht.

Insbesondere gilt der

Satz 23. (16) besitzt eine und nur eine Lösung, deren Elemente alle für $x = x_0$ identisch in s_1, t_1, s_2, t_2 verschwinden. Es ist die triviale Lösung $y_{00\varrho} = 0$ für $1 \leqq \varrho \leqq r$.

§ 6.

Das inhomogene lineare Differentialsystem in R

$$z'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} z_\lambda\, a_{\lambda\varkappa} + b_\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r).$$

Es seien, wie in § 7 der zweiten Mitteilung K_r und K'_r zwei rechtsseitige Ideale in R_d mit folgender Eigenschaft: ist a enthalten in K'_r so ist $\int a$ enthalten in K_r.

Es sei das inhomogene lineare Differentialsystem in R

$$z'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} z_\lambda\, a_{\lambda\varkappa} + b_\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r) \tag{23}$$

vorgelegt. Die $b_\varkappa$ seien alle in K'_r enthalten. Wir suchen nach Lösungen von (23), die in K_r enthalten sind. Zu diesem Zwecke bilden wir irgend eine Fundamentallösungsmatrix $[y]$ von

$$y'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} y_\lambda\, a_{\lambda\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r). \tag{24}$$

Ihre Inverse $[y]^{-1}$ sei mit $[\widetilde{y}]$ bezeichnet. Wir behaupten den

Satz 24. Ist $[y]$ irgend eine Fundamentallösungsmatrix von (24), und ist $[\widetilde{y}]$ ihre Inverse, so ist

$$\bar{z}_\varkappa = \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \left(\int (b_\lambda \widetilde{y}_{\lambda\varrho})\right) y_{\varrho\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r) \tag{25}$$

eine in K_r enthaltene Lösung von (23).

Beweis. Es ist wegen $[\widetilde{y}][y] = [y]^{-1}[y] = [1]$, wenn

$$\delta_{\lambda\varkappa} = \begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = \varkappa \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \widetilde{y}_{i\varrho}\, y_{\varrho\varkappa} = \delta_{i\varkappa}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \bar{z}'_\varkappa &= \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \left(\int (b_\lambda \widetilde{y}_{\lambda\varrho})\right) y'_{\varrho\varkappa} + \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} b_\lambda \widetilde{y}_{\lambda\varrho} y_{\varrho\varkappa} = \\ &= \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \left(\int (b_\lambda \widetilde{y}_{\lambda\varrho})\right) \cdot \sum_{\sigma=1}^{r} y_{\varrho\sigma} a_{\sigma\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{r} b_\lambda \sum_{\varrho=1}^{r} \widetilde{y}_{\lambda\varrho} y_{\varrho\varkappa} = \\ &= \sum_{\sigma=1}^{r} \left[\sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \left(\int (b_\lambda \widetilde{y}_{\lambda\varrho})\right) y_{\varrho\sigma}\right] a_{\sigma\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{r} b_\lambda\, \delta_{\lambda\varkappa} = \sum_{\sigma=1}^{r} \bar{z}_\sigma\, a_{\sigma\varkappa} + b_\varkappa, \end{aligned}$$

so daß (25) wirklich eine Lösung von (23) darstellt. Da die b_ϱ in K'_r enthalten sind, so sind die $\bar{z}_\varkappa$, wie aus (25) sofort hervorgeht, in K_r enthalten, und der Satz ist bewiesen.

Satz 25. Ist $[\mathring{y}]$ irgend eine weitere Lösungsmatrix von (24) und ist $c_1, \ldots, c_r$ ein beliebiges in K_r enthaltenes System von Konstanten, so ist

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda\, \mathring{y}_{\lambda\varkappa} + \bar{z}_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda\, \mathring{y}_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \left(\int (b_\lambda \widetilde{y}_{\lambda\varrho})\right) y_{\varrho\varkappa} \tag{25'}$$

eine in K_r enthaltene Lösung von (23).

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} z'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda\, \mathring{y}'_{\lambda\varkappa} + \bar{z}'_\varkappa &= \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda \mathring{y}_\varrho\, a_{\varrho\varkappa} + \sum_{\lambda=1}^{r} \bar{z}_\varrho\, a_{\varrho\varkappa} + b_\varkappa = \\ &= \left[\sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda\, \mathring{y}_{\lambda\varrho} + \bar{z}_\varrho\right] \cdot a_{\varrho\varkappa} + b_\varkappa = \sum_{\varrho=1}^{r} z_\varrho\, a_{\varrho\varkappa} + b_\varkappa\,. \end{aligned}$$

Daß die $z_\varkappa$ in K_r enthalten sind, folgt aus (25') und aus dem ovrigen Satz.

Satz 26. Sind

$$z_1, \ldots, z_r \text{ und } \mathring{z}_1, \ldots, \mathring{z}_r$$

zwei in K_r enthaltene Lösungen von (23), so ist

$$z_1 - \mathring{z}_1, \ldots, z_r - \mathring{z}_r$$

eine in K_r enthaltene Lösung von (24).

Satz 27. Sind $[y]$ und $[\mathring{y}]$ Fundamentallösungsmatrizen von (24), so ist jede in K_r enthaltene Lösung $z_1, \ldots, z_r$ von (23) in der Form (25′) darstellbar mit Konstanten c_λ, die in K_r enthalten sind.

Beweis. Nach Voraussetzung sind $z_1, \ldots, z_r$ und nach Satz 25 sind $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_r$ eine in K_r enthaltene Lösung von (23). Wegen Satz 26 sind daher die Größen

$$y_1 = z_1 - \bar{z}_1, \ldots, y_r = z_r - \bar{z}_r \tag{26}$$

eine in K_r enthaltene Lösung von (24). Nach Satz 17 ist somit

$$y_1 = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda \mathring{y}_{\lambda 1}, \ldots, y_r = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda \mathring{y}_{\lambda r}, \tag{27}$$

worin die c_λ konstant und in K_r enthalten sind. Aus (25), (26) und (27) folgt (25′).

Satz 28. Sind $c_1, \ldots, c_r$ gegebene in K_r enthaltene Konstanten, so besitzt (23) eine und nur eine Lösung $z_1, \ldots, z_r$, so daß die Anfangswerte dieser Elemente respektive $c_1, \ldots, c_r$ sind. Es ist

$$z_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda \bar{y}_{\lambda\varkappa} + \bar{z}_\varkappa, \tag{28}$$

worin $[\bar{y}]$ die Hauptlösungsmatrix von (24) und $\bar{z}_\varkappa$ durch (25) definiert ist. Die $z_\varkappa$ sind in K_r enthalten.

Beweis. (28) ist nach Satz 25 eine in K_r enthaltene Lösung von (23). Die $\bar{z}_\varkappa$ sind wegen (25) Integrale. Der Anfangswert von $z_\varkappa$ ist daher gleich demjenigen von $\sum_{\lambda=1}^{r} c_\lambda \bar{y}_{\lambda\varkappa}$. Da aber der Anfangswert von $\bar{y}_{\lambda\varkappa}$ gleich $\delta_{\lambda\varkappa}$ ist (vgl. Satz 16), ist der Anfangswert von $z_\varkappa$ gleich $c_\varkappa$. Gäbe es zwei Lösungen, $z_1, \ldots, z_r$ und $\mathring{z}_1, \ldots, \mathring{z}_r$ von (23) mit denselben in K_r gelegenen Anfangswerten $c_1, \ldots, c_r$, so wäre

$$z_1 - \mathring{z}_1, \ldots, z_r - \mathring{z}_r$$

eine Lösung von (24) mit den Anfangswerten $0, 0, \ldots, 0$. Nach Satz 19′ muß $z_1 - \mathring{z}_1 = 0, \ldots, z_r - \mathring{z}_r = 0$, w.z.b.w.

Insbesondere:

Satz 29. (23) besitzt eine, und nur eine in K_r enthaltene Lösung $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_r$, deren Anfangswerte $0, 0, \ldots, 0$ sind. Sie ist durch (25) gegeben.

§ 7.

Das inhomogene lineare System von Integrodifferenzialgleichungen

$$z'_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(z_{00\lambda} \mid a_{\lambda\varkappa}) + b_\varkappa \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r).$$

Es sei das inhomogene lineare Integrodifferentialsystem

$$(29) \qquad z'_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(z_{00\lambda} \mid a_{\lambda\varkappa}) + b_{00\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r)$$

vorgelegt. Hierin sei mit $a_{\lambda\varkappa}$ das System der vier Funktionen

$$a_{00\lambda\varkappa}(s_1, t_1, s_2, t_2; x), \qquad a_{01\lambda\varkappa}(s_1, t_1, u_2; x),$$
$$a_{10\lambda\varkappa}(u_1, s_2, t_2; x), \qquad a_{11\lambda\varkappa}(u_1, u_2; x)$$

bezeichnet. Wir behaupten den

Satz 30. Sind $[y]$ und $[\bar{y}]$ Lösungsmatrizen des linearen homogenen Differentialsystems in zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen

$$(30) \qquad (y)'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{r} (y)_\lambda \, (a)_{\lambda\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r),$$

ist $[\bar{y}]$ invertierbar und wird $[\widetilde{y}] = [\bar{y}]^{-1}$ gesetzt, so ist

$$(31) \qquad z_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(c_{00\lambda} \mid y_{\lambda\varkappa}) + \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \sigma_2\Big(\int_{x_0}^{x} \sigma_2 \,(b_{00\lambda} \mid \widetilde{y}_{\lambda\varrho}) \, dx \mid \bar{y}_{\varrho\varkappa}\Big)$$

für jedes System von „Konstanten" $c_{001}, c_{002}, \ldots, c_{00r}$ (d.h. Funktionen von s_1, t_1, s_2, t_2, nicht aber von x) eine Lösung von (29).

Beweis. Multipliziert man die Gleichung (31) mit ε_{00}, so geht sie über in

$$z_{00\varkappa}\, \varepsilon_{00} = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{00\lambda}\, \varepsilon_{00} (y)_{\lambda\varkappa} + \int_{x_0}^{x} b_{00\lambda}\, \varepsilon_{00} \cdot (\widetilde{y})_{\lambda\varrho} \, dx \cdot (\bar{y});$$

hierin sind $c_{00\lambda}\varepsilon_{00}$ und $b_{00\lambda}\varepsilon_{00}$ in K enthalten, wo K das zweiseitige Ideal der kernigen Matrizen bedeutet. Da mit $a_{00}\,\varepsilon_{00}$ auch $\int_{x_0}^{x} a_{00}\varepsilon_{00}\, dx = \int_{x_0}^{x} a_{00}\, dx\, \varepsilon_{00}$ in K enthalten ist, darf man K mit beiden im vorigen § genannten Idealen K_r und K'_r identifizieren. Nach

Satz 25 ist daher das System $z_{001}\varepsilon_{00}, \ldots, z_{00r}\varepsilon_{00}$ eine in K enthaltene Lösung von

$$(z)'_{\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} (z)_{\lambda} (a)_{\lambda\varkappa} + b_{00\varkappa}\varepsilon_{00} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r), \tag{32}$$

d.h. es ist

$$(z_{00\varkappa}\varepsilon_{00})' = \sum_{\lambda=1}^{r} z_{00\lambda}\varepsilon_{00}(a)_{\lambda\varkappa} + b_{00\varkappa}\varepsilon_{00}. \tag{33}$$

Multipliziert man hier aus und vernachlässigt den Faktor ε_{00}, so geht (29) hervor.

Satz 31. Haben $[y]$, $[\bar{y}]$ und $[\tilde{\bar{y}}]$ die im vorigen Satz genannte Bedeutung, und ist auch $[y]$ invertierbar, so ist jede Lösung $z_{001}, \ldots, z_{00r}$ von (29) in der Form (31) darstellbar.

Beweis. Es seien $z_{001}, \ldots, z_{00r}$ eine Lösung von (29); da (29) in der Form (33) geschrieben werden kann, ist $z_{001}\varepsilon_{00}, \ldots, z_{00r}\varepsilon_{00}$ eine in K enthaltene Lösung von (32). Nach Satz 27 ist daher

$$z_{00\varkappa}\varepsilon_{00} = \sum_{\lambda=1}^{r} (c)_{\lambda} (y)_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \int_{x_0}^{x} b_{00\lambda}\varepsilon_{00}(\tilde{\bar{y}})_{\lambda\varrho}\, dx (\bar{y})_{\varrho\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r), \tag{34}$$

worin die $(c)_{\lambda}$ konstant in Bezug auf x und in K enthalten, also von der Form $(c)_{\lambda} = c_{00\lambda}\varepsilon_{00}$ sind. Setzt man für $(c)_{\lambda}$ $c_{00\lambda}\varepsilon_{00}$ in (34) ein, multipliziert aus und beseitigt den Faktor ε_{00}, so geht (31) hervor.

Man beweist leicht den

Satz 32. 1. Die Differenz zweier Lösungen von (29) ist eine Lösung des homogenen Integrodifferentialsystems

$$y'_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(y_{00\lambda} \mid a_{\lambda\varkappa}) \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r). \tag{35}$$

2. Ist $\bar{z}_{001}, \ldots, \bar{z}_{00r}$ irgend eine Partikularlösung von (29), so ist die allgemeinste Lösung von (29) gegeben durch

$$z_{00\varkappa} = \bar{z}_{00\varkappa} + y_{00\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r),$$

worin $y_{001}, \ldots, y_{00r}$ die allgemeinste Lösung von (35) darstellt.

Satz 33. Es gibt eine und nur eine Lösung $z_{001}, \ldots, z_{00r}$ von (29), die für $x = x_0$ in das System der gegebenen „Konstanten" $c_{001}, \ldots, c_{00r}$ übergeht; sie ist durch

$$z_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(c_{00\lambda} \mid y_{\lambda\varkappa}) + \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \sigma_2\left(\int_{x_0}^{x} \sigma_2(b_{00\lambda} \mid \tilde{\bar{y}}_{\lambda\varrho})\, dx \mid \bar{y}_{\varrho\varkappa}\right) \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r) \tag{36}$$

gegeben, worin $[\bar{y}]$ irgend eine invertierbare Lösungsmatrix und $[y]$ die zu x_0 gehörige Hauptlösungsmatrix von (30) ist. $[\widetilde{y}]$ ist hierin, wie im Satz 30, die Inverse von $[\bar{y}]$.

Beweis. Für $x = x_0$ wird aus (36)

$$z_{00\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{r} \sigma_2(c_{00\lambda} \mid y_{\lambda\varkappa});$$

oder auch

$$z_{00}\,\varepsilon_{00} = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{00\lambda}\,\varepsilon_{00}(y)_{\lambda\varkappa}.$$

Da für $x = x_0$

$$(y)_{\lambda\varkappa} = \delta_{\lambda\varkappa}\,\varepsilon_{11}$$

ist, ist in diesem Punkte

$$z_{00\varkappa} = c_{00\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r).$$

(36) ist also eine Lösung von der verlangten Art. Wäre nun $\bar{z}_{001}, \ldots, \bar{z}_{00r}$ eine zweite Lösung von (29) mit denselben Anfangswerten in x_0, so wäre

$$z_{001} - \bar{z}_{001}, \ldots, z_{00r} - \bar{z}_{00r}$$

eine Lösung von (35), die in x_0 identisch in den s und t verschwindet. Nach Satz 23 ist daher

$$z_{00\lambda} - \bar{z}_{00\lambda} \equiv 0 \qquad (1 \leqq \lambda \leqq r),$$

womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

Insbesondere gilt der

Satz 34. (29) besitzt eine, und nur eine Lösung, deren Elemente in x_0 identisch in den s und t verschwindet. Es ist die Lösung

$$z_{00\varkappa} = \sum_{\lambda\varrho=1}^{r} \sigma_2\left(\int_{x_0}^{x} \sigma_2(b_{00\lambda} \mid \widetilde{y}_{\lambda\varrho})\,dx \mid \bar{y}_{\varrho\varkappa}\right) \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq r).$$

(Eingegangen den 15. März 1939.)