HANS FREUDENTHAL

Über ein Beugungsproblem aus der elektromagnetischen Lichttheorie

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 221-227
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__221_0>

Über ein Beugungsproblem aus der elektromagnetischen Lichttheorie

von

Hans Freudenthal

Amsterdam

1. Das ebene Beugungsproblem, das Herr W. Sternberg kürzlich[1]) behandelt hat, kommt mathematisch darauf hinaus:

Gesucht wird eine Lösung $E(x, y)$ der Differentialgleichung

$$\Delta E + k^2 E = 0,$$

in der k^2 eine Größe bedeutet, die im Innern T_i der (genügend glatten) Jordankurve C der x-y-Ebene den Wert

$$k_i^2 = \frac{n^2\varepsilon - in\sigma}{c^2}$$

und im Äußern T_a von C den Wert

$$k_a^2 = \frac{n^2}{c^2}$$

hat; die Schwingungszahl n soll dabei positiv sein, die Dielektrizitätskonstante ε reell und die Leitfähigkeit σ nichtnegativ, so daß jedenfalls

$$\Im k_i^2 \leqq 0, \quad \Im k_a^2 = 0, \quad k_a > 0 \tag{1}$$

ist[2]). Weiter soll E beim Durchgang durch C mit samt seiner Normalableitung stetig sein (Maxwellsche Grenzbedingung) und soll die Abweichung $U = E - A$ zwischen E und einem gegebenen A (einfallende Welle), das überall

$$\Delta A + k_a^2 A = 0$$

[1]) W. Sternberg, Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie [Compositio Math. 3 (1936), 254—275].

[2]) $\Im$ bezeichnet den Imaginärteil.

befriedigt, der Sommerfeldschen Aussstrahlungsbedingung [3])

$$\frac{\partial U}{\partial r} + ik_a U = o(r^{-\frac{1}{2}})$$

genügen ($r^2 = x^2 + y^2$).

Herr Sternberg hat die Aufgabe auf eine Integralgleichung

$$E(P) = (k_i^2 - k_a^2)\iint\limits_{T_i} G(P, Q)\, E(Q)\, d\sigma_Q + A(P)$$

zurückgeführt. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung hat Herr Sternberg (wie bereits Sommerfeld [4])) daraus erschlossen, daß die zugehörige homogene Gleichung ($A \equiv 0$)

$$U(P) = (k_i^2 - k_a^2)\iint\limits_{T_i} G(P, Q)\, U(Q)\, d\sigma_Q \tag{2}$$

die Eigenschwingungen beschreibt und daher aus physikalischen Gründen (Dämpfung) keine nichttriviale Lösung besitzen darf [5]). Mit Recht hat Herr V. Kupradze (brieflich) bemerkt, daß hier eine Beweislücke vorliege.

Herr Kupradze hat früher bereits [6]) die Lösungsexistenz für die folgende Sommerfeldsche Aufgabe (a.a.O.) zu beweisen versucht: Gesucht in T_a eine Lösung von

$$\Delta E + k^2 E = 0$$

(k^2 reell), die auf C verschwindet (bzw. deren Normalableitung auf C verschwindet), und die der Ausstrahlungsbedingung

---

[3]) Bei Sternberg findet sich in der Ausstrahlungsbedingung ein Versehen; es muß (wie bei uns) o und nicht O heißen. — Faßt man die Ausstrahlungsbedingung als gewöhnliche lineare Differentialgleichung für U auf, und integriert man nach der üblichen Methode, so bemerkt man, daß $|U|$ beschränkt ist. Das braucht man sehr wesentlich, wenn man die Differentialgleichung in die Integralgleichung umformen will (bei Sternberg, S. 263, Z. 8; doch wird das dort nicht explizit erwähnt). Demgemäß korrigiere man bei Sternberg, S. 263, Z. 6: $o\left(r^{-\frac{1}{2}}\right)$ statt $O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)$; ferner S. 263, Z. 8: $o(r^{-1})$ statt $O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)$.

[4]) A. Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung [Jahresb. D. M. V. **21** (1912), 309—353]. — Sommerfeld weist jedoch daraufhin, daß dieser Schluß mathematisch unzureichend ist.

[5]) Das Dämpfungsargument kann natürlich nur für nichtverschwindende Leitfähigkeit (also $\Im k_i^2 < 0$) herangezogen werden; die von Sternberg (S. 271) erwähnte Ausbreitung der Schwingung in den Raum dürfte kaum als Argument brauchbar sein.

[6]) V. Kupradze, Über das Ausstrahlungsprinzip von A. Sommerfeld [C. R. URSS (n. s.) **1934**, **1**, 55—58].

genügt. Sein Beweis ist aber nicht ganz überzeugend [7]). Später [8]) hat Herr Kupradze — unabhängig — auch Herrn Sternbergs oben auseinandergesetzte Aufgabe (noch etwas verallgemeinert) behandelt; auch hier sind einige Einwände zu erheben. [9])

Wir werden hier die eindeutige Existenz der Lösung des von Herrn Sternberg behandelten Problems beweisen. Noch etwas einfacher läßt sich das ursprüngliche Sommerfeldsche Problem erledigen, und dieselben Methoden leisten auch das Analoge bei den entsprechenden Problemen in mehr Dimensionen (z.B. Sommerfeld, a.a.O.).

