COMPOSITIO MATHEMATICA

R. FRUCHT

Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 239-250

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__239_0>

Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe

von

R. Frucht

Triest

Einleitung.

Während die Streckenkomplexe oder Graphen in der Fachliteratur seit längerer Zeit ein steigendes Interesse gefunden haben, sind die Automorphismengruppen von Graphen bisher nur in wenigen speziellen Fällen untersucht worden. Vor allem ist hier die Arbeit von Herrn Pólya [1]) zu nennen, in welcher auf Seite 209 die Frage nach den Automorphismengruppen von Bäumen (d.h. endlichen zusammenhängenden Graphen der Zusammenhangszahl 0) gelöst wird, und wo auch Ergebnisse über die Gruppen von Graphen der Zusammenhangszahl 1 angedeutet sind. Mit den Gruppen der durch die Kantensysteme der regulären Polyeder gebildeten Graphen habe ich mich in einer früheren Arbeit [2]) befasst und dort auch die von Herrn Dénes König gestellte Frage nach der Automorphismengruppe des sogen. Petersenschen Graphen beantwortet.

In der vorliegenden Arbeit beschäftige ich mich nun mit einer ebenfalls von Herrn König in seinem Buch [3]) gestellten Frage, die aber wesentlich allgemeinerer Natur ist: Für eine vorgegebene abstrakte endliche Gruppe ist zu entscheiden, ob es Graphen gibt, die diese Gruppe zur Automorphismengruppe besitzen, und gegebenenfalls soll man solche Graphen angeben. Ich werde nun

---

[1]) G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen [Acta math. 68 (1937), 145—254].

[2]) R. Frucht, Die Gruppe des Petersenschen Graphen und der Kantensysteme der regulären Polyeder [Commentarii Math. Helvet. 9 (1937), 217—223].

[3]) Dénes König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe) [Leipzig 1936], 5.

zeigen, daß es stets solche Graphen gibt, und zwar werde ich im § 2 ein Verfahren angeben, wie man zu vorgegebener Gruppe sogar unendlich viele Graphen herstellen kann.

Der § 3 ist dann dem Beweis gewidmet, daß die nach dem Verfahren des § 2 erhaltenen Graphen tatsächlich die vorgegebene Gruppe besitzen. Der § 4 enthält noch eine wesentliche Vereinfachung dieses Konstruktionsverfahrens sowie einige weitere Bemerkungen. Endlich weise ich im § 5 auf eine „analytische" Deutung des bewiesenen Existenztheorems hin, welche besagt, daß sich zu jeder endlichen abstrakten Gruppe eine quadratische Form angeben läßt, bei welcher die die Form ungeändert lassenden Permutationen der Veränderlichen eine zur vorgegebenen Gruppe einstufig isomorphe Permutationsgruppe bilden.

Besondere Vorkenntnisse aus der Theorie der Graphen, für deren Studium auf das Standardwerk [3]) von Herrn König verwiesen sei, sind für das Verständnis der vorliegenden Arbeit nicht erforderlich; die notwendigen Definitionen sind im § 1 zusammengestellt.

§ 1. *Definitionen.*

Unter einem endlichen Graphen verstehen wir (wie König [3])) ein Gebilde, welches aus endlich vielen „Punkten" und „Kanten" besteht, wobei diesen aber keinerlei geometrischer Inhalt zugeschrieben zu werden braucht, sondern nur die Bedingung erfüllt sein muß, daß jede Kante durch zwei voneinander verschiedene Punkte begrenzt wird (oder zwei verschiedene Punkte miteinander „verbindet"), und daß von jedem Punkt mindestens eine Kante ausgeht. Ein endlicher Graph mit n Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ist also vollständig bestimmt, wenn je zwei Punkten P_i und P_j eine nicht negative ganze Zahl $\alpha(P_i, P_j)$ zugeordnet ist, welche die Anzahl der Kanten angibt, durch die P_i mit P_j verbunden ist $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$; hierbei ist $\alpha(P_i, P_j) = \alpha(P_j, P_i)$, denn wir schreiben den Kanten keinerlei „Richtungssinn" zu. Ferner gibt es zu jedem Wert von i mindestens einen Wert $j \neq i$, so daß $\alpha(P_i, P_j) \geqq 1$ ist.

