COMPOSITIO MATHEMATICA

P. HEBRONI

Über lineare Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendungen auf lineare Integrodifferentialgleichungen. 2. Mitteilung

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 258-284
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__258_0>

Über lineare Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendungen auf lineare Integrodifferentialgleichungen

2. Mitteilung

von

P. Hebroni

Jerusalem

Einleitung.

In dieser Arbeit, welche sich der vorangehenden (erschienen in dieser Zeitschrift **5** (1937), 403—429) anschließt, wird die Untersuchung der Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendung auf lineare Integrodifferentialgleichungen fortgesetzt. §§ 7 und 8 behandeln die inhomogenen linearen Differentialgleichungen im Ring

$$z' = za + b, \qquad z' = az + b \tag{0}$$

und ihre Anwendung auf die ihnen entsprechenden Integrodifferentialgleichungen

$$z'_{00} = \sigma_2(z_{00} \mid a) + b_{00}, \qquad z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) + b_{00}\,; \tag{0'}$$

hierbei bedeuten, wie in der Einleitung der 1. Mitteilung ausgeführt, die Operationen σ_1 und σ_2:

$$\begin{aligned}\sigma_1(a \mid b_{00}) = \int_0^1\!\!\int_0^1 & a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2) d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ & + \int_0^1 a_{01}(s_1, \lambda_1, s_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, s_2, t_2) d\lambda_1 + \\ & + \int_0^1 a_{10}(a_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(s_1, t_1, \lambda_2, t_2) d\lambda_2 + a_{11}(s_1, s_2) b_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2(a_{00} \mid b) = \int_0^1\!\!\int_0^1 & a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2) d\lambda_1 d\lambda_2 + \\ & + \int_0^1 a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, t_2)\, b_{01}(\lambda_1, t_1, t_2) d\lambda_1 + \\ & + \int_0^1 a_{00}(s_1, t_1, s_2, \lambda_2)\, b_{10}(t_1, \lambda_2, t_2) d\lambda_2 + a_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2) b_{11}(t_1, t_2)\,.\end{aligned}$$

Die in (0′) auftretenden Funktionen sind außer von s_1, t_1, s_2, t_2, λ_1, λ_2 noch von x abhängig. x ist in einem endlichen, abgeschlossenen und einfach zusammenhängenden Bereich B variabel. Der Bereich B kann reell (eine Strecke) oder auch ein Teil der komplexen Ebene sein. Die genannten Funktionen sind in $s_1, t_1, s_2, t_2, \lambda_1, \lambda_2$ stetig, in x aber differenzierbar resp. regulär.

Wir zeigen nun, wie die Auflösung der Gl. (0) mit Hilfe von Fundamentallösungen der homogenen Gleichungen

$$u' = u \cdot a \quad \text{resp.} \quad u' = au, \tag{1}$$

die der Gl. (0′) mit Hilfe von Fundamentallösungen der Matrizendifferentialgleichungen

$$(u)' = (u)(a), \qquad (u)' = (a)(u) \tag{2}$$

zu vollziehen ist.

Die §§ 9—15 behandeln die zweiseitige Differentialgleichung im Ring

$$z' = az + zb, \tag{3}$$

die zu sich selbst adjungierte zweiseitige Differentialgleichung

$$z = az - za, \tag{4}$$

die zu (3) adjungierte Gleichung

$$w' = -bw - wa \tag{5}$$

und die ihnen entsprechenden zweiseitigen Integrodifferentialgleichungen

$$z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) + \sigma_2(z_{00} \mid b), \tag{3′}$$

$$z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) - \sigma_2(z_{00} \mid a), \tag{4′}$$

$$w'_{00} = -\sigma_1(b \mid w_{00}) - \sigma_2(w_{00} \mid a). \tag{5′}$$

Von dem in §§ 9—12 abgeleiteten, die Gleichungen (3), (4) und (5) betreffenden Resultate seien hervorgehoben:

1. Die Auflösung von (3) wird vollkommen zurückgeführt auf die Auflösung beider einseitigen Differentialgleichungen (1_1) und (1_2).

2. Zu jeder gegebenen Konstanten c in R besitzt (3) eine und nur eine Lösung, deren Anfangswert c ist. (Nach Satz 14′ in Mitteilung 1 ist jede differenzierbare Größe a in R in der Form $a = b + c$ darstellbar, wo b ein Integral und c konstant ist. c nennen wir den „Anfangswert" von a).

2*. Die Lösungen von (3) sind dann und nur dann invertierbar, wenn ihr Anfangswert es ist. Die Inverse einer Lösung von (3) ist eine Lösung der zu (3) adjungierten Gleichung (5).

3. Die Lösungen von (4) bilden einen Ring, der zum Ring aller Konstanten in R isomorph ist.

4. Jede Lösung von (4), deren Anfangswert mit a vertauschbar ist, ist eine Konstante.

5. Sind $z_1, z_2, \ldots, z_n$ Lösungen von (3) mit den resp. Anfangswerten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und $w_1, w_2, \ldots, w_n$ Lösungen von (5) mit den resp. Anfangswerten $k_1, k_2, \ldots, k_n$, und ist das Produkt

$$c_1 \cdot k_1 \cdot c_2 \cdot k_2 \cdots c_n \cdot k_n$$

mit a vertauschbar, so ist

$$z_1 \cdot w_1 \cdot z_2 \cdot w_2 \cdots z_n \cdot w_n = c_1 \cdot k_1 \cdot c_2 \cdot k_2 \cdots c_n \cdot k_n .$$

Daran anschließend werden in den §§ 13, 14 und 15 die entsprechenden Resultante für die Gleichungen (3′), (4′) und (5′) abgeleitet u.z. wird u.a. gezeigt:

1′. Die Auflösung von (3′) kann auf diejenige der beiden Gleichungen (2) zurückgeführt werden.

2′. Zu jeder Funktion $c_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)$, die von x nicht abhängt, und zu jedem gegebenen Punkte x_0 von B besitzt (3′) eine und nur eine Lösung, die für $x = x_0$ in c_{00} übergeht.

3′. Die Lösungen von (4′) bilden einen Ring, der zum Ring aller „Konstanten", d.h. Funktionen, die von s_1, t_1, s_2, t_2, nicht aber von x abhängen, isomorph ist. Dabei bedeutet die Multiplikation zweier Elemente a_{00} und b_{00} in diesem Ring die Komposition

$$(a_{00}, b_{00}) = \int_0^1 \int_0^1 a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2 .$$

4′. Jede Lösung z_{00} von (4′), die in einem Punkte x_0 von B einen Wert $c_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)$ annimmt, so daß überall in B die Gleichung

$$\sigma_1(a \mid c_{00}) = \sigma_2(c_{00} \mid a)$$

besteht, ist von x unabhängig.

5′. Wir führen folgende Bezeichnung ein: wegen

$$\big((a_{00}, b_{00}), c_{00}\big) = \big(a_{00}, (b_{00}, c_{00})\big)$$

darf man unter Weglassen der inneren Klammer statt dieser Ausdrücke schreiben (a_{00}, b_{00}, c_{00}); und diese Schreibeweise möge auf beliebig viele „Faktoren"

$$(a_{00}, b_{00}, c_{00}, \cdots, k_{00})$$

übertragen werden.

Nun läßt sich das 5 entsprechende Resultat folgendermaßen aussprechen: sind für irgendein n $z_{001}, z_{002}, \ldots, z_{00n}$ Lösungen von (3′), die in x_0 resp. die Werte $c_{001}, c_{002}, \ldots, c_{00n}$ annehmen, und sind $w_{001}, w_{002}, \ldots, w_{00n}$ Lösungen von (5′), die in x_0 resp. die Werte $k_{001}, k_{002}, \ldots, k_{00n}$ annehmen, und ist, wenn

$$(c_{001}, k_{001}, c_{002}, k_{002}, \ldots, c_{00n}, k_{00n}) = u_{00}$$

gesetzt wird,

$$\sigma_1(a \mid u_{00}) = \sigma_2(u_{00} \mid a),$$

so ist

$$(z_{001}, w_{001}, z_{002}, w_{002}, \ldots, z_{00n}, w_{00n})$$

von x unabhängig.

Das 2* analoge Resultat betrifft nicht die Integrodifferentialgleichung (3′), sondern die Matrizendifferentialgleichung

$$(z)' = (a)(z) + (z)(b)$$

und soll erst in § 13 näher besprochen werden.

Die §§ 16 und 17 behandeln die zweiseitige inhomogene Differentialgleichung im Ring R

$$z' = az + zb + c \tag{6}$$

und die ihr entsprechende inhomogene zweiseitige Integrodifferentialgleichung

$$z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) + \sigma_2(z_{00} \mid b) + c_{00} \tag{6′}$$

und führen die Auflösung von (6) auf die Auflösung beider Gleichungen (1_1) und (1_2) und ebenso die Auflösungen von (6′) auf diejenige von (2_1) und (2_2) zurück. Von den Resultaten über diese Gleichungen sei hier nur erwähnt, daß sie bei gegebenen Anfangswerten für die Lösungen eindeutig lösbar sind.

§ 7.

Die lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung in $R: z' = za + b$.

Es sei die lineare, inhomogene Differentialgleichung

$$z' = za + b \tag{38}$$

vorgelegt. Für sie gilt der

Satz 39'. Ist y irgendeine Fundamentallösung von

$$(8) \qquad y' = ya,$$

so ist

$$(38') \qquad \bar{z} = \left(\int (by^{-1})\right) y$$

eine Lösung von (38).

Beweis. Es ist

$$\bar{z}' = \left(\int (by^{-1})\right) y' + by^{-1}y = \left(\int (by^{-1})\right) ya + b = \bar{z}a + b.$$

Satz 40. Ist y_1 irgendeine weitere Lösung von (8) und ist c irgendeine Konstante, so ist

$$z = cy_1 + \bar{z} = cy_1 + \left(\int (by^{-1})\right) y$$

eine Lösung von (38).

Beweis. Es ist

$$z' = cy_1' + \bar{z}' = cy_1 a + \bar{z}a + b = (cy_1 + \bar{z})\, a + b = za + b.$$

Satz 41. Die Differenz zweier Lösungen von (38) ist eine Lösung von (8).

Satz 42. Sind y_1 und y_2 invertierbare Lösungen von (8), so ist jede Lösung z von (38) in der Form

$$(39) \qquad z = cy_1 + \left(\int (by_2^{-1})\right) y_2$$

darstellbar.

Beweis. Wegen Satz 39' ist

$$(39') \qquad y_3 = z - \left(\int (by_2^{-1})\right) y_2$$

eine Differenz zweier Lösungen von (38). Nach Satz 41 ist daher y_3 eine Lösung von (8). Also ist nach Satz 23

$$(40) \qquad y_3 = cy_1,$$

wo c konstant ist. Aus (39') und (40) folgt (39).

Satz 43. Es gibt eine und nur eine Lösung von (38) mit dem gegebenen Anfangswert c. Sie ist durch

$$(41) \qquad z = c\bar{y} + \left(\int (by^{-1})\right) y$$

gegeben, wo y irgendeine Fundamentallösung und $\bar{y}$ die Hauptlösung von (8) ist.

Beweis. 1. (41) ist eine Lösung mit der verlangten Eigenschaft. Denn in (41) rechts ist das zweite Glied ein Integral; also ist der Anfangswert von z gleich dem Anfengswert von $c\bar{y}$.

Da $\bar{y}$ den Anfangswert 1 hat, hat z den Anfangswert c.

2. Es gibt nur eine solche Lösung. Denn gäbe es zwei solche Lösungen von (38), z_1 und z_2, so wäre $z_1 - z_2$ eine Lösung von (8) mit dem Anfangswert 0. Nach Satz 27 muß $z_1 - z_2 = 0$ sein, w.z.b.w.

Insbesondere gilt der

SATZ 44. Es gibt eine und nur eine Lösung von (38), die ein Integral ist. Sie ist durch (38′) gegeben.

Es seien K_r und K'_r rechtsseitige Ideale von R mit folgender Eigenschaft: Ist a enthalten in K'_r, so ist $\int a$ enthalten in K_r. Wir behaupten den

SATZ 45. In der inhomogenen Differentialgleichung

$$z' = za + b \tag{38}$$

sei b in K'_r gelegen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dann die Lösung z von (38) in K_r liegt, besteht darin, daß in der nach Satz 42 bestehenden Darstellung für z

$$z = cy_1 + \left(\int (by_2^{-1})\right) y_2 \tag{42}$$

c in K_r liegt.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, denn da b in K'_r und c in K_r liegt, ist wegen (42) z in K_r gelegen. Die Bedingung ist notwendig. Denn da b in K'_r und z in K_r liegt, ist wegen (42) cy_1 in K_r gelegen, und da y_1 invertierbar ist, liegt auch c in K_r.

SATZ 46. In der inhomogenen Differentialgleichung (38) sei b in K'_r gelegen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dann die Lösung z von (38) in K_r liegt, besteht darin, daß der Anfangswert von z in K_r liegt.

Beweis. Stellt man z nach Satz 42 in der Form (41) dar, wo $\bar{y}$ die Hauptlösung von (8) ist, so ist einerseits nach Satz 43 c der Anfangswert von z. Andererseits liegt z nach Satz 45 dann und nur dann in K_r, wenn c es tut.

Aus Satz 43 und Satz 46 folgt der

SATZ 46′. Liegt b in K'_r und ist c eine in K_r gelegene Konstante, so besitzt (38) eine und nur eine in K_r gelegene Lösung, deren Anfangswert c ist. Sie ist durch (41) gegeben, falls darin $\bar{y}$ die Hauptlösung von (8) bedeutet.

Insbesondere gilt:

SATZ 46″. Liegt b in K'_r, so besitzt (48) eine und nur eine in K_r gelegene Lösung, die ein Integral ist. Sie ist durch (38′) gegeben.

Bemerkung. Duale Sätze gelten für die zu (38) duale Gleichung

$$z' = az + b\,.$$

§ 8.

Anwendungen auf die inhomogenen Integrodifferentialgleichungen
$$z'_{00} = \sigma_2(z_{00} \mid a) + b_{00}, \qquad z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) + b_{00}.$$

Es sei die inhomogene Integrodifferentialgleichung

$$z'_{00} = \sigma_2(z_{00} \mid a) + b_{00} \tag{43}$$

vorgelegt. Wir behaupten den

Satz 48. Sind $(y)_1$ und $(y)_2$ Lösungen der Matrizendifferentialgleichung

$$(y)' = (y)(a), \tag{43'}$$

ist $(y)_2$ invertierbar, wird $(\bar{y})_2 = (y)_2^{-1}$ gesetzt, und ist c_{00} irgendeine Funktion von s_1, t_1, s_2, t_2, nicht aber von x, so ist

$$z_{00} = \sigma_2(c_{00} \mid y_1) + \sigma_2\left(\int\limits_{x_0}^{x} \sigma_2(b_{00} \mid \bar{y}_2)\, dx \mid y_2\right) \tag{44}$$

eine Lösung von (43).

Beweis. Multipliziert man (44) mit ε_{00}, so geht es über in

$$z_{00}\,\varepsilon_{00} = c_{00}\,\varepsilon_{00}(y)_1 + \int\limits_{x_0}^{x} b_{00}\,\varepsilon_{00}(y)_2^{-1} dx (y)_2. \tag{45}$$

Nach Satz 40 ist daher $z_{00}\,\varepsilon_{00}$ eine Lösung von

$$(z_{00}\,\varepsilon_{00})' = z_{00}\,\varepsilon_{00}(a) + b_{00}\,\varepsilon_{00}. \tag{46}$$

Multipliziert man hier aus und unterdrückt den Faktor ε_{00}, so kommt (43).

Satz 49. Haben $(y)_1$ und $(\bar{y})_2$ die im vorigen Satz genannte Bedeutung und ist auch $(y)_1$ invertierbar, so ist jede Lösung von (43) in der Form (44) darstellbar.

Beweis. Es sei $\bar{z}_{00}$ eine Lösung von (43). Multipliziert man (43) mit ε_{00}, so läßt sie sich in der Form (46) schreiben. $(\bar{z}) = \bar{z}_{00}\varepsilon_{00}$ ist also eine Lösung von

$$(z)' = (z)(a) + b_{00}\,\varepsilon_{00}. \tag{47}$$

$\bar{z}_{00}\,\varepsilon_{00}$ ist auch in K gelegen. K bedeutet hierbei (siehe § 6 in der I. Mitteilung) die Gesamtheit aller Größen von R, die die Form $a_{00}\,\varepsilon_{00}$ besitzen. Sie bildet ein zweiseitiges Ideal in R, und mit $a_{00}\,\varepsilon_{00}$ ist auch $\int\limits_{x_0}^{x} a_{00}\,\varepsilon_{00} dx = \int\limits_{x_0}^{x} a_{00}\, dx \varepsilon_{00}$ in K gelegen. K läßt sich also mit den im Satz 45 genannten Idealen K_r und K'_r, die in diesem Falle zusammenfallen, identifizieren. Tut man dies, beachtet man, daß auch $b_{00}\varepsilon_{00}$ in K liegt, und wendet Satz 45 auf

(47) an, so erkennt man, daß die in K gelegene Lösung $\bar{z}_{00}\varepsilon_{00}$ von (47) in der Form darstellbar ist

$$\bar{z}_{00}\,\varepsilon_{00} = (c)(y)_1 + \int_{x_0}^{x} b_{00}\,\varepsilon_{00}(\bar{y})_2^{-1} dx (y)_2 ,$$

worin (c) in K gelegen, also von der Form $c_{00}\varepsilon_{00}$ ist. $\bar{z}_{00}\varepsilon_{00}$ ist also in der Form (45) und $\bar{z}_{00}$ in der Form (44) darstellbar, w.z.b.w.