2. Wir haben zu zeigen, daß (2) unter der Voraussetzung (1) nur die triviale Lösung besitzt. Aus (2) folgt

$$\begin{aligned} \Delta U + k_i^2 U &= 0 \text{ in } T_i, \\ \Delta U + k_a^2 U &= 0 \text{ in } T_a, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} + ik_a U &= O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} - ik_a \bar{U} &= O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

(siehe Sternberg, a.a.O., 264—265).

Aus (2) folgt weiter wegen der asymptotischen Eigenschaften von $G(P, Q)$ (siehe Sternberg (11), (12)):

$$U = O(r^{-\frac{1}{2}}). \tag{5}$$

Mit U und $\bar{U}$ setzen wir nun die Greensche Formel an:

$$\iint\limits_{\Sigma_r} (U\Delta\bar{U} - \bar{U}\Delta U)\, d\sigma = \int\limits_{S_r} \left(U\frac{\partial \bar{U}}{\partial r} - \bar{U}\frac{\partial U}{\partial r}\right) ds; \tag{6}$$

hier bezeichnet S_r den Kreis um den Ursprung mit dem Radius r und Σ_r sein Inneres. Dann zerlegen wir:

$$\iint\limits_{\Sigma_r} = \iint\limits_{T_i} + \iint\limits_{\Sigma_r - T_i} .$$

[7]) In Formel (6) wird eine unbewiesene Reihenentwicklung angesetzt. Danach werden die Reihenglieder einfach abgeschätzt, während sie *gleichmäßig* abgeschätzt werden müßten.

[8]) V. Kupradze, Verbreitung der elektromagnetischen Wellen in nichthomogenem Medium [C. R. URSS (n.s.) **1936**, **1**, 7—9].

[9]) Verf. beruft sich auf die Resultate seiner bereits kritisierten Note (a.a.O. [6])), die von anderen Voraussetzungen ausgeht.

Hier verschwindet der zweite Summand wegen (1) und (3); der erste erhält bei Anwendung von (3) die Gestalt

$$\iint\limits_{T_i}(k_i^2-\overline{k_i^2})U\overline{U}d\sigma = 2i\Im(k_i^2)\iint\limits_{T_i}|U|^2 d\sigma\,,$$

ist also wegen (1) reinimaginär mit nichtpositivem Imaginärteil. Für die *linke* Seite von (6) ergibt sich

$$\frac{1}{2i}\iint\limits_{\Sigma_r}(U\Delta\overline{U}-\overline{U}\Delta U)\,d\sigma = \text{const} \leqq 0. \tag{7}$$

Die *rechte* Seite von (6) formen wir mit Hilfe von (4) und (5) um; wir ersetzen die Ableitung von U und $\overline{U}$ durch U und $\overline{U}$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{S_r}\left(U\frac{\partial\overline{U}}{\partial r}-\overline{U}\frac{\partial U}{\partial r}\right)ds &= \\ &= \int\limits_{S_r}\left[U\cdot\left(O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)+ik_a\overline{U}\right)-\overline{U}\cdot\left(O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)-ik_aU\right)\right]ds \\ &= 2ik_a\int\limits_{S_r}|U|^2\,ds+\int\limits_{S_r}U\cdot O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)ds+\int\limits_{S_r}\overline{U}\cdot O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)ds.\end{aligned}$$

Also

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{S_r}\left(U\frac{\partial\overline{U}}{\partial r}-\overline{U}\frac{\partial U}{\partial r}\right)ds = k_a\int\limits_{S_r}|U|^2\,ds-\int\limits_{S_r}|U|\,O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)ds. \tag{8}$$

(6), (7) und (8) zusammen liefern wegen (1)

$$\int\limits_{S_r}|U|^2\,ds-\int\limits_{S_r}|U|\,O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)ds = \text{const} \leqq 0\,.$$

Hier ist links der erste Summand sicher nicht negativ und der zweite wegen (5) ein $O(r^{-1})$; die Konstante rechts kann also unmöglich negativ sein [10]). Mit φ als Polarwinkel der x-y-Ebene haben wir somit

$$\int\limits_{S_r}|U|^2 d\varphi = \int\limits_{S_r}|U|\,O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right)d\varphi\,.$$

Setzen wir allgemein für eine Funktion $g = g(x, y)$

$$\|g\| = \left(\int\limits_{S_r}|g|^2\,d\varphi\right)^{\frac{1}{2}}$$

[10]) Für positive Leitfähigkeit, also $\Im k_i^2 < 0$, folgt daraus schon ohne weiteres $U = 0$, da sonst die Konstante negativ würde. Nur für verschwindende Leitfähigkeit, also $\Im k_i^2 = 0$, braucht man unsere weiteren Schlüsse.

(das ist eine Funktion von r), so haben wir bekanntlich (nach der Schwarzschen Ungleichung)

$$\|g_1+g_2\| \leqq \|g_1\| + \|g_2\|, \qquad \left|\int\limits_{S_r} g_1 g_2 d\varphi\right| \leqq \|g_1\| \cdot \|g_2\|.$$

Hier ergibt das

$$\|U\|^2 = \|U\|\, O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right),$$

also

$$\|U\| = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{9}$$

Das ist nun zwar keine Abschätzung für U, es leistet aber dieselben Dienste wie eine Abschätzung für U, da U nun immer unter einem Integralzeichen auftreten wird (siehe (13) und (15)!).

Aus (9) und (4) schließen wir noch

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial r}\right\| = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{10}$$

3. H sei eine in T_a definierte Lösung von

$$\Delta H + k_a^2 H = 0, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} H &= o(r^{\frac{1}{2}}), \\ \frac{\partial H}{\partial r} &= o(r^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dann ist

$$0 = \iint\limits_{\Sigma_r - \Sigma_{r_0}} (H\Delta U - U\Delta H)\, d\sigma =$$
$$= \int\limits_{S_r}\left(H\frac{\partial U}{\partial r} - U\frac{\partial H}{\partial r}\right) ds - \int\limits_{S_{r_0}}\left(H\frac{\partial U}{\partial r} - U\frac{\partial H}{\partial r}\right) ds,$$

sobald T_i ganz in Σ_{r_0} liegt. Für $r \geqq r_0$ ist demnach

$$\int\limits_{S_r}\left(H\frac{\partial U}{\partial r} - U\frac{\partial H}{\partial r}\right) ds$$

unabhängig von r; andererseits konvergiert dieser Ausdruck für $r \to \infty$ wegen (9), (10) und (12) nach 0. Mithin ist

$$\int\limits_{S_r}\left(H\frac{\partial U}{\partial r} - U\frac{\partial H}{\partial r}\right) ds = 0 \text{ für } r \geqq r_0. \tag{13}$$

Für H wählen wir

$$H = H_m^{(2)}(k_a r)\cos m\varphi; \tag{14}$$

hier soll H_m die Hankelsche Funktion m-ter Ordnung [11]) zweiter Art sein. (11) und (12) sind dann sicher erfüllt. Wir bezeichnen mit $f_m = f_m(r)$ für $r \geqq r_0$ den Fourierkoeffizienten

$$f_m = \int\limits_{S_r} U \cos m\varphi \, d\varphi \,. \tag{15}$$

Mit (14) gehen wir in (13) hinein:

$$0 = H_m^{(2)} \int\limits_{S_r} \frac{\partial U}{\partial r} \cos m\varphi \, d\varphi - H_m^{(2)\prime} \int\limits_{S_r} U \cos m\varphi \, d\varphi$$

oder

$$H_m^{(2)} f_m' = H_m^{(2)\prime} f_m \qquad \text{für } r \geqq r_0$$

(der Strich bezeichne die Ableitung nach r). Hieraus folgt

$$f_m(r) = c_m H_m^{(2)}(k_a r) \qquad \text{für } r \geqq r_0 \tag{16}$$

mit konstanten c_m.

Berücksichtigt man (9) in (15), so sieht man:

$$f_m(r) = O\left(r^{-\frac{3}{2}}\right);$$

da $H_m(r)$ aber sicher nur ein $O(r^{-\frac{1}{2}})$ ist, kann (16) nur mit $c_m = 0$ genügt werden. Also

$$\int\limits_{S_r} U \cos m\varphi \, d\varphi = 0$$

und $\qquad\qquad$ für $r \geqq r_0$,

$$\int\limits_{S_r} U \sin m\varphi \, d\varphi = 0$$

wenn man in (14) statt mit cos mit sin arbeitet. Das Verschwinden der Fourierkoeffizienten zieht das Verschwinden von U selbst für $r \geqq r_0$ nach sich und das wiederum (in bekannter Weise) das Verschwinden von U und $\frac{\partial U}{\partial r}$ in ganz T_a, also auch auf C, also auch in T_i. U ist somit identisch null, w.z.b.w.

4. Will man dasselbe für das ursprüngliche Sommerfeldsche Problem beweisen, so erstrecke man in (6) das Integral links über $\Sigma_r - T_i$ (wegen des Verschwindens von U oder $\frac{\partial U}{\partial n}$ auf C

---

[11]) Wegen der hier verwendeten Eigenschaften der Hankelschen Funktionen siehe: G. N. Watson, Theory of Bessel Functions [Cambridge 1922]. — Als Argument von H_m denke man sich im Folgenden immer $k_a r$ eingetragen.

kann die rechte Seite so bleiben). Die linke Seite von (6) verschwindet dann wegen (1) und man erhält gleich die Formel (7), von der aus man wie früher weiterschließt.

Auf das magnetische Feld und auf höherdimensionale Analoga (bei denen Sprungunstetigkeiten an der Trennungsfläche von T_i und T_a berücksichtigt werden müssen) brauchen wir nicht einzugehen, da sie, was unsere Ausführungen betrifft, keinerlei neue Gesichtspunkte bieten.

(Eingegangen den 20. September 1937. Abgeändert den 17. Juli 1938.)