Wir betrachten nun die Permutationen der Punkte und Kanten eines Graphen unter sich, bei denen der Graph als Ganzes in sich übergeht, d.h. bei denen sämtliche Beziehungen der Form: „Die Kante k verbindet die Punkte P und Q" in richtige Beziehungen übergehen. Die Gesamtheit dieser Permutationen bildet eine Gruppe, die man die Automorphismengruppe des Graphen oder kürzer auch nur die Gruppe des Graphen nennt.

Diese Gruppe kann nur aus der Identität bestehen, wie dies z.B. bei dem in Fig. 1 abgebildeten „Baum" der Fall ist. Hingegen ist die Ordnung der Gruppe eines Graphen sicher dann größer als 1, wenn es im Graphen mindestens ein Zweieck gibt, d.h. zwei Punkte, die durch mehr als eine Kante miteinander verbunden sind. Vertauscht man nämlich die Kanten zwischen diesen beiden Punkten irgendwie untereinander und läßt alle übrigen Kanten sowie sämtliche Punkte des Graphen fest, so erhält man lauter Transformationen des Graphen in sich, die also zu seiner Automorphismengruppe gehören. Betrachtet man weiter in dem Falle, daß es Zweiecke gibt, nur die Permutationen der Punkte des Graphen, so erkennt man unmittelbar: Die durch die Automorphismengruppe des Graphen bewirkte Permutationsgruppe seiner Punkte ist seiner Automorphismengruppe *mehr*stufig isomorph. Ein einstufiger Isomorphismus wird hingegen dann und nur dann vorliegen, wenn der Graph keine Zweiecke enthält. Solche *zweiecklosen* endlichen Graphen, die dadurch gekennzeichnet sind, daß zwei Punkte höchstens durch *eine* Kante miteinander verbunden sind, haben somit die Eigenschaft, daß ihre Automorphismengruppe durch die Angabe der Permutationen, welche die *Punkte* des Graphen bei ihr erleiden, bereits völlig bestimmt ist.

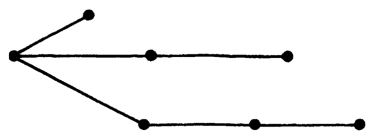

Fig. 1.

Hierdurch werden aber alle Untersuchungen über die Gruppen von Graphen wesentlich erleichtert, da man sich auf die Betrachtung von Permutationen der Punkte allein beschränken kann. Wir werden daher fortan, ohne es immer ausdrücklich zu betonen, stets zweiecklose endliche Graphen betrachten, zumal da man bei diesen der Automorphismengruppe noch eine interessante Deutung als Gruppe einer quadratischen Form geben kann (siehe § 5).

§ 2. *Konstruktion von Graphen mit vorgegebener Gruppe.*

Das Existenztheorem, welches wir beweisen wollen, lautet: „Zu jeder abstrakten endlichen Gruppe gibt es unendlich viele endliche (zweiecklose) Graphen mit dieser Gruppe."

Wir zeigen zunächst, daß es genügt, die Existenz eines einzigen zweiecklosen Graphen mit der vorgegebenen Gruppe zu beweisen, da daraus dann sehr einfach die Existenz von unendlich vielen solchen Graphen mit derselben Automorphismengruppe folgt. Ist nämlich zu einer abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ bereits ein zweieckloser Graph mit den n Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gefunden worden, so gibt es auch einen Graphen mit $2n$ Punkten und derselben Automorphismengruppe, den man anschaulich gesprochen dadurch erhält, daß man jedem der n Punkte des ursprünglichen Graphen noch einen „Schwanz der Länge 1" anheftet. Genauer ausgedrückt bedeutet dies, daß man zu den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ noch n weitere Punkte $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{2n}$ hinzufügt und zu den Kanten des ursprünglichen Graphen noch die n Kanten $P_i P_{n+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Man erkennt sofort, daß man auf diese Weise einen zweiten Graphen mit derselben Gruppe $\mathfrak{G}$ erhalten hat, und da man dieses Verfahren unbegrenzt fortsetzen kann, erhält man unendlich viele Graphen mit der Gruppe $\mathfrak{G}$, sobald man nur einen einzigen solchen Graphen kennt.

Den Beweis, daß es aber zu einer abstrakten endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ stets einen endlichen Graphen gibt, führen wir durch Angabe eines Beispiels für einen Graphen mit der Gruppe $\mathfrak{G}$. Hierbei können wir uns auf den Fall beschränken, daß die Ordnung g von $\mathfrak{G}$ größer als 1 ist, denn für die Gruppe der Ordnung 1 haben wir bereits in Fig. 1 ein Beispiel für einen Graphen mit dieser Gruppe kennen gelernt. Sei also $\mathfrak{G}$ von der Ordnung $g > 1$. Wir wollen die Elemente von $\mathfrak{G}$ irgendwie mit $1, 2, \ldots, g$ numerieren; d.h. wenn G ein Element aus $\mathfrak{G}$ ist, so ordnen wir dem Element G eine Zahl $f(G)$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, g$ zu, und zwar sei $f(G) \neq f(H)$, wenn $G \neq H$. Das Einheitselement von $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit E, und die Numerierung sei insbesondere so getroffen, daß $f(E) = 1$ ist.

Bei der Herstellung eines Graphen mit dieser Gruppe gehen wir nun in zwei Schritten vor:

1.) Der erste Schritt besteht darin, daß wir den „Cayleyschen Farbgraphen" der Gruppe $\mathfrak{G}$ konstruieren (siehe das unter [3]) zitierte Buch von König, VIII. Kapitel, § 5). Dieser ist kein Graph in dem im § 1 definierten Sinne, da seinen Kanten noch ein „Richtungssinn" und eine „Farbe" (d.h. eine Ziffer als Index) zukommt. Man erhält diesen Farbgraphen auf die folgende Weise:

Jedem Element G von $\mathfrak{G}$ lasse man einen Punkt $P_{f(G)}$ entsprechen und verbinde dann je zwei dieser Punkte, etwa $P_{f(G)}$ und $P_{f(H)}$, sowohl durch eine von $P_{f(G)}$ nach $P_{f(H)}$ als auch durch eine von $P_{f(H)}$ nach $P_{f(G)}$ „gerichtete" Kante. Hierbei ordne man der von $P_{f(G)}$ nach $P_{f(H)}$ gerichteten Kante als „Farbe" die Ziffer

$f(HG^{-1})$ zu und der umgekehrt gerichteten Kante die „Farbe" $f(GH^{-1})$.

Da es $\binom{g}{2}$ Kombinationen solcher Elemente G und H gibt, besitzt der so hergestellte „Farbgraph" g Punkte und $g(g-1)$ Kanten. Würde man diejenigen Transformationen des Farbgraphen in sich betrachten, bei denen nur Kanten mit gleichem Richtungssinn und gleicher Farbe ineinander übergehen, so würde man sehen, daß diese Transformationen eine zu $\mathfrak{G}$ einstufig isomorphe Gruppe bilden. Unsere Aufgabe wird also gelöst sein, wenn es gelingt, aus dem Farbgraphen einen „gewöhnlichen" Graphen abzuleiten, dessen Kanten also weder Richtungssinn noch Farbe besitzen, ohne daß dabei die Automorphismengruppe eine Änderung erfährt. Dies gelingt nun tatsächlich auf die folgende Weise durch Abänderung der Kanten und Einführung weiterer Punkte und Kanten.

2.) Hat die von P_i nach P_j gerichtete Kante des Farbgraphen die Farbe ν (wo also ν eine Zahl aus der Reihe $2, 3, \ldots, g$ ist), so streichen wir diese Kante und ersetzen sie durch drei (ungerichtete und ungefärbte) Kanten: $P_iQ_{i,j,1}$, $Q_{i,j,1}\,R_{i,j,1}$ und $R_{i\,j,1}\,P_j$, wobei wir also zwei neue Punkte $Q_{i,j,1}$ und $R_{i,j,1}$ einführen. Dann heften wir im Punkt $Q_{i,j,1}$ einen „Schwanz von der Länge $2\nu-3$" und im Punkt $R_{i,j,1}$ einen „Schwanz von der Länge $2\nu-2$" an; d.h. wir führen $4\nu-5$ neue Punkte ein, die wir mit $Q_{i,j,s}$ $(s=2, 3, \ldots, 2\nu-2)$ und $R_{i,j,s}$ $(s=2, 3, \ldots, 2\nu-1)$ bezeichnen, und verbinden jeden Punkt $Q_{i,j,s}$ mit $Q_{i,j,s-1}$ durch je eine Kante und ebenso $R_{i,j,s}$ mit $R_{i,j,s-1}$ durch je eine Kante. Hierbei durchläuft s die Werte $2, 3, \ldots, 2\nu-2$ bzw. $2\nu-1$, und ν ist die „Farbe" der gestrichenen Kante des Farbgraphen, die von P_i nach P_j gerichtet war; d.h. wenn etwa $i=f(G)$ und $j=f(H)$ ist, so ist $\nu=f(HG^{-1})$.

Hat man so nach und nach alle $g(g-1)$ Kanten des Farbgraphen durch „Kantenzüge mit Schwänzen" ersetzt, so erhält man einen zweiecklosen Graphen mit $g^2(2g-1)$ Punkten, von dem wir im § 3 beweisen werden, daß seine Automorphismengruppe zu $\mathfrak{G}$ einstufig isomorph ist.

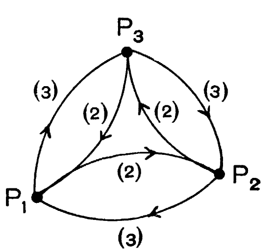

Fig. 2.

Als Beispiel für das hiermit beschriebene Konstruktionsverfahren wählen wir die Gruppe der Ordnung 3 und geben in Fig. 2 den zu dieser Gruppe gehörigen

Farbgraphen an sowie in Fig. 3 den daraus abgeleiteten „gewöhnlichen" Graphen mit derselben Gruppe.

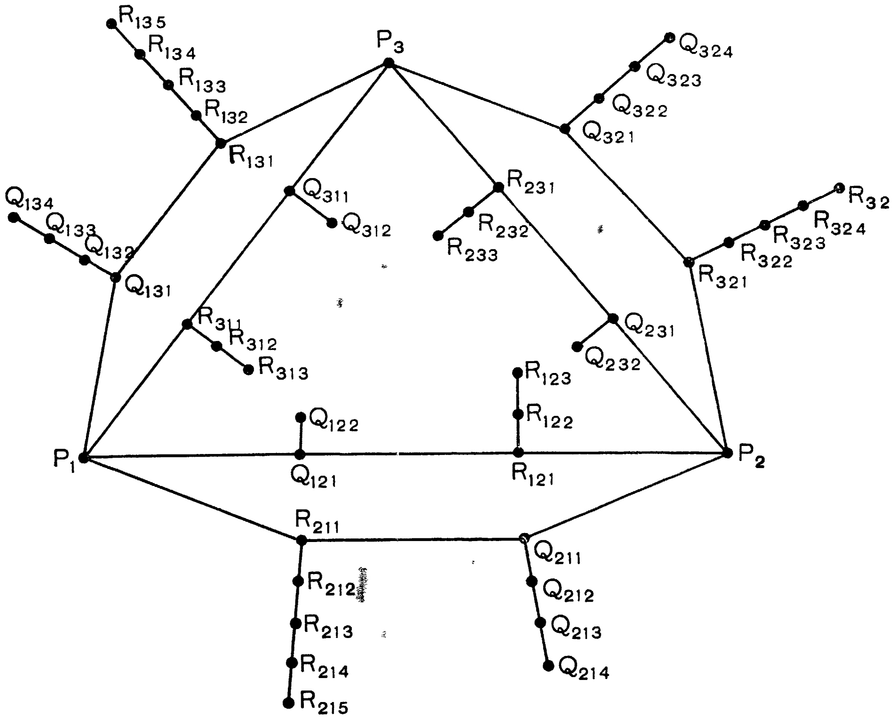

Fig. 3.

§ 3. *Rechtfertigung des Konstruktionsverfahrens.*

1.) Wir beweisen zunächst, daß jede Transformation T des im § 2 konstruierten Graphen, bei welcher der Punkt P_1 fest bleibt, die Identität ist, d.h. alle Punkte und Kanten des Graphen einzeln fest läßt. Dazu betrachten wir zunächst die „Nachbarpunkte" von P_1, d.h. diejenigen Punkte, die mit P_1 durch eine Kante verbunden sind. Dies sind einerseits die Punkte $Q_{1,j,1}$ mit $j = 2, 3, \ldots, g$ und andererseits die Punkte $R_{j,1,1}$ mit $j = 2, 3, \ldots, g$. Bei der Transformation T müssen Nachbarpunkte von P_1 wieder in Nachbarpunkte von P_1 übergehen; daher können die Punkte $Q_{1,j,1}$ und $R_{j,1,1}$ nur untereinander vertauscht werden. Eine von der Identität verschiedene Vertauschung aller dieser Punkte ist aber nicht möglich, denn die Länge der „Schwänze", die wir diesen Punkten angeheftet haben, ist für jeden dieser Punkte verschieden. Also bleibt jeder der Punkte $Q_{1,j,1}$ und $R_{j,1,1}$ bei T einzeln fest und somit, wie man sofort erkennt, auch jeder der Punkte $Q_{1,j,s}$ und $R_{j,1,s}$ (für alle vorkommenden Werte von $s = 2, 3, \ldots$). Als dritter Nachbarpunkt von $Q_{1,j,1}$ muß aber auch $R_{1,j,1}$ bei T fest bleiben und ebenso $Q_{j,1,1}$ als dritter Nachbarpunkt von $R_{j,1,1}$. Als einziger gemeinsamer Nachbarpunkt von $Q_{j,1,1}$ und $R_{1,j,1}$ bleibt endlich auch P_j bei T fest (und dies gilt für alle $j = 2, 3, \ldots, g$). In derselben Weise fortfahrend sieht man, daß auch alle übrigen Punkte des Graphen fest bleiben, d.h. T ist, wie behauptet, die Identität.

2.) Wir betrachten nun eine Transformation des Graphen in sich, bei der P_1 nicht fest bleibt. P_1 kann in keinen der Punkte $Q_{i,j,s}$ oder $R_{i,j,s}$ übergehen, weil von diesen letzteren höchstens drei Kanten ausgehen, während von P_1 aus $2g - 2$ Kanten ausgehen, also mehr. (Diese Schlußweise versagt für $g = 2$, doch kann man diesen Fall entweder getrennt behandeln oder überhaupt ausschließen, da man als Graphen mit Gruppe der Ordnung 2 einfach zwei durch eine Kante verbundene Punkte betrachten kann.) Daher kann P_1 nur in einen anderen Punkt P_i ($i = 2, 3, \ldots, g$) übergehen, und es sei etwa $i = f(G)$. Wir behaupten dann, daß es zu einem festen Gruppenelement G höchstens eine einzige Transformation T_G mit dieser Eigenschaft geben kann, daß $P_1 = P_{f(E)}$ in $P_{f(G)}$ übergeht. Angenommen, T' sei eine zweite Transformation des Graphen in sich mit derselben Eigenschaft. Wir bilden dann die zu T_G inverse Transformation T_G^{-1}, bei welcher also $P_{f(G)}$ in P_1 übergeht. Bei der Aufeinanderfolge der Transformationen T' und T_G^{-1} würde also P_1 fest bleiben, daher wäre die aus T' und T_G^{-1} zusammengesetzte Transformation nach 1 die Identität, d.h. aber $T' = T_G$.

3.) Es gibt nun tatsächlich zu jedem Gruppenelement G eine solche Graphentransformation T_G, welche $P_1 = P_{f(E)}$ in $P_{f(G)}$ überführt. Man erhält sie dadurch, daß man für jedes Element H aus $\mathfrak{G}$ den Punkt $P_{f(H)}$ durch $P_{f(HG)}$ ersetzt und für jedes Elementepaar $H \neq K$ die Punkte $Q_{f(H), f(K), s}$ durch $Q_{f(HG), f(KG), s}$ und $R_{f(H), f(K), s}$ durch $R_{f(HG), f(KG), s}$ ($s = 1, 2, 3, \ldots, 2f(KH^{-1}) - 2$ bzw. $2f(KH^{-1}) - 1$).

Man bestätigt leicht, daß bei dieser Permutation der Punkte zwei Punkte, die durch eine Kante verbunden waren, wieder in zwei durch eine Kante verbundene Punkte übergehen, daß also T_G tatsächlich eine Transformation des Graphen darstellt. (Man bemerke: In der Cayleyschen Darstellung hat die von $P_{f(H)}$ nach $P_{f(K)}$ gerichtete Kante die Farbe $f(KH^{-1})$ und die von $P_{f(HG)}$ nach $P_{f(KG)}$ gerichtete ebenfalls die Farbe $f(KG(HG)^{-1}) = f(KH^{-1})$.)

Lassen wir nun G alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchlaufen, so durchläuft T_G *alle* Transformationen des Graphen in sich, d.h. die Automorphismengruppe des Graphen. Aus der Definition von T_G folgt nun aber unmittelbar, daß sich durch die Aufeinanderfolge zweier Transformationen T_G und T_S gerade die (dem Produkt GS zugeordnete) Transformation T_{GS} ergibt. Die Automorphismengruppe des Graphen ist also zur abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ isomorph, und dieser Isomorphismus ist weiterhin ein einstufiger, da für $G \neq S$ auch $T_G \neq T_S$ ist. Damit ist aber der Beweis in allen Teilen geführt.

§ 4. *Vereinfachung des Konstruktionsverfahrens und weitere Bemerkungen.*

Der Graph, den wir im § 2 zu einer vorgegebenen abstrakten Gruppe der Ordnung g hergestellt haben, besitzt $g^2(2g-1)$ Punkte. Durch eine Abänderung des Konstruktionsverfahrens, durch die sich jedoch der Beweis des § 3 umständlicher gestalten würde, läßt sich ein Graph mit derselben Gruppe, aber mit weniger Punkten angeben. Zu diesem Zweck erzeuge man die abstrakte Gruppe $\mathfrak{G}$ durch möglichst wenig, z.B. d Elemente, denen etwa bei der Numerierung durch die Funktion $f(G)$ die Nummern $2, 3, \ldots, d, d+1$ entsprechen mögen. Dann streiche man im Cayleyschen Farbgraphen zunächst alle Kanten der Farben $d+2, d+3, \ldots, g$, ohne die so entfernten Kanten durch andere Gebilde zu ersetzen. Erst auf den so reduzierten Farbgraphen, der übrigens auch im Buche [3]) von König auf S. 120 erwähnt wird, wende man das im § 2 geschilderte Konstruktionsverfahren an. Man erhält dann einen Graphen mit $g(1+d)(1+2d)$ Punkten.

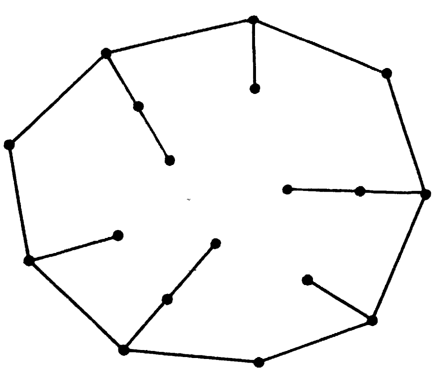

Fig. 4.

Erzeugen wir z.B. die Gruppe der Ordnung 3 durch ein Element G (mit der Relation $G^3 = E$ und mit $f(G)=2$), so erhalten wir statt des Graphen der Fig. 3 mit 45 Punkten den weit einfacheren Graphen der Fig. 4 mit derselben Gruppe, aber mit nur 18 Punkten.

Analog läßt sich so für eine zyklische Gruppe von der beliebigen Ordnung g wegen $d = 1$ ein Graph mit $6g$ Punkten angeben. Da dieser Graph offenbar die Zusammenhangszahl 1 hat, findet man so das bei Polya [1]) auf S. 210 angegebene Resultat bestätigt, daß sich Graphen von der Zusammenhangszahl 1 angeben lassen, deren Automorphismengruppe eine beliebig vorgeschriebene Ordnung hat.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß man auch mit diesem vereinfachten Konstruktionsverfahren zu einer vorgegebenen abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ in der Regel nicht denjenigen zweiecklosen Graphen mit dieser Gruppe erhält, der die wenigsten Punkte besitzt. Betrachten wir z.B. die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ der Ordnung $g = n!$, die sich bekanntlich durch $d = 2$ Elemente erzeugen läßt. Wir erhalten nach dem vereinfachten Verfahren noch immer einen Graphen mit $15 \cdot n!$ Punkten; es gibt jedoch bereits einen Graphen mit nur n Punkten, der $\mathfrak{S}_n$ zur Gruppe besitzt, nämlich den sogen. vollständigen Graphen, bei dem je zwei verschiedene der n Punkte durch genau eine Kante miteinander verbunden sind.

Übrigens sind diese beiden Graphen mit $15 \cdot n!$ bzw. n Punkten nicht nur durch die Punktezahl voneinander verschieden, sondern weisen noch einen anderen wesentlichen Unterschied auf: Die Automorphismengruppe der beiden Graphen ist immer derselben abstrakten Gruppe $\mathfrak{S}_n$ einstufig isomorph, aber als Permutationsgruppe der Punkte aufgefaßt ist sie einmal intransitiv, das andere Mal transitiv (beim vollständigen Graphen läßt sich jeder Punkt durch eine geeignete Transformation der Gruppe in jeden anderen überführen).

Es könnte daher die Frage auftauchen, ob man nicht bei jeder abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ Beispiele solcher zweiecklosen Graphen angeben kann, bei denen die Automorphismengruppe eine zu $\mathfrak{G}$ einstufig isomorphe *transitive* Permutationsgruppe der Punkte ist. Diese Frage ist jedoch im allgemeinen zu verneinen. Z.B. gibt es bereits für die zyklische Gruppe der Ordnung 3 keinen zweiecklosen Graphen mit transitiver Permutationsgruppe der Punkte. (Ein solcher Graph müßte nämlich 3 Punkte haben; die zweiecklosen Graphen mit 3 Punkten haben als Gruppe aber entweder $\mathfrak{S}_2$ von der Ordnung 2 oder $\mathfrak{S}_3$ von der Ordnung 6.)

Um so weniger wird natürlich im allgemeinen die Aufgabe lösbar sein, zu einer vorgegebenen Permutationsgruppe $\mathfrak{P}_n$ in n Symbolen einen zweiecklosen Graphen mit n Punkten zu finden, dessen Automorphismengruppe als Permutationsgruppe der Punkte betrachtet mit $\mathfrak{P}_n$ identisch ist.

§ 5. *Deutung durch quadratische Formen.*

Die hier vorliegenden Verhältnisse werden etwas übersichtlicher, wenn man folgende auch an und für sich interessante Deutung der bisher behandelten Fragen durch quadratische Formen betrachtet [4]). Wie wir im § 1 gesehen haben, ist ein beliebiger (also nicht notwendig zweieckloser) Graph mit n Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ durch die Zahlen $\alpha(P_i, P_j) = \alpha(P_j, P_i)$ (mit $j \neq i$) gekennzeichnet, die die Anzahl der P_i mit P_j verbindenden Kanten angeben. Ebenso gut können wir dann aber den Graphen durch die folgende quadratische Form in n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ „darstellen":

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i<j} \alpha(P_i, P_j) x_i x_j.$$

In dieser quadratischen Form fehlen also die rein quadratischen Glieder und die übrigen Koeffizienten sind nicht negative ganze Zahlen; ferner kommen alle n Veränderlichen in der quadratischen Form auch wirklich vor. Umgekehrt kann jede solche quadratische Form auch als Graph gedeutet werden. Z.B. besitzt ein Zweieck die Form: $F(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ und der in Fig. 1 abgebildete Graph hat die Form:

$$F(x_1, \ldots, x_6) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_5 + x_3x_4 + x_5x_6 + x_6x_7.$$

Wie man bei diesem letzteren Beispiel bestätigt findet, enthält bei zweiecklosen Graphen die quadratische Form keinen Koeffizienten größer als eins. Für diese Graphen bzw. Formen gilt nun der Satz:

Die Automorphismengruppe des zweiecklosen Graphen mit der quadratischen Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist einstufig isomorph zu derjenigen Permutationsgruppe der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bei welcher die Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ungeändert bleibt. (Für Graphen, die Zweiecke besitzen, ist dieser Satz nicht richtig.)

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Tatsache (s. § 1), daß bei zweiecklosen Graphen die Automorphismengruppe durch die Permutationen der Punkte des Graphen bereits völlig bestimmt ist.

Auf Grund dieses Satzes kann man geradezu sagen: Die Forderung, zu einer abstrakten Gruppe $\mathfrak{G}$ einen zweiecklosen Graphen mit dieser Gruppe zu finden, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, eine quadratische Form, die keine rein quadratischen Glieder enthält, und deren übrige Koeffizienten null oder eins sind, so anzugeben, daß diejenigen Permutationen der in der Form

---

[4]) C. Jordan, Sur les assemblages de lignes [Journal für die reine und angewandte Mathematik, 70 (1869), 185—190].

auftretenden Veränderlichen, bei denen die Form ungeändert bleibt, eine zu $\mathfrak{G}$ einstufig isomorphe Gruppe bilden.

Durch das Konstruktionsverfahren des § 2, bzw. § 4 haben wir also die Aufgabe gelöst, zu einer vorgegebenen *abstrakten* Gruppe eine bei dieser, aber bei keiner größeren Gruppe ungeändert bleibende quadratische Form anzugeben (deren Koeffizienten sogar noch ganz spezielle Werte besitzen). Z.B. liefert die Fig. 4 für die Gruppe der Ordnung 3 die folgende quadratische Form:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+1} + x_1x_9 + x_1x_{10} + x_2x_{11} + x_{11}x_{12} + x_4x_{13} + x_5x_{14} + \\ + x_{14}x_{15} + x_7x_{16} + x_8x_{17} + x_{17}x_{18}.$$

Betrachten wir nun unter diesem Gesichtspunkt die am Schluß des § 4 aufgeworfene Frage nach einem zweiecklosen Graphen mit vorgegebener Permutationsgruppe der Punkte, so erscheint es nicht mehr verwunderlich, daß diese Aufgabe im allgemeinen unlösbar ist. In der Tat würde diese Aufgabe darauf hinauslaufen, zu einer vorgegebenen Permutationsgruppe in n Veränderlichen eine quadratische Form in diesen Veränderlichen zu finden, die außer den besonderen Bedingungen, welche diese Form zu einem Graphen stempeln, die Eigenschaft haben müßte, nur bei der gegebenen Permutationsgruppe, aber bei keiner umfassenderen ungeändert zu bleiben. Aus der Algebra ist aber bekannt, daß dies nicht immer möglich ist; vielmehr behandelt man dort die Aufgabe, zu einer vorgegebenen Permutationsgruppe ein invariantes Polynom zu finden, das aber auch von höherem als zweitem Grade sein kann. Betrachten wir z.B. die zyklische Gruppe der Ordnung 3 als Permutationsgruppe von 3 Veränderlichen, so findet man keine nur bei dieser Gruppe invariante quadratische Form, sondern erst die Form dritten Grades: $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$.

Um so bemerkenswerter ist also die von uns erhaltene Tatsache, daß sich zu jeder *abstrakten* Gruppe quadratische Formen mit dieser Gruppe angeben lassen.

Wir haben bei allen bisherigen Betrachtungen die von Herrn König gegebene Definition des Graphen benutzt, bei welcher „isolierte" Punkte ausgeschlossen sind. Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß es für manche gruppentheoretische Untersuchungen nützlich sein kann, diese Definition dadurch etwas zu erweitern, daß man auch isolierte Punkte zuläßt. In gewissem Sinn hat dies schon Herr Polya in [1]) auf S. 182 durch die Einführung des „Einpunktgraphen" getan, der, wie der Name besagt, aus einem einzigen Punkt ohne Kanten besteht. Nimmt man diese Erweiterung der Graphendefinition vor, so erreicht man insbesondere bei den zweiecklosen Graphen den Vorteil, daß jede quadratische Form in $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren Koeffizienten null oder eins sind, und die insbesondere keine rein quadratischen Glieder enthält, einen zweiecklosen Graphen mit n Punkten darstellt, ohne daß man jetzt die Bedingung stellen muß, daß jede Veränderliche in der Form wirklich auftritt. Bei festem n ist die Anzahl der formal verschiedenen Formen dieser Art gleich $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, und diese Tatsache gibt zu der folgenden hübschen Formel Veranlassung:

Wir nennen zwei Graphen verschieden, wenn sie sich nicht eindeutig umkehrbar aufeinander abbilden lassen; betrachten wir nun alle verschiedenen zweiecklosen Graphen mit n Punkten und bezeichnen wir die Ordnungen ihrer Automorphismengruppen mit $g_1, g_2, \ldots$, so gilt die Formel:

$$\sum_s \frac{1}{g_s} = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}.$$

Würde man hingegen mit König isolierte Punkte ausschließen, so würde keine so einfache Formel gelten.

Diese Formel entspricht übrigens ganz der von Herrn Pólya auf S. 209 seiner Arbeit [1]) angegebenen Formel

$$\sum_s \frac{1}{h_s} = \frac{n^{n-2}}{n!}$$

für die Ordnungen der Gruppen der verschiedenen „Bäume" mit n Punkten. Auch der Beweis verläuft ganz analog, so daß wir ihn hier übergehen können.

(Eingegangen den 15. September 1938.)