Man beweist leicht den

Satz 50. 1. Die Differenz zweier Lösung von (43) ist eine Lösung von

$$y'_{00} = \sigma_2(y_{00} \mid a) . \tag{48}$$

2. Ist $\bar{z}_{00}$ irgendeine Partikularlösung von (43), so ist die allgemeinste Lösung von (43) gegeben durch

$$z_{00} = \bar{z}_{00} + y_{00} ,$$

wo y_{00} die allgemeinste Lösung von (48) ist.

Satz 51. Es gibt eine und nur eine Lösung von (43), die für $x = x_0$ den gegebenen Wert c_{00} annimmt.

Beweis. Es sei z_{00} eine Lösung von (43), die für $x = x_0$ den Wert c_{00} annimmt. Dann befriedigt z_{00} auch (46), und $(z) = z_{00}\varepsilon_{00}$ ist eine Lösung von (47) mit dem in K gelegenen Anfangswert $c_{00}\varepsilon_{00}$. Ist umgekehrt (z) eine Lösung von (47) mit dem in K gelegenen Anfangswert $c_{00}\varepsilon_{00}$, so ist nach Satz 46 (z) in K gelegen, d.h. es ist $(z) = z_{00}\varepsilon_{00}$. z_{00} befriedigt dann (46) und auch die mit ihr äquivalente Gleichung (43) und hat den Anfangswert c_{00}. Da (47) nach Satz 43 eine und nur eine Lösung mit dem Anfangswert $c_{00}\varepsilon_{00}$ besitzt, so hat auch (43) eine und nur eine Lösung mit dem Anfangswert c_{00}, w.z.b.w.

Insbesondere gilt

Satz 52. Die Gleichung (43) besitzt eine und nur eine Lösung, die für $x = x_0$ identisch in s_1, t_1, s_2, t_2 verschwindet. Sie ist durch $z_{00} = \sigma_2\left(\int_{x_0}^{x} \sigma_2(b_{00} \mid \bar{y})\, dx \mid y_2\right)$ gegeben, wo $(y)_2$ irgendeine invertierbare Lösung von (43′) und $(\bar{y}) = (y)_2^{-1}$ ist.

§ 9.

Die zweiseitige lineare homogene Differentialgleichung in R
$z' = az + zb$.

Es sei die Gleichung

$$z' = az + zb \tag{49}$$

vorgelegt. Für sie gilt der

SATZ 53. Sind u und v irgendwelche Lösungen der einseitigen Differentialgleichungen

$$u' = au, \qquad v' = vb \tag{50}$$

und ist k irgendeine Konstante, so ist

$$z = ukv \tag{51}$$

eine Lösung von (49).

Beweis. Es ist wegen (50)

$$z' = (ukv)' = u'kv + ukv' = aukv + ukvb = az + zb\,.$$

SATZ 54. Sind u und v Fundamentallösungen von (50), so ist jede Lösung z von (49) in der Form (51) darstellbar.

Beweis. Es seien u und v Fundamentallösungen von (50). Es sei z irgendeine Lösung von (49). Wir setzen

$$y = u^{-1}z\,.$$

Dann ist $z = uy$ und wegen (50_1) ist

$$a = u'u^{-1}\,,$$

also ist

$$u'y + uy' = (uy)' = z' = az + zb = u' \cdot u^{-1}uy + uyb = u' \cdot y + uyb.$$

Somit ist

$$uy' = uyb\,.$$

Multipliziert man hier linksseitig mit u^{-1}, so kommt

$$y' = yb\,;$$

y ist also eine Lösung von (50_2). Da v eine Fundamentallösung von (50_2) ist, ist für eine gewisse Konstante k

$$y = kv\,.$$

Also ist

$$z = uy = ukv\,,$$

w.z.b.w.

SATZ 55. Ist z eine Lösung von (49), so ist sie dann und nur dann invertierbar, wenn in der Darstellung (51), wo u und v Fundamentallösungen von (50) sind, k invertierbar ist.

Beweis. Ist k invertierbar, so ist wegen $z = ukv$, und weil u und v invertierbar sind, auch z invertierbar. Ist z invertierbar, so ist wegen $k = u^{-1}zv^{-1}$, und weil u^{-1} und v^{-1} invertierbar sind, auch k invertierbar.

Offenbar bleibt der Satz gültig, wenn in ihm die Invertierbarkeit durch rechtsseitige resp. linksseitige Invertierbarkeit ersetzt wird.

Satz 56. Ist z eine Lösung von (49), sind u und v Hauptlösungen von (50) und wird z in der Form (51) dargestellt, so ist der Anfangswert von z gleich k.

Beweis. Die Anfangswerte von u und v sind, da sie Hauptlösungen sind, beide $= 1$. D.h. es ist für gewisse $\overset{\frown}{u}$ und $\overset{\frown}{v}$

$$u = 1 + \int \overset{\frown}{u}, \qquad v = 1 + \int \overset{\frown}{v}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (51) ein, so erkennt man die Richtigkeit des Satzes.

Satz 57. Ist z eine Lösung von (49), so ist z dann und nur dann invertierbar, wenn ihr Anfangswert k invertierbar ist.

Beweis folgt aus Satz 55 und Satz 56.

Offenbar darf auch im Satz 57 die Invertierbarkeit durch rechtseitige resp. linksseitige Invertierbarkeit ersetzt werden.

Aus Satz 56 folgt leicht der

Satz 58. Zu jeder gegebenen Konstanten k gibt es eine und nur eine Lösung von (49), deren Anfangswert k ist, sie ist durch

$$z = ukv$$

gegeben, wo u und v Hauptlösungen von (50) sind.

Insbesondere:

Satz 59. Es gibt nur eine Lösung von (49), die ein Integral ist, die triviale Lösung $z = 0$.

Satz 59′. Ist U ein Unterring von R_d, der aus lauter Lösungen von (49) besteht, so bilden die Anfangswerte der Elemente von U einen Unterring U_c, der zu U isomorph ist, wenn man jedem Elemente von U seinen Anfangswert entsprechen läßt.

Beweis. Es sei U ein Unterring von R_d, der aus lauter Lösungen von (49) besteht. Es sei U_c die Gesamtheit der Anfangswerte der Elemente von U, und man lasse jedem Elemente von U seinen Anfangswert in U_c entsprechen, dann ist diese Abbildung wegen Satz 58 eine eindeutige. Es seien c_1 und c_2 zwei Elemente von U_c diesen mögen in U z_1 und z_2 entsprechen, so daß c_1 und c_2 die Anfangswerte von z_1 und z_2 sind. Die Anfangswerte von $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ und $z_1 \cdot z_2$ sind, wie man leicht sieht, resp. $c_1 + c_2$, $c_1 - c_2$ und $c_1 \cdot c_2$. Diese sind also in U_c enthalten und entsprechen jenen in U, womit der Satz bewiesen ist.

Daß unter Umständen für (49) ein Ring U aus lauter Lösungen existiert, der vom trivialen Ring $z = 0$ verschieden ist, werden wir im § 10 sehen.

Satz 59′. Ist $\overset{\frown}{z}$ eine Partikularlösung von (49), ist v eine Fundamentallösung von (50_2) und ist c irgendeine Konstante, so ist

$$z = \overset{\frown}{z} v^{-1} c v \tag{52}$$

eine Lösung von (49).

Beweis. Es sei

$$\overset{\frown}{z} = ukv\,.$$

Dann ist

$$z = \overset{\frown}{z} v^{-1} c v = ukvv^{-1}cv = ukcv\,.$$

Mit c und k ist natürlich auch ck eine Konstante. Nach Satz 53 ist also z eine Lösung von (49), w.z.b.w.

Die folgenden Sätze 59″, 60, 60′ und 68 stützen sich auf die Voraussetzung, daß in R das Axiom gilt

(V_5). Die Inverse einer invertierbaren Konstanten ist differenzierbar.

Bemerkung. Auf die Bedeutung solcher Konstanten c resp. solcher Ringe R, in welchen alle Konstanten (V_5) genügen, gedenke ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen.

V_5 ermöglicht den Beweis von folgendem

Hilfssatz. Ist a konstant und invertierbar, so ist a^{-1} konstant.

Beweis. Es sei $a^{-1} = b$ gesetzt. Dann ist $a' = 0$, $ab = 1$, $ba = 1$, also ist wegen (V_5)

$$a'b + ab' = 0\,,$$
$$ab' = 0\,,$$
$$(a^{-1})' = b' = bab' = b \cdot 0 = 0\,,$$

w.z.b.w.

Satz 59″. Ist in (52) $\overset{\frown}{z}$ eine invertierbare Lösung von (49) und ist v eine Fundamentallösung von (50_2), so ist jede Lösung z von (49) für eine geeignete Konstante c in der Form (52) darstellbar.

Beweis. Es sei $z = ukv$, $\overset{\frown}{z} = u\overset{\frown}{k}v$. Da $\overset{\frown}{z}$ invertierbar ist, ist es nach Satz 55 $\overset{\frown}{k}$ auch. Also ist

$$z = ukv = u\overset{\frown}{k}vv^{-1}\overset{\frown}{k}^{-1}kv = \overset{\frown}{z}v^{-1}\overset{\frown}{k}^{-1}kv\,.$$

Mit $\overset{\frown}{k}$ ist nach dem vorigen Hilfssatz auch $\overset{\frown}{k}^{-1}$, also ist auch $\overset{\frown}{k}^{-1}k$ konstant. z ist also wirklich von der Form (52), womit der Satz bewiesen ist.

Man beweist auch leicht den

Satz 60. Ist in (52) die Partikularlösung $\overset{\frown}{z}$ von (49) invertierbar, so gibt es zu jeder Lösung z von (49) nur eine Konstante c, für die (52) gilt.

Es gilt natürlich der zu den drei letzten Sätzen duale

SATZ 60′. 1. Ist $\overset{\frown}{z}$ irgendeine Partikularlösung von (49), ist u irgendeine invertierbare Lösung von (50_1), und ist c irgendeine Konstante, so ist

$$z = ucu^{-1}\overset{\frown}{z} \tag{52'}$$

eine Lösung von (49).

2. Ist in (52′) $\overset{\frown}{z}$ eine invertierbare Lösung von (49), so gibt es zu jeder Lösung z von (49) eine und nur eine Konstante c, so daß für z die Darstellung (52′) besteht.

§ 10.

Die zu sich selbst adjungierte Differentialgleichung in R.

$$z' = az - za.$$

SATZ 60″. Die Lösungen der selbstadjungierten Differentialgleichung

$$z' = az - za \tag{53}$$

bilden einen Unterring U von R_d, der zum Unterring aller Konstanten c von R_d isomorph ist, wenn man jeder Lösung von (53) ihren Anfangswert entsprechen läßt.

Beweis. Die Gesamtheit U aller Lösungen von (53) bildet einen Unterring. Denn sind z_1 und z_2 Lösungen von (53), so ist es $z_1 \pm z_2$ auch. Aber auch $z_1 \cdot z_2$ ist eine Lösung. Denn es ist

$$(z_1 \cdot z_2)' = z_1' \cdot z_2 + z_1 z_2' =$$
$$= (az_1 - z_1 \cdot a\,) z_2 + z_1(az_2 - z_2 a) = az_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot z_2 a\,.$$

Bildet man die Gesamtheit C aller Anfangswerte der Elemente von U und läßt jedem Element in U seinen Anfangswert in C entsprechen, so ist nach Satz 59′ C ein Ring und dieses Entsprechen ist ein Isomorphismus. Daß C alle Konstanten enthält, ist klar, da zu jeder Konstanten als Anfangswert nach Satz 58(53) eine Lösung besitzt.

Bemerkung. Bei dem im Satze genannten Isomorphismus werden alle konstanten Lösungen von (53) auf sich selbst abgebildet, da der Anfangswert einer Konstanten sie selbst ist. Offenbar gilt der

SATZ 61. Von den drei Eigenschaften, die einem Elemente von R zukommen können, Konstanz, Vertauschbarkeit mit a und Lösungsein von (53), ist jede eine Folge der beiden anderen.

SATZ 63. Jede Lösung von (53), deren Anfangswert mit a vertauschbar ist, ist eine Konstante.

Beweis. Es sei z eine Lösung von (53). Wird $z = c + u$ gesetzt, wo c konstant und u eine Integral ist, so ist nach Voraussetzung $ac = ca$. Setzt man in (53) $c + u$ für z ein, so kommt wegen der letzten Gleichung

$$u' = (c+u)' = z' = az - za =$$
$$= a(c+u) - (c+u)\,a = ac - ca + au - ua = au - ua;$$

u ist also eine Lösung von (53). Da u ein Integral ist, ist nach Satz 59 $u = 0$; also ist $z = c$, w.z.b.w.

Satz 63'. Die allgemeinste Lösung der Gleichung

$$w' = aw - wa \tag{57'}$$

ist

$$w = ucu^{-1}\,, \tag{57''}$$

worin u eine Fundamentallösung von

$$u' = au$$

ist.

Beweis. Nach Satz 54 ist die allgemeinste Lösung von (57')

$$w = ucv\,,$$

worin u und v irgendwelche Fundamentallösungen von

$$u' = au, \qquad v' = -va \tag{58}$$

sind. Nach Satz 21 der 1. Mitteilung ist $v = u^{-1}$ eine Fundamentallösung von (58_2), womit der Satz bewiesen ist.

Satz 63''. Sind $\overset{\frown}{z}$ und w irgendwelche Lösungen von

$$z = az + zb\,, \tag{49}$$

resp. von (57'), so ist

$$z = w\overset{\frown}{z} \tag{58'}$$

eine Lösung von (49).

Beweis. Nach Satz 63' besteht für eine gewisse Konstante c die Gleichung (57''). Hieraus und aus Satz 60', 1, folgt unser Satz.

Satz 63'''. Ist $\overset{\frown}{z}$ eine invertierbare Lösung von (49), und bedeutet w die allgemeinste Lösung von (57'), so stellt (58') die allgemeinste Lösung von (49) dar.

Beweis. Der Satz folgt aus Satz 63' und Satz 60', 2.

§ 11.

Die zweiseitige Differentialgleichung $z' = az + zb$ und ihre Adjungierte $w' = -bw - wa$.

Es sei die Gleichung

$$z' = az + zb \tag{59}$$

vorgelegt. Wir betrachten die zu ihr adjungierte Gleichung

$$w' = -bw - wa \tag{60}$$

und behaupten den

SATZ 64. Sind z und w Lösungen von (59) und (60), so ist zw eine Lösung der selbstadjungierten Gleichung

$$\sigma' = a\sigma - \sigma a. \tag{61}$$

Beweis. Es ist

$$(zw)' = z'w + zw' = (az+zb)w - z(bw+wa) = azw - zwa\,.$$

SATZ 65. Sind

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

n Lösungen von (59) mit den Anfangswerten $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sind $w_1, w_2, \ldots, w_n$ n Lösungen von (60) mit den Anfangswerten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ und ist

$$c_1 \cdot k_1 \cdot c_2 \cdot k_2 \cdots c_n \cdot k_n$$

mit a vertauschbar, so ist

$$z_1 \cdot w_1 \cdot z_2 \cdot w_2 \cdots z_n w_n = c_1 \cdot k_1 \cdot c_2 \cdot k_2 \cdots c_n \cdot k_n\,.$$

Beweis. Wir setzen

$$z_i w_i = \sigma_i, \qquad 1 \leqq i \leqq n\,,$$

$$z_1 w_1 z_2 w_2 \cdots z_n w_n = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots \sigma_n = \sigma\,.$$

Nach Satz 64 ist σ_i eine Lösung von (61) also ist nach Satz 60″ auch σ eine Lösung von (61). Der Anfangswert von σ_i ist $c_i k_i$, also derjenige von σ gleich $c_i \cdot k_i \cdots c_n \cdot k_n$. Dieser Anfangswert ist mit a vertauschbar. Also ist nach Satz 63 σ eine Konstante. Als Konstante ist sie mit ihrem Anfangswert, also mit $c_1 \cdot k_1 \cdots c_n \cdot k_n$ identisch, w.z.b.w.

Insbesondere erhält man aus Satz 65 für $n = 1$ den

SATZ 66. Sind z und w Lösungen von (59) und (60) mit den Anfangswerten c resp. k und ist ck mit a vertauschbar, so ist $zw = ck$.

Ferner gilt der

SATZ 68. Ist z eine Lösung von (59) mit invertierbarem Anfangswert c, so ist z selber invertierbar. z ist diejenige Lösung der zu (59) adjungierten Gleichung (60), deren Anfangswert c^{-1} ist.

Bemerkung: Der erste Teil dieses Satzes ist im Satz 57 enthalten.

Beweis. Es sei z eine Lösung von (59) mit invertierbarem Anfangswert c. Es sei k die Inverse von c. Es sei w diejenige Lösung von (60), deren Anfangswert k ist. Da $ck = 1$, ist ck mit a vertauschbar. Nach dem vorigen Satz ist daher $zw = ck = 1$, Ähnlich beweist man, daß $wz = 1$, w.z.b.w.

§ 12.

Spezielle Lösungen der Gleichung $z' = az + zb$ und der zu sich selbst adjungierten Gleichung $z' = az - za$.

Es sei in R die Gleichung

$$z' = az + zb \tag{49}$$

vorgelegt. Es sei K ein *zweiseitiges Ideal* in R. Dann folgt aus Satz 53 leicht der

Satz 68′. Sind u und v irgendwelche Lösungen von (50_1) und (50_2), ist c eine Konstante und ist mindestens eine dieser Größen in K enthalten, so ist

$$z = ucv$$

eine in K gelegene Lösung von (49).

Ferner gilt der

Satz 69. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösung z von (49) in K liegt, besteht darin, daß in der Darstellung

$$z = ukv\,, \tag{62}$$

wo u und v Fundamentallösungen von (50) sind, k in K liegt.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, da mit k auch z in K liegt. Die Bedingung ist notwendig, da mit z auch $k = u^{-1}zv^{-1}$ in K liegt.

Nimmt man in (62) für u und v die Hauptlösungen von (50) und beachtet man, daß dann nach Satz 56 k in (62) den Anfangswert von z bedeutet, so kann man Satz 69 auch so aussprechen:

Satz 70. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösung z von (49) in K liegt, besteht darin, daß ihr Anfangswert in K liegt.

Mit Rücksicht auf Satz 56 kann man auch sagen:

Satz 71. Zu jeder gegebenen in K gelegenen Konstanten k

gibt es eine und nur eine in K gelegene Lösung z von (49), deren Anfangswert k ist. Sie ist durch

$$z = \bar{u} k \bar{v}$$

gegeben, wo $\bar{u}$ und $\bar{v}$ die Hauptlösungen von (50) bedeuten.

Man beweist mit Hilfe der Sätze 60, 61 und 62 den

Satz 72. 1. Ist $\overset{\frown}{z}$ eine in K enthaltene Partikularlösung von (49), ist v eine invertierbare Lösung von (50_2) und ist c irgendeine Konstante, so ist

$$z = \overset{\frown}{z} v^{-1} c v \tag{63}$$

eine in K enthaltene Lösung von (49).

2. Ist $\overset{\frown}{z}$ irgendeine Partikularlösung von (49), ist v eine invertierbare Lösung von (50_2) und ist c irgendeine in K enthaltene Konstante so ist (63) eine in K enthaltene Lösung von (49).

3. Ist $\overset{\frown}{z}$ eine invertierbare Partikularlösung von (49) und ist v eine invertierbare Lösung von (50_2), so ist jede in K enthaltene Lösung von (49) in der Form (63) darstellbar, worin c in K enthalten ist. c ist in dieser Darstellung eindeutig.

Natürlich gilt ein zu diesem Satz dualer Satz, der eine Darstellung der Lösungen von (49) in der Form

$$z = u c u^{-1} \overset{\frown}{z}$$

betrifft.

Satz 73. Die Gesamtheit U_K der in K enthaltenen Lösungen von

$$z = az - za \tag{53}$$

bildet einen Unterring U_K von K. Er ist isomorph zum Unterringe C_K der in K enthaltenen Konstanten, wenn man jeder in K enthaltenen Lösung von (53) ihren Anfangswert entsprechen läßt.

Beweis. U_K sei der Durchschnitt von K und U, wo U den Unterring *aller* Lösungen von (53) bezeichnet. Daher ist U_K ein Unterring von K. Nach Satz 70 ist jedes Element in C_K der Anfangswert eines Elementes in U_K, und umgekehrt hat jedes Element in U_K einen Anfangswert, der in C_K liegt. Daher ergibt sich der Isomorphismus von U_K zu C_K aus dem allgemeineren Isomorphismus von U zum Ring C aller Konstanten in R, w.z.b.w.

Natürlich ergibt Satz 63 als Spezialfall den

Satz 74. Jede in K enthaltene Lösung von (53), deren Anfangswert mit a vertauschbar ist, ist eine Konstante.

Ebenso leicht ergibt sich aus Satz 63''

Satz 74'. Sind $\overset{\frown}{z}$ und w irgendwelche Lösungen von (49) und (53) und ist mindestens eine von ihnen in K gelegen, so ist

$$z = w\overset{\frown}{z} \tag{54}$$

eine in K gelegene Lösung von (49).

Wir beweisen noch den

Satz 74''. Ist $\overset{\frown}{z}$ eine invertierbare Lösung von (49) und ist w die allgemeinste in K gelegene Lösung der Gleichung (53), so ist (54) die allgemeinste in K gelegen Lösung von (49).

Beweis. Nach Satz 63''' stellt (54) die allgemeinste Lösung von (49) dar, falls w wie allgemeinste Lösung von (53) darstellt. Damit z in K gelegen ist, ist offenbar, da $\overset{\frown}{z}$ invertierbar ist, notwendig und hinreichend, daß w in K liegt, womit der Satz bewiesen ist.

§ 13.

Die zweiseitige Differentialgleichung

$$(z)' = (a)(z) + (z)(b)$$

im Ringe der zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen und die zweiseitige Integrodifferentialgleichung

$$z'_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2; x) = \sigma_1(a \mid z_{00}) + \sigma_2(z_{00} \mid b).$$

Es sei die Matrizendifferentialgleichung

$$(z)' = (a)(z) + (z)(b) \tag{54}$$

vorgelegt. Für sie gelten die in § 9 entwickelten Sätze, die wir hier nicht zu rekapitulieren brauchen. Hingegen wollen wir die Sätze, die in § 12 aufgestellt wurden für unseren Fall, wo R den Ring der zweigliedrigen kontinuisierten Matrizen und K das zweiseitige Ideal der kernigen Matrizen bedeutet, hier formulieren.

Zur Vorbereitung wollen wir eine Bezeichnung einführen, die sich auf folgende Bemerkung stützt: Es ist für irgendwelche Funktionen

$$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}, b_{00}, c_{00}, c_{01}, c_{10}, c_{11}$$

$$\sigma_1(a \mid \sigma_2(b_{00} \mid c)) = \sigma_2(\sigma_1(a \mid b_{00}) \mid c)\,. \tag{54'}$$

Denn es ist

$$\sigma_1(a \mid \sigma_2(b_{00} \mid c))\, \varepsilon_{00} = (a) \cdot \sigma_2(b_{00} \mid c)\, \varepsilon_{00} = (a)[b_{00}\, \varepsilon_{00}(c)] =$$
$$= [(a) b_{00}\, \varepsilon_{00}](c) = \sigma_1(a \mid b_{00})\, \varepsilon_{00}(c) = \sigma_2(\sigma_1(a \mid b_{00}) \mid c)\, \varepsilon_{00}\,.$$

Statt der Ausdrücke (54′) schreiben wir $\sigma(a \mid b_{00} \mid c)$. Es ist also

$$(54'')\qquad \sigma(a \mid b_{00} \mid c) = \sigma_1(a \mid \sigma_2(b_{00} \mid c)) = \sigma_2(\sigma_1(a \mid b_{00}) \mid c)\,.$$

Ferner ist

$$(54''')\qquad \sigma(a \mid b_{00} \mid c)\, \varepsilon_{00} = (a)\, b_{00}\, \varepsilon_{00}(c)\,.$$

Satz 68′ lautet nun in unserem Fall:

Satz 75. Sind (u) und (v) Lösungen von

$$(55)\qquad (u)' = (a)(u)\,, \qquad (v)' = (v)(b)\,,$$

ist (c) von x unabhängig und ist mindestens eine dieser drei Matrizen kernig, so ist

$$(56)\qquad (z) = (u)(c)(v)$$

eine kernige Lösung von (54).

Für die zweiseitige Integrodifferentialgleichung

$$(57)\qquad z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) + \sigma_2(z_{00} \mid b)$$

besagt dieser Satz folgendes:

Satz 76. 1. Ist (u) eine Lösung von (55_1), ist v eine Lösung von

$$(58)\qquad v'_{00} = \sigma_2(v_{00} \mid b)$$

und sind die Funktionen

$$(59)\qquad c_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2),\quad c_{01}(s_1, t_1, u_2),\quad c_{10}(u_1, s_2, t_2),\quad c_{11}(u_1, u_2)$$

von x unabhängig, so ist

$$(59')\qquad z_{00} = \sigma_1(u \mid \sigma_1(c \mid v_{00}))$$

eine Lösung von (57).

2. Ist u eine Lösung von

$$(60)\qquad u'_{00} = \sigma_2(a \mid u_{00})\,,$$

ist (v) eine Lösung von (55_2) und sind die Funktionen (59) von x unabhängig, so ist

$$z_{00} = \sigma_1(\sigma_2(u_{00} \mid c) \mid v)$$

eine Lösung von (57).

3. Sind (u) und (v) Lösungen von (55_1) und (55_2) und ist $c_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)$ von x unabhängig, so ist

$$(60')\qquad z_{00} = \sigma_1(u \mid \sigma_2(c_{00} \mid v)) = \sigma_2(\sigma_1(u \mid c_{00}) \mid v) = \sigma(u \mid c_{00} \mid v)$$

eine Lösung von (57).

Beweis. 1. v_{00} befriedigt (58), also ist

$$(v_{00}\varepsilon_{00})' = v_{00}\varepsilon_{00}(b)\,;$$

d.h. $(v) = v_{00}\varepsilon_{00}$ ist eine kernige Lösung von (55_2). Also ist nach Satz 75

$$(z) = (u)(c)v_{00}\varepsilon_{00}$$

eine kernige Lösung von (54); d.h. es ist

$$(u)(c)v_{00}\varepsilon_{00} = z_{00}\varepsilon_{00}\,, \tag{61}$$

und es besteht die Gleichung

$$(z_{00}\varepsilon_{00})' = (a)z_{00}\varepsilon_{00} + z_{00}\varepsilon_{00}(b)\,. \tag{62}$$

Multipliziert man hier aus und unterdrückt den Faktor ε_{00}, so gehen (61) und (62) in (59′) und (57) über, womit 1 bewiesen ist.

Ähnlich beweist man 2 und 3.

Satz 77. Sind (u) und (v) Fundamentallösungen von (55_1) und (55_2), so ist jede Lösung von (57) in der Form (60′) darstellbar.

Beweis. Es sei z_{00} eine Lösung von (57). Dann besteht (62), d.h. $z_{00}\varepsilon_{00}$ ist eine kernige Lösung von (54). Nach Satz 69 ist daher für eine gewisse, von x unabhängige Funktion c_{00}

$$z_{00}\varepsilon_{00} = (u)c_{00}\varepsilon_{00}(v)\,;$$

also besteht für z_{00} die Darstellung (60′), w.z.b.w.

Satz 78. Ist eine Lösung (z) von (54) in einem Punkte α kernig, so ist sie überall in B kernig,

$$(z) = z_{00}\varepsilon_{00}\,, \tag{62'}$$

und z_{00} befriedigt (57).

Beweis. In § 6 haben wir einen beliebigen Punkt x_0 von B zur unteren Grenze aller Integrale $\int\limits_{x_0}^{x}(a)dx$ des Ringes R der zweigliedrigen Matrizen gewählt. Wir können daher x_0 mit α identifizieren. Da somit der Anfangswert einer Matrix (a) von R der Wert von (a) für $x = \alpha$ ist, so besagt Satz 70: ist die Lösung (z) von (54) in $x = \alpha$ kernig, so ist sie überall in B kernig, $(z) = z_{00}\varepsilon_{00}$. Daher muß z_{00} (57) befriedigen, w.z.b.w.

Satz 71 auf unseren Fall übertragen, besagt:

Satz 79. Ist c_{00} eine gegebene Funktion von s_1, t_1, s_2, t_2, die von x nicht abhängt, und ist x_0 ein gegebener Punkt von B, so besitzt (54) eine und nur eine kernige Lösung $(z) = z_{00}\varepsilon_{00}$

mit der Eigenschaft, daß z_{00} in x_0 den Wert c_{00} annimmt. Sie ist durch

$$z_{00}\varepsilon_{00} = (\bar{u})c_{00}\varepsilon_{00}(\bar{v})$$

gegeben, wo $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ die zu x_0 gehörigen Hauptlösungen von (55) sind.

Daraus folgt sofort für die Integrodifferentialgleichung (57) der

SATZ 80. Ist x_0 ein gegebener Punkt von B und ist c_{00} eine gegebene Funktion von s_1, t_1, s_2, t_2, die von x_0 nicht abhängt, so besitzt (57) eine und nur eine Lösung z_{00}, die für $x = x_0$ in c_{00} übergeht. Sie ist durch

$$z_{00} = \sigma_1(\bar{u} \mid \sigma_2(c_{00} \mid \bar{v})) = \sigma_2(\sigma_1(\bar{u} \mid c_{00}) \mid \bar{v}) = \sigma(\bar{u} \mid c_{00} \mid \bar{v}) \tag{63}$$

gegeben, worin $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ die zu x_0 gehörigen Hauptlösungen von (55) sind.

Insbesondere gilt der

SATZ 80′. (57) besitzt nur eine Lösung, die für $x = x_0$ identisch in s_1, t_1, s_2, t_2 verschwindet, die triviale Lösung $z_{00} = 0$.

Satz 74′ ergibt, auf unseren Fall angewandt, den

SATZ 81. Sind $\breve{z}_{00}$ und w_{00} Partikularlösungen von (57) und von

$$w'_{00} = \sigma_1(a \mid w_{00}) - \sigma_2(w_{00} \mid a), \tag{63′}$$

so ist

$$z_{00} = (w_{00}, \breve{z}_{00}) = \int_0^1\int_0^1 w_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\breve{z}_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2)d\lambda_1\, d\lambda_2$$

eine Lösung von (57).

Beweis. Wegen (57) und (63′) sind $\breve{z}_{00}\varepsilon_{00}$ und $w_{00}\varepsilon_{00}$ kernige Lösungen der Gleichung (54) und von

$$(w)' = (a)(w) - (w)(b).$$

Nach Satz 74 ist daher $w_{00}\varepsilon_{00}\breve{z}_{00}\varepsilon_{00} = (w_{00}, \breve{z}_{00})\varepsilon_{00}$ eine kernige Lösung von (54), d.h. $(w_{00}, \breve{z}_{00})$ ist eine Lösung von (57), w.z.b.w.

§ 14.

Die zu sich selbst adjungierte Matrizendifferentialgleichung $(z)' = (a)(z) - (z)(a)$ *und die ihr entsprechende Integrodifferentialgleichung* $z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) - \sigma_2(z_{00} \mid a)$.

Es sei die zu sich selbst adjungierte Matrizendifferentialgleichung

$$(z)' = (a)(z) - (z)(a) \tag{64}$$

vorgelegt. Satz 73 besagt in unserem Falle des Ringes zweigliedriger, kontinuisierter Matrizen, und wo K das zweiseitige Ideal der kernigen Matrizen bedeutet, folgendes:

Die Gesamtheit der kernigen Lösungen $z_{00}\varepsilon_{00}$ von (64) bildet einen Ring, der isomorph ist zum Ring der kernigen, von x unabhängigen Matrizen $c_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)\,\varepsilon_{00}$; die Zuordnung der „Konstanten" $c_{00}\varepsilon_{00}$ zu den Lösungen $z_{00}\varepsilon_{00}$ von (64) geschieht, indem man einen Punkt x_0 in B wählt und $z_{00}\varepsilon_{00}$ den Wert, den sie in x_0 annimmt, ihren Anfangswert in x_0, entsprechnen läßt.

Daraus folgt leicht für die (64) entsprechende Integrodifferentialgleichung der

Satz 82. Die Gesamtheit der Lösungen von

$$z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) - \sigma_2(z_{00} \mid a) \tag{65}$$

bildet einen Ring, der zum Ring der Funktionen $c_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)$, die von x unabhängig sind, isomorph ist. Hierbei ist unter „Multiplikation" die Komposition

$$(z_{00}, \bar{z}_{00}) = \int_0^1\int_0^1 z_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\,\bar{z}_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2$$

zu verstehen. Die Zuordnung beider Ringe geschieht, indem man jeder Lösung z_{00} ihren Wert in einem festen (für alle Lösungen z_{00} von (65) demselben) Punkt x_0 von B entsprechen läßt.

Satz 61 besagt für (64): von den drei Eigenschaften die einer kernigen Matrix zukommen können, Konstanz in Bezug auf x, Vertauschbarkeit mit a und Lösungsein von (64), ist jede eine Folge der beiden anderen. Daraus folgt für (65) der

Satz 83. Von den drei Eigenschaften, die einer Funktion z_{00} zukommen können, Konstanz in Bezug auf x, Vertauschbarkeit mit dem System der Koeffizienten $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$ (d.h. das Bestehen der Gleichung

$$\sigma_1(a \mid z_{00}) = \sigma_2(z_{00} \mid a))$$

und Befriedigen von (65), ist jede eine Folge der beiden anderen.

Satz 74 besagt für (64): jede kernige Lösung $z_{00}\varepsilon_{00}$ von (64), die in irgendeinem Punkte x_0 von B einen Wert $c_{00}\varepsilon_{00}$ annimmt, der mit (a) vertauschbar ist, ist eine Konstante. Daraus folgt für (65) der

Satz 84. Ist z_{00} eine Lösung von (65), die in irgendeinem Punkte x_0 von B einen Wert c_{00} annimmt, der mit dem System der Koeffizienten $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11}$, vertauschbar ist, d.h. für die die Gleichung

$$\sigma_1(a \mid c_{00}) = \sigma_2(c_{00} \mid a)$$

besteht, so ist z_{00} von x unabhängig.

§ 15.

Zwei zueinander adjungierte Integrodifferentialgleichungen $z'_{00} = \sigma_1(a \,|\, z_{00}) + \sigma_2(z_{00} \,|\, b)$, $w'_{00} = -\sigma_1(b \,|\, w_{00}) - \sigma_2(w_{00} \,|\, a)$.

Es seien die zueinander adjungierten Integrodifferentialgleichungen

(66) $$z'_{00} = \sigma_1(a \,|\, z_{00}) + \sigma_2(z_{00} \,|\, b),$$

(67) $$w'_{00} = -\sigma_1(b \,|\, w_{00}) - \sigma_2(w_{00} \,|\, a)$$

vorgelegt. Dann gilt der

SATZ 65. Sind z_{00} und w_{00} Lösungen von (66) und (67), so ist

$$(z_{00}, w_{00}) = \int_0^1\int_0^1 z_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, w_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2$$

eine Lösung der zu sich selbst adjungierten Gleichung

(68) $$\sigma'_{00} = \sigma_1(a \,|\, \sigma_{00}) - \sigma_2(\sigma_{00} \,|\, a).$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$z'_{00}\varepsilon_{00} = (a) z_{00}\varepsilon_{00} + z_{00}\varepsilon_{00}(b), \quad w'_{00}\varepsilon_{00} = -(b) w_{00}\varepsilon_{00} - w_{00}\varepsilon_{00}(a).$$

$z_{00}\varepsilon_{00}$ und $w_{00}\varepsilon_{00}$ sind also kernige Lösungen der Gleichungen

(68') $$(z)' = (a)(z) + (z)(b),$$

(68'') $$(w)' = -(b)(w) - (w)(a).$$

Nach Satz 65 ist daher $z_{00}\varepsilon_{00} w_{00}\varepsilon_{00}$ eine Lösung von

$$(\sigma)' = (a)(\sigma) - (\sigma)(a),$$

d.h. es ist

$$(z_{00}\varepsilon_{00} w_{00}\varepsilon_{00})' = (a) z_{00}\varepsilon_{00} w_{00}\varepsilon_{00} - z_{00}\varepsilon_{00} w_{00}\varepsilon_{00}(a).$$

Multipliziert man hier aus und beseitigt den Faktor ε_{00}, so erkennt man, daß (z_{00}, w_{00}) (68) befriedigt.

Um den folgenden Satz bequem aussprechen zu können, erweitern wir die bereits benutzte Bezeichnung

$$(a_{00}, b_{00}) = \int_0^1\int_0^1 a_{00}(s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2)\, b_{00}(\lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2$$

folgendermaßen: da

$$((a_{00}, b_{00}), c_{00}) = (a_{00}, (b_{00}, c_{00}))$$

ist, so schreiben wir statt jedes dieser Ausdrücke einfach (a_{00}, b_{00}, c_{00}) und verallgemeinern diese Schreibweise für beliebig viele „Faktoren", indem wir etwa setzen

$$(a_{00}, b_{00}, c_{00}, \ldots, k_{00}) = (a_{00}, (b_{00}, (c_{00}, \ldots, (j_{00}, k_{00}), \ldots))) .$$

Satz 86. Es sei x_0 ein beliebiger, aber festgewählter Punkt in B. Es seien $z_{001}, z_{002}, \ldots, z_{00n}$ Lösungen von (66), die für $x = x_0$ die Werte $c_{001}, c_{002}, \ldots, c_{00n}$ annehmen. Es seien $w_{001}, w_{002}, \ldots, w_{00n}$ Lösungen von (67), die für $x = x_0$ bzw. die Werte $k_{001}, k_{002}, \ldots, k_{00n}$ annehmen, und es sei, wenn

$$u_{00} = (c_{001}, k_{001}, c_{002}, k_{002}, \ldots, c_{00n}, k_{00n}) \tag{69}$$

gesetzt wird,

$$\sigma_1(a \mid u_{00}) = \sigma_2(u_{00} \mid a) . \tag{70}$$

Dann ist das „Produkt"

$$(z_{001}, w_{001}, z_{002}, w_{002}, \ldots, z_{00n}, w_{00n}) \tag{71}$$

von x unabhängig.

Beweis. Nach Voraussetzung genügen $z_{001}, z_{002}, \ldots, z_{00n}$ der Gleichung (66) und $w_{001}, w_{002}, \ldots, w_{00n}$ der Gleichung (67), d.h. $z_{001}, \varepsilon_{00}, z_{002}\varepsilon_{00}, \ldots, z_{00n}\varepsilon_{00}$, resp. $w_{001}\varepsilon_{00}, w_{002}\varepsilon_{00}, \ldots, w_{00n}\varepsilon_{00}$ sind kernige Lösungen von (68′) resp. (68″). Ferner ist wegen (70)

$$(a)u_{00}\varepsilon_{00} = u_{00}\varepsilon_{00}(a),$$

und wegen (69) ist

$$u_{00}\varepsilon_{00} = c_{001}\varepsilon_{00} \cdot k_{001}\varepsilon_{00} \cdots c_{00n}\varepsilon_{00} \cdot k_{00n}\varepsilon_{00} .$$

Nach Satz 65 ist daher

$$z_{001}\varepsilon_{00} \cdot w_{001}\varepsilon_{00} \cdots z_{00n}\varepsilon_{00} \cdot w_{00n}\varepsilon_{00} = u_{00}\varepsilon_{00} .$$

Nach Ausmultiplizieren und Beseitigung des Faktors ε_{00} erhält man

$$(z_{001}, w_{001}, \ldots z_{00n}, w_{00n}) = u_{00} .$$

Da u_{00} von x unabhängig ist, ist der Satz bewiesen.

Insbesondere gilt der

Satz 87. Sind z_{00} und w_{00} Lösungen von (66) resp. (67) die für $x = x_0$ die Werte c_{00}, resp. k_{00} annehmen, und ist

$$\sigma_1(a \mid (c_{00}, k_{00})) = \sigma_2((c_{00}, k_{00}) \mid a) ,$$

so ist

$$(z_{00}, w_{00})$$

von x unabhängig.

§ 16.

Die inhomogene zweiseitige lineare Differentialgleichung in R $w' = aw + wb + c$.

Es sei in R die zweiseitige inhomogene Differentialgleichung in R

$$w' = aw + wb + c \tag{72}$$

vorgelegt (in (72) braucht c natürlich keine Konstante zu sein), dann gilt der

SATZ 68. Sind u und v Fundamentallösungen von

$$u' = au, \qquad v' = vb, \tag{50}$$

so ist

$$\bar{w} = u\left[\int (u^{-1}cv^{-1})\right]v \tag{73}$$

eine Partikularlösung von (72).

Beweis. Aus (73) und (50) folgt

$$\bar{w}' = u'\left[\int (u^{-1}cv^{-1})\right]v + uu^{-1}cv^{-1}v + u\left[\int (u^{-1}cv^{-1})\right]v' =$$
$$= au\left[\int (u^{-1}cv^{-1})\right]v + c + u\left[\int (u^{-1}cv^{-1})\right]vb = a\bar{w} + c + \bar{w}b,$$

womit der Satz bewiesen ist.

SATZ 89. 1. Ist z irgendeine Lösung der homogenen Gleichung

$$z' = az + zb, \tag{73'}$$

und ist $\bar{w}$ irgendeine Partikularlösung von (72), so ist

$$w = \bar{w} + z \tag{74}$$

eine Lösung von (72).

2. Ist $\bar{w}$ eine Partikularlösung von (72), und läßt man in (74) z alle Lösungen von (73′) durchlaufen, so stellt (74) die allgemeinste Lösung von (72) dar. Die allgemeinste Lösung von (72) ist also durch

$$w = u\left[\int (u^{-1}cv^{-1})\right]v + ukv = u\left[\left(\int (u^{-1}cv^{-1})\right) + k\right]v \tag{73''}$$

gegeben, wo u und v Fundamentallösungen von (50) sind, und wo k alle Konstanten von R durchläuft.

3. Die Differenz zweier Lösungen von (72) ist eine Lösung von (73′).

Den einfachen Beweis des Satzes können wir übergehen.

Satz 90. Zu jeder gegebenen Konstanten k besitzt (72) eine und nur eine Lösung w, deren Anfangswert k ist.

Beweis. 1. Es sei $\bar{w}$ durch (73) definiert, und es sei z diejenige Lösung von (73′), die den Anfangswert k besitzt. Dann ist $w = \bar{w} + z$ eine Lösung von (72) mit dem Anfangswert k.

2. Seien w_1 und w_2 zwei Lösungen von (72), die beide den Anfangswert k besitzen, dann ist $z = w_1 - w_2$ eine Lösung von (73′) mit dem Anfangswert 0. Nach Satz 58 muß $w_1 - w_2 = 0$ sein, womit der Satz bewiesen ist.

Insbesondere:

Satz 91. Es gibt eine und nur eine Lösung von (72) mit dem Anfangswert 0. Sie ist durch (73) gegeben.

Sehr einfach ergibt sich ferner der

Satz 91′. Sind in der Darstellung (73″) der Lösung z von (72) u und v die Hauptlösungen von (50), so ist der Anfangswert von z gleich k.

Es seien wie in § 7 K und K' *zweiseitige Ideale* in R mit folgender Eigenschaft: Ist a enthalten in K', so ist $\int a$ enthalten in K. Wir behaupten den

Satz 92. In der inhomogenen zweiseitigen Differentialgleichung (72)

$$w' = aw + wb + c$$

sei c in K' enthalten. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dann die Lösung w von (72) in K enthalten ist, besteht darin, daß in der nach Satz 89 bestehenden Darstellung für w

$$w = u\left[\int (u^{-1}cv^{-1})\right]v + ukv \tag{74}$$

k in K liegt.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, denn da c in K' und k in K liegt, liegt w, wie aus dem Ausdruck für w in (74) sofort hervorgeht, in K. Die Bedingung ist notwendig, denn da c in K' und w in K liegt, so liegt ukv in K, und da u und v invertierbar sind, liegt auch k in K, w.z.b.w.

Satz 93. In der inhomogenen zweiseitigen Differentialgleichung (72) sei c in K' gelegen. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß dann die Lösung (74) von (72) in K liegt, besteht darin, daß der Anfangswert von z in K liegt.

Beweis folgt aus Satz 91′ und 92.

§ 17.

Anwendung auf die inhomogene zweiseitige Integrodifferentialgleichung $w'_{00} = \sigma_1(a \mid w_{00}) + \sigma_2(w_{00} \mid b) + c_{00}$.

Es sei die inhomogene Integrodifferentialgleichung

$$w'_{00} = \sigma_1(a \mid w_{00}) + \sigma_2(w_{00} \mid b) + c \tag{75}$$

vorgelegt. Wir behaupten den

Satz 94. Sind (u) und (v) Fundamentallösungen von

$$(u)' = (a)(u), \qquad (v)' = (v)(b) \tag{77}$$

und wird

$$(u)^{-1} = (\bar{u}), \qquad (v)^{-1} = (\bar{v})$$

gesetzt, so ist (siehe wegen der Bezeichnung $(54'')$)

$$\tilde{w}_{00} = \sigma\left(u \mid \int_{x_0}^{x} \sigma(\bar{u} \mid c_{00} \mid \bar{v})\, dx \mid v\right) \tag{78}$$

eine Lösung von (75).

Beweis. Nach (78) und $(54''')$ ist

$$\tilde{w}_{00}\varepsilon_{00} = (u)\int_{x_0}^{x} \sigma(\bar{u} \mid c_{00} \mid \bar{v})\, dx\, \varepsilon_{00}(v) = (u)\int_{x_0}^{x} (\bar{u}) c_{00}\varepsilon_{00}(\bar{v})\, dx (v) =$$
$$= (u)\int_{x_0}^{x} (u)^{-1} c_{00}\varepsilon_{00}(v)^{-1}\, dx (v).$$

Nach Satz 88 ist somit $\tilde{w}_{00}\varepsilon_{00}$ eine kernige Lösung von

$$(w)' = (a)(w) + (w)(b) + c_{00}\varepsilon_{00},$$

d.h. es besteht die Gleichung

$$(\tilde{w}_{00}\varepsilon_{00})' = (a)\tilde{w}_{00}\varepsilon_{00} + \tilde{w}_{00}\varepsilon_{00}(b) + c_{00}\varepsilon_{00}.$$

Somit befriedigt $\tilde{w}_{00}$ (75), w.z.b.w.

Satz 95. 1. Ist z irgendeine Lösung der homogenen Gleichung

$$z'_{00} = \sigma_1(a \mid z_{00}) + \sigma_2(z_{00} \mid b), \tag{79}$$

und ist $\tilde{w}_{00}$ irgendeine Lösung von (75), so ist

$$w_{00} = z_{00} + \tilde{w}_{00} \tag{80}$$

eine Lösung von (75).

2. Ist in (80) z_{00} die allgemeinste Lösung von (79), so stellt (80) die allgemeinste Lösung von (75) dar. Die allgemeinste Lösung von (75) ist also gegeben durch

$$(81)\quad w_{00} = \sigma\left(u \,\Big|\, \int\limits_{x_0}^{x} \sigma(\bar{u} \,|\, c_{00} \,|\, \bar{v})\, dx \,\Big|\, v\right) + \sigma(u \,|\, k_{00} \,|\, v) =$$

$$= \sigma\left(u \,\Big|\, \int\limits_{x_0}^{x} \sigma(\bar{u} \,|\, c_{00} \,|\, \bar{v})\, dx + k_{00} \,\Big|\, v\right),$$

worin k_{00} eine beliebige Funktion von den s und t ist, die von x nicht abhängt.

3. Die Differenz zweier Lösungen von (75) stellt eine Lösung von (79) dar.

Satz 96. Zu jeder gegebenen, von x unabhängigen Funktion $k_{00}(s_1, t_1, s_2, t_2)$, gibt es eine und nur eine Lösung von (75), die für $x = x_0$ in k_{00} übergeht. Sie ist gegeben durch (81), falls darin (u) und (v) die zu x_0 gehörigen Hauptlösungen von (77) sind.

Beweis. Für $x = x_0$ ist wegen (81) und (54'''), und weil (u) und (v) für $x = x_0$ in (1) übergehen,

$$w_{00}\varepsilon_{00} = \sigma(u \,|\, k_{00} \,|\, v)\varepsilon_{00} = (u)k_{00}\varepsilon_{00}(v) = (1)k_{00}\varepsilon_{00}(1) = k_{00}\varepsilon_{00},$$

womit der eine Teil des Satzes bewiesen ist. Es mögen nun $\bar{w}_{00}$ und w_{00} zwei Lösungen von (75) sein, die beide für $x = x_0$ in k_{00} übergehen. Dann ist $w_{00} - \bar{w}_{00}$ eine Lösung von (79), die für $x = x_0$ identisch in s_1, t_1, s_2, t_2 verschwindet. Nach Satz 80' ist $w_{00} - \bar{w}_{00} = 0$, so daß $w_{00} = \bar{w}_{00}$, w.z.b.w.

Insbesondere gilt:

Satz 97. Die Integrodifferentialgleichung (75) besitzt eine und nur eine Lösung, die für $x = x_0$ verschwindet. Sie ist durch (78) gegeben.

(Eingegangen den 13. August 1938.)