COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS FREUDENTHAL

Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Große Dimensionen

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 299-314

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__299_0>

Über die Klassen der Sphärenabbildungen

I. Große Dimensionen

von

Hans Freudenthal

Amsterdam

Mit dieser Arbeit soll eine Reihe von Untersuchungen über die Klassen der Sphärenabbildungen beginnen. Unsere Ergebnisse handeln von den Hurewiczschen Homotopiegruppen [1]); aber die Elemente der e-ten Homotopiegruppe $\pi_e(S^d)$ der d-dimensionalen Sphäre ($d>0$) sind ja im Wesentlichen die Klassen der Abbildungen der S^e in die S^d. Für $\pi_e(S^d)$ sagen wir kürzer auch (d^e). Wir dürfen $e - d = k > 0$ voraussetzen und wollen Sphärenpaare mit demselben k zu einem „k-Stamm" zusammenfassen.

Um *zwei* Homomorphismen dreht sich unsere Untersuchung. Der erste wird erzeugt von der Hopfschen Klasseninvariante [2]) $\mathfrak{c}(f)$ von Abbildungen $f(S^e) \subset S^d$ mit $d = k + 1$. Nichts hindert uns, $\mathfrak{c}(f)$ für alle $d \geqq k + 1$ als definiert anzusehen; für $d>k+1$ hat man dann $\mathfrak{c}(f) \equiv 0$. (Für $d<k+1$ hätte man die Hopfschen Invarianten ganz neu zu definieren; wir gehen hier darauf nicht ein.) $\mathfrak{c}$ kann man auch auffassen als einen Homomorphismus

$$\mathfrak{c}(d^e) \subset (d^{k+1}) \quad (d \geqq k+1),$$

d.h. für $d = k + 1$ in die Additionsgruppe der ganzen Zahlen und für $d > k + 1$ in die Nullgruppe. Die durch $\mathfrak{c}(f)=0$ definierte Untergruppe von (d^e) heiße $(d^e)_0$; sie fällt für $d > k + 1$ und bei ungeradem d auch für $d = k + 1$ [3]) mit (d^e) zusammen. Die Faktorgruppe $(d^e)/(d^e)_0$ heiße auch $(d^e)^*$.

---

[1]) W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen, I—IV [Proc. Akad. Amsterdam **38** (1935), 112—119, 521—528; **39** (1936), 117—125, 215—224], insbesondere I.

[2]) H. Hopf, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche [Math. Ann. **104** (1931), 637—665], Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension [Fund. Math. **25** (1935), 427—440]. — Zitiert bzw. mit Hopf I, II.

[3]) Hopf II, Satz I.

Der andere Homomorphismus, die „Einhängung" ($\mathfrak{E}$ genannt), ist viel einfacherer Art, aber noch nirgends behandelt worden. $\mathfrak{E}$ ordnet einer Abbildung $f(S^e) \subset S^d$ zu eine Abbildung $\mathfrak{E}f(S^{e+1}) \subset S^{d+1}$ und zwar so: Man fasse S^d bzw. S^e als Äquatorsphäre von S^{d+1} bzw. S^{e+1} auf und setze f so fort, daß nördliche in nördliche und südliche in südliche Halbkugel übergehen. Man hat

$$\mathfrak{E}(d^e) \subset (d+1^{e+1}).$$

Es ist klar, daß für $d \geqq k$

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{E}(d^e)) = 0$$

ist. Wir werden aber beweisen:

Satz I: $\mathfrak{E}(d^e) = (d+1^{e+1})_0$ für $d \geqq k$.

Oder: dann und nur dann läßt sich eine Abbildungsklasse der S^e in die S^d ($d \geqq k+1$) durch Einhängung erzeugen, wenn ihre Invariante verschwindet. — Für $d > k+1$ und für ungerades $d = k+1$ lassen sich also *alle* Klassen durch Einhängung erzeugen.

In zwei Richtungen läßt sich der Homomorphismus $\mathfrak{E}$ weiter untersuchen: erstens fragen wir „was geschieht bei Anwendung von $\mathfrak{E}$ mit $(d^e)_0$?", zweitens „was geschieht mit $(d^e)^*$?". Satz II und III antworten auf diese Fragen ziemlich vollständig.

Satz II: $\mathfrak{E}$ bildet $(d^e)_0$ *isomorph* ab (d.h. aus $\mathfrak{E}g = 0$ und $\mathfrak{c}(g) = 0$ folgt $g = 0$)

1.) für $d > k+1$,

2.) für *gerades* $d = k+1$,

3a.) für *ungerades* $d = k+1$, falls $(d+1^{e+2})$ ein Element mit der Invariante 1 enthält. — Im Falle

3b.) eines *ungeraden* $d = k+1$, für das $(d+1^{e+2})$ *kein* Element mit der Invariante 1 enthält, führt $\mathfrak{E}$ jedenfalls höchstens *die* Elemente von $(d^e)_0$ in die Null über, die die Ordnung zwei besitzen.

Bei der Anwendung dieses Satzes beachte man, daß in den Fällen 1 und 3 $(d^e) = (d^e)_0$ ist. — Der Fall 3a liegt sicher vor für $d = 1, 3, 7$.[4]) Ob Fall 3b überhaupt möglich ist, ist nicht bekannt.

Aus Satz I und II kann man die Folgerung ziehen:

In jedem k-Stamm bleiben von $d = k+2$ an die Homotopie-

---

[4]) Hopf II, Satz II'.

gruppen konstant. Der Schritt von $d = k + 1$ nach $d = k + 2$ (und für gerades k auch der Schritt von $d = k$ nach $d = k + 1$) zieht bei den Homotopiegruppen höchstens eine „Verkleinerung" nach sich.

SATZ III: Für gerades $d=k+1$ gilt:

Ist $g \epsilon (d^e)$ und $\mathfrak{c}(g)$ *ungerade*, so ist $\mathfrak{E}g \neq 0$. Dagegen gibt es zu jedem $c \epsilon \mathfrak{c}(d^e)$ ein $h \epsilon (d^e)$ mit $\mathfrak{c}(h) = 2c$ und $\mathfrak{E}h = 0$. Oder:

a.) Wenn (d^e) ein Element mit der Invariante 1 besitzt, so enthalten die und nur die Restklassen von $(d^e)_0$ in (d^e), deren Invariante *gerade* ist, ein Element, das durch $\mathfrak{E}$ in die Null abgebildet wird.

b.) Sonst enthält jedenfalls mindestens jede Restklasse mit durch 4 teilbarer Invariante ein Element, das durch $\mathfrak{E}$ in die Null abgebildet wird.

Die Äquivalenz beider Formulierungen folgt daraus, daß alle geraden Werte der Invariante sicher auftreten (Hopf II, 431, Satz II').

Unsere Ergebnisse sind — im Gegensatz zu dem, was sonst über Sphärenabbildungen bekannt geworden ist [5]) — sehr allgemeiner Natur. Die speziellen Folgerungen, die man *ganz unmittelbar* aus ihnen ziehen kann, sind nicht sehr zahlreich. Wir erwähnen:

(3^4) enthält genau zwei Elemente. (Folgt aus IIIa, da $(2^3)_0$ nach I nur aus der 0 besteht [6]).)

(d^{d+1}) besteht für $d \geqq 3$ aus genau zwei Elementen. (Folgt nun aus I, II, 1.)

(2^4) enthält genau zwei Elemente. (Folgt nach Hurewicz [7]) aus dem Ergebnis für (3^4).)

(d^{d+2}) enthält höchstens zwei Elemente. [8])

(5^8) und (9^{16}) enthalten mindestens zwei Elemente. (Folgt aus IIIa.)

(d^{d+3}) für $d \geqq 4$ und (d^{d+7}) für $d \geqq 8$ enthalten mindestens zwei Elemente.

---

[5]) Das sind 1.) die Resultate von H. HOPF (a.a.O. [2])), 2.) ein Resultat von W. HUREWICZ (a.a.O. [7])) und 3.) das von L. PONTRJAGIN ohne Beweisskizze angekündigte vollständige Resultat [Kongreß Oslo 1936, II, 140] über den 1-Stamm und den 2-Stamm.

[6]) Dies Ergebnis hinsichtlich $(2^3)_0$ ist zuerst von W. Hurewicz bewiesen worden (I, 119).

[7]) I, 119, Zeile 4.

[8]) Das vollständige Resultat für den 2-Stamm (siehe [5])) scheint aus den hier entwickelten Sätzen nicht unmittelbar zu folgen; es ergibt sich aber auf einem Umweg aus den Sätzen, die ich für „kleine" Dimension zu begründen beabsichtige.

Ich hoffe aber, in weiteren Arbeiten mehr spezielle Ergebnisse begründen zu können. Unter anderm dadurch, daß ich für die „kleinen" Dimensionen der k-Stämme ($d \leqq k$) analoge Sätze beweisen werde, die allerdings eine Neudefinition der Hopfschen Invariante voraussetzen.

Satz I für $d > k$ (statt $d \geqq k$), Satz II für $d > k + 1$ (statt $d > k$), Satz IIIa, wenn man sich auf „mindestens jede Restklasse . . ." beschränkt, und Satz IIIb darf man ganz elementar, ja fast trivial nennen. Wo aber die Hopfsche Invariante aktiv mitspielt, braucht man als tiefliegendes Hilfsmittel einen Hopfschen Überführungssatz. (Siehe [20].) Bei Satz I für $d > k$ und Satz II für $d > k + 1$ kann man sogar alle kombinatorischen Methoden entbehren. Ich habe die leichteren Fälle nicht besonders behandelt, weise aber darauf hin, daß für diese Fälle die Betrachtungen aus 4—6 überflüssig sind und die aus 7—9 stark vereinfacht werden können.

1. *Homotopiegruppen.*

Für die e-te Homotopiegruppe $\pi_e(R)$ eines zusammenhängenden, im Kleinen zusammenziehbaren, separablen metrischen Raumes R hat man nach W. Hurewicz [9]) zwei Definitionen, die sich aber eigentlich nur dem Wortlaut nach voneinander unterscheiden:

1.) $\pi_e(R)$ ist die Wegegruppe (gleichgültig welcher Komponente) des Raumes derjenigen Abbildungen der S^{e-1} [10]) in R, bei denen ein fester Punkt in einen festen Punkt übergeht.

2.) Die Elemente von $\pi_e(R)$ sind die Klassen von Abbildungen der S^e in R, bei denen ein fester Punkt p in einen festen Punkt p' übergeht; die Gruppenoperation (Addition) zwischen zwei Abbildungsklassen, die durch $f_1(S^e) \subset R$ und $f_2(S^e) \subset R$ definiert seien, ist so erklärt: eine S^{e-1} mit $p \in S^{e-1}$ teile die S^e in zwei zueinander symmetrische Halbkugeln V_1^e und V_2^e; φ_ν bilde V_ν^e mit dem Grad 1 auf S^e ab ($\nu=1, 2$), und es sei $\varphi_\nu(S^{e-1})=p$; die Abbildung h, die auf V_ν^e ($\nu=1, 2$) als $f_\nu\varphi_\nu$ erklärt ist, bestimmt die Summenklasse der Klassen von f_1 und f_2.

Die Äquivalenz beider Definitionen folgt unmittelbar daraus, daß man einen geschlossenen Weg von unwesentlichen Abbildungen der S^{e-1} in R mit der konstanten Abbildung anfangen und endigen lassen und daher als eine Abbildung der S^e in R auffassen kann.

[9]) I, 113—114.

[10]) Mit S werden immer Sphären, mit V Vollkugeln bezeichnet; obere Indices geben Dimensionen an.

Die Homotopiegruppen sind von der zweiten an abelsch [11]); für die Sphären ist übrigens auch die erste abelsch (sie besteht allein aus der Null).

2. *Homotopiegruppen von Sphären.*

Die e-te Homotopiegruppe $\pi_e(S^d)$ der Sphäre S^d nennen wir auch (d^e).

2.1. Bei der Feststellung der Wesentlichkeit oder Unwesentlichkeit einer Abbildung $f(S^e) \subset S^d$ übt die Forderung $f(p)=p'$ keinen Einfluß aus. Für $d > 1$ folgt das daraus, daß bei einer Überführung das Bild von p (nach simplizialer Approximation) einen eindimensionalen, also zusammenziehbaren Weg zurücklegt; für $d = 1$, $e > 1$ folgt es aus der Unwesentlichkeit aller derartigen Abbildungen und für $d = e = 1$ daraus, daß der Grad die Abbildungsklassen charakterisiert.

Wir werden daher — wo kein Mißverständnis möglich ist — mit f, g, h nicht nur Sphärenabbildungen, sondern auch zugehörige Abbildungsklassen und Elemente von Homotopiegruppen (d^e) bezeichnen. Die Mächtigkeit von (d^e) ist natürlich dieselbe wie die der Menge der Abbildungsklassen $f(S^e) \subset S^d$.

2.2. Sei $f_\nu \in (d^e)$ $(\nu=1, 2)$, $g \in (c^d)$. Dann gilt das distributive Gesetz

$$g(f_1 \pm f_2) = gf_1 \pm gf_2,$$

das aus der zweiten Definition der Homotopiegruppen unmittelbar folgt.

Dagegen braucht mit $f_\nu \in (c^d)$, $g \in (d^e)$ das *rechtsseitige* distributive Gesetz keineswegs zu gelten (siehe den Fall $c = d = 2$, $e = 3$).

3. *Einhängung.*

3.1. Aus einer Abbildung $f(S^e) \subset S^d$ konstruieren wir eine Abbildung $\mathfrak{E}f$, $\mathfrak{E}f(S^{e+1}) \subset S^{d+1}$, vermöge eines Prozesses, den wir „Einhängung" ($\mathfrak{E}$) nennen: Wir fassen S^d bzw. S^e als Äquatorsphäre von S^{d+1} bzw. S^{e+1} auf und setzen f so fort, daß nördliche in nördliche und südliche in südliche Halbkugel übergeht.

3.2. Will man — was nicht unbedingt nötig ist — $\mathfrak{E}f$ genauer festlegen, so verfahre man so: Man beschreibe einen Punkt der S^{d+1} bzw. S^{e+1} durch ein Paar (p', β) bzw. (p, β), in dem $p' \in S^d$, $p \in S^e$ und (die „geographische Breite") β reell und $|\beta| \leqq 1$ ist; dabei sollen alle Paare $(p', 1)$ bzw. $(p, 1)$ denselben Punkt (Nordpol

[11]) Hurewicz I, 114.

der S^{d+1} bzw. S^{e+1}) beschreiben, ebenso alle Paare $(p', -1)$ bzw. $(p, -1)$ (Südpol). Dann setze man $\mathfrak{E}f(p, \beta) = (f(p), \beta)$. [12])

3.3. Die „Breitensphäre" $\beta = \beta_0$ von S^{d+1} nennen wir $S^d_{\beta_0}$; die „Kappe" $\beta \geqq \beta_0$ bzw. $\beta \leqq \beta_0$ heiße auch $V^{d+1}_{\geqq 0}$ bzw. $V^{d+1}_{\leqq \beta_0}$; die „Zone" zwischen $S^d_{\beta_1}$ und $S^d_{\beta_2}$ heiße $V^d_{\beta_1, \beta_2}$. Analoges gelte bei S^{e+1}.

3.4. Gehören f und g zur gleichen Abbildungsklasse, so gilt das auch für $\mathfrak{E}f$ und $\mathfrak{E}g$. $\mathfrak{E}$ läßt sich also als ein zwischen Abbildungsklassen wirkender Operator auffassen. Aus der ersten Definition der Homotopiegruppen folgt unmittelbar, daß für $f, g \in (d^e)$ gilt

$$\mathfrak{E}(f \pm g) = \mathfrak{E}f \pm \mathfrak{E}g.$$

$\mathfrak{E}$ ist also ein *Homomorphismus*

$$\mathfrak{E}(d^e) \subset (d+1^{e+1}).$$

3.5. Sei $f \in (d^e)$, $g \in (c^d)$. Dann ist

$$\mathfrak{E}(gf) = \mathfrak{E}g \cdot \mathfrak{E}f.$$

3.6. Für alle Dimensionen bezeichne (-1) die Abbildungsklasse mit dem Grad -1 einer Sphäre auf sich. Man hat

$$\mathfrak{E}(-1) = (-1).$$

3.7. Sei f von der Form $\mathfrak{E}g$, $g \in (d^e)$. Dann ist $(-1)f = -f$. Deutet man nämlich (-1) als Spiegelung am Äquator der S^{e+1} bzw. S^{d+1} und wählt man für $\mathfrak{E}g$ speziell die Gestalt aus 3.2, so bemerkt man: $(-1)f = f \cdot (-1)$. Nach 2.2 ist $f \cdot (-1) = -f$, und daraus folgt die Behauptung.

3.8. $\mathfrak{E}((-1)g) = \mathfrak{E}(-g)$. — Das folgt aus 3.7, wenn man berücksichtigt, daß wegen 3.5 und 3.6 $\mathfrak{E}((-1)g) = \mathfrak{E}(-1) \cdot \mathfrak{E}g = (-1)\mathfrak{E}g$ ist.

3.9. Wir setzen $e - d = k$ und fassen Sphärenpaare mit denselben k zu einem „k-Stamm" zusammen. Durch die Einhängung kommen wir aus einem k-Stamm nicht heraus.

Von jetzt an soll immer $k > 0$ sein.

4. *Die Hopfsche Invariante.*

4.1. Alle kombinatorischen Begriffe beziehen sich, wo nichts Anderes bemerkt wird, auf die Additionsgruppe der ganzen

---

[12]) Die Einhängung wird so ein Spezialfall der „Verbindung" (siehe Verf. [Fund. Math. 29 (1937), 145—150]), nämlich Verbindung mit einer nulldimensionalen Sphäre.

Zahlen als Koeffizientenbereich. $\mathfrak{r}$ bezeichne die kombinatorische Randbildung. $\mathfrak{m}$ vor einem (algebraischen) Komplex bezeichne die diesem Komplex zugrundeliegende Menge (wir führen diese Bezeichnungsweise allerdings nicht ganz streng durch). S^d und S^e sollen immer mit einer bestimmten Orientierung gegeben sein. Bei der Einhängung seien dann S^{d+1}, S^d_β, $V^{d+1}_{\geqq\beta}$, $V^d_{\leqq\beta}$ stets so orientiert, daß $S^{d+1} = V^{d+1}_{\geqq\beta} + V^d_{\leqq\beta}$, $\mathfrak{r}V^{d+1}_{\geqq\beta} = -\mathfrak{r}V^{d+1}_{\leqq\beta} = S^d$ und Analoges für S^{e+1} usw. gelte.

4.2. Es sei K^{k+1} ein Komplex $\subset S^e$, $\mathfrak{r}K^{k+1} = Z^k$, $f(S^e) \subset S^d$, $f(\mathfrak{m}Z^k) = p'$, $e - d = k$, $d \geqq k + 1$. Der Grad der Abbildung von K^{k+1} in S^d hat dann einen Sinn; er hängt nur von f und Z^k ab und werde mit $\mathfrak{c}_{Z^k}(f)$ bezeichnet.

4.3. $f(S^e) \subset S^d$ sei simplizial; p' sei innerer Punkt des Simplexes t'^d von S^d. Nach H. Hopf [13]) gibt es einen „Urbildzyklus" Z^k, dessen $\mathfrak{m}Z^k$ mit der Urbildmenge von p' identisch ist. Für $d \geqq k + 1$ sei $\mathfrak{c}(f)$ erklärt als $\mathfrak{c}_{Z^k}(f)$ (das unabhängig von p' ist [13])). $\mathfrak{c}(f)$ ist die Hopfsche Klasseninvariante [13]). Für $d > k+1$ ist $\mathfrak{c}(f) \equiv 0$.

4.4. Für $d \geqq k + 1$ und $f, g \in (d^e)$ gilt

$$\mathfrak{c}(f \pm g) = \mathfrak{c}(f) \pm \mathfrak{c}(g).$$

Das ergibt sich ohne weiteres aus der zweiten Definition der Homotopiegruppe, wenn man in 4.3 den Punkt p' so wählt, daß er verschieden von dem Punkt p' aus 1, 2 ist, und ferner in 4.3 K^{k+1} so, daß es den Punkt p aus 1, 2 nicht enthält.

Deutet man $\mathfrak{c}(f)$ und $\mathfrak{c}(g)$ als Abbildungsgrade (von S^d auf sich), so darf man auch sagen:

$\mathfrak{c}$ bildet (d^e) homomorph ab in (d^{k+1}).

4.5. Für $f = \mathfrak{E}g$ ist $\mathfrak{c}(f) = 0$. (Klar.)

Mit der Bezeichnung von 3.6 gilt:

4.6. $\mathfrak{c}((-1)f) = \mathfrak{c}(f)$. (Siehe Hopf I, 639, Eigensch. IIb'.)

5. *Ein Hilfssatz.*

5.1. Das $\mathfrak{m}Z^k$ aus 4.3 besitzt (nach geeigneter Unterteilung) die Eigenschaft:

α) Jedes Simplex u^{k-1} von $\mathfrak{m}Z^k$ liegt auf genau zwei u^k von $\mathfrak{m}Z^k$.

„Mindestens zwei" folgt daraus, daß Z^k ein Zyklus ist. — Das Urbild von p' innerhalb einer t^{e-2} von S^e ist höchstens $(k-2)$-dimensional, ein u^{k-1} von $\mathfrak{m}Z^k$ liegt also entweder in einem t^{e-1} oder sein Inneres liegt im Innern eines t^e. Daß u^{k-1} auf höchstens zwei u^k von $\mathfrak{m}Z^k$ liegt, folgt im ersten Fall daraus, daß

[13]) I, § 1—3.

jedes t^{e-1} auf höchstens zwei t^e liegt, im zweiten Fall daraus, daß der Schnitt von $\mathfrak{m}Z^k$ mit einem t^e eine konvexe Zelle ist.

5.2. Von Pseudomannigfaltigkeiten pflegt man außer (α) noch zu fordern:

(β) Je zwei u^k lassen sich verbinden durch eine Kette von u^k, in der zwei aufeinanderfolgende ein u^{k-1} zum Durchschnitt haben.

Da $\mathfrak{m}Z$ [14]) die Eigenschaft (α) besitzt läßt es sich (eindeutig) als Vereinigung verschiedener geschlossener Pseudomannigfaltigkeiten [14a]) $\mathfrak{m}Z_1, \ldots, \mathfrak{m}Z_r$ darstellen. Dabei ist natürlich

$$\mathfrak{c}_Z(f) = \mathfrak{c}_{Z_1}(f) + \ldots + \mathfrak{c}_{Z_r}(f).$$

Die $Z_1, \ldots, Z_r$ bilden eine k-dimensionale Homologiebasis für $\mathfrak{m}Z$ (daß sie Pseudomannigfaltigkeiten sind, spielt weiter keine Rolle).

5.3. Hilfssatz: Man darf f in seiner Abbildungsklasse so annehmen, daß (mit den Bezeichnungen von 5.2.)

$$\mathfrak{c}_{Z_1}(f) = \mathfrak{c}_Z(f), \quad \mathfrak{c}_{Z_2}(f) = \ldots = \mathfrak{c}_{Z_r}(f) = 0$$

ist.

6. *Beweis des Hilfssatzes.*

Der Beweis läßt sich anschaulich so beschreiben: Wir bringen in $\mathfrak{m}Z_1$ und $\mathfrak{m}Z_2$ je eine Ausbuchtung an, führen die Fronten der Ausbuchtungen miteinander zur Deckung und löschen sie dann aus. In $\mathfrak{m}Z_1$ und $\mathfrak{m}Z_2$ sind dann kleine Löcher geschnitten und durch einen Schlauch verbunden. Ebenso verfahren wir mit den übrigen $\mathfrak{m}Z_\nu$, bis eine einzige Pseudomannigfaltigkeit entstanden ist.

6.1. Mit den früheren Bezeichnungen sei U_ν die Vereinigung der t^e, die Punkte von $\mathfrak{m}Z_\nu$ enthalten ($\nu = 1, \ldots, r$); $f(U_\nu) = t'^d$, $f(\mathfrak{m}Z_\nu) = p' \in t'^d$. Der (mengentheoretische) Rand von U_ν wird durch f in den von t'^d abgebildet; wird dabei ein Rand-t'^{d-1} von t'^d nicht überdeckt, so können wir durch „Eindrücken" von t'^d f so abändern, daß außerhalb U_ν nichts geändert wird und das Bild von U_ν t'^d, also auch p' nicht mehr überdeckt. Derartige Z_ν können wir also von vornherein weglassen.

6.2. Auf dem Rand von U_ν ($\nu = 1, 2$) wählen wir einen Punkt q_ν so, daß $f(q_1) = f(q_2) = q'$ innerer Punkt eines Rand-t'^{d-1}

---

[14]) Wir lassen den Dimensions ndex ab und zu weg.

[14a]) Sogar als Vereinigung von Mannigfaltigkeiten. Aber das haben wir hier nicht nötig.

von t'^d ist. Es sei $q_\nu \in t_\nu^e \subset U_\nu$ ($\nu=1, 2$). Im Innern von t_ν^e bestimmen wir einen Punkt p_ν von $\mathfrak{m}Z_\nu$ ($\nu=1, 2$).

Der einfache Bogen C mit dem Parameter ξ ($|\xi| \leqq 1$) bestehe aus folgenden Stücken:

$-\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq +\frac{1}{2}$: Streckenzug von q_1 nach q_2, der $\mathfrak{m}Z$, t_1^e, t_2^e sonst nirgends trifft.

$-\frac{3}{4} \leqq \xi \leqq -\frac{1}{2}$: Strecke von p_1 nach q_1 (in t_1^e gelegen).
$\frac{1}{2} \leqq \xi \leqq \frac{3}{4}$: Strecke von q_2 nach p_2 (in t_2^e gelegen).
$-1 \leqq \xi \leqq -\frac{3}{4}$: Verlängerung von $p_1 q_1$ über p_1 (in t_1^e).
$\frac{3}{4} \leqq \xi \leqq 1$: Verlängerung von $p_2 q_2$ über p_2 (in t_2^e).

Man darf f (ohne Schaden für die Urbildmenge von p') als so abgeändert voraussetzen, daß C nebst einer kleinen Umgebung durch f in q' abgebildet wird.

D sei eine (der e-dimensionalen Vollkugel homöomorphe) Teilmenge dieser Umgebung, die in einem geeigneten cartesischen Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_{e-1}, \xi$ die Gestalt

$$D = \left(|x_1| \leqq 1, \ldots, |x_{e-1}| \leqq 1, \; |\xi| \leqq 1\right)$$

besitze. Dabei soll

$$C = (x_1 = x_2 = \ldots = x_{e-1} = 0)$$

mit ξ als dem oben definierten Parameter sein; ferner [15])

$$\begin{aligned}
D \wedge \mathfrak{m}Z_1 &= (x_{k+1} = \ldots = x_{e-1} = 0, \; \xi = -\tfrac{3}{4}),\\
D \wedge \mathfrak{m}Z\ &= (x_{k+1} = \ldots = x_{e-1} = 0, \; \xi = +\tfrac{3}{4}),\\
D \wedge U_1 &= (\xi \leqq -\tfrac{1}{2}),\\
D \wedge U_2 &= (\xi \geqq +\tfrac{1}{2}),\\
f(x_1, \ldots, x_{e-1}, \xi) &= f(x_1, \ldots, x_{e-1}, -\xi) \text{ für } |\xi| \geqq \tfrac{1}{2},\\
f(x_1, \ldots, x_{e-1}, \xi) &= q' \text{ für } |\xi| \leqq \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$\varphi_\tau(\xi)$ sei eine stetige, aber nicht überall erklärte und nicht überall eindeutige Funktion ($0 \leqq \tau \leqq 1$):

$$\varphi_\tau(-1) = -1, \; \varphi_\tau(+1) = +1 \text{ für } \tau \neq 1,$$

$$\varphi_1(\pm 1) = \text{alle Zahlen vom Betrage } \leqq 1,$$

$$\varphi_\tau(\xi) \text{ bildet } \begin{matrix} -1 \leqq \xi \leqq -\tau \\ \tau \leqq \xi \leqq 1 \end{matrix} \text{ linear auf } \begin{matrix} -1 \leqq \xi \leqq 0 \\ 0 \leqq \xi \leqq 1 \end{matrix} \text{ ab,}$$

$$\varphi_\tau(\xi) \text{ ist unerklärt für } -\tau < \xi < \tau.$$

Wir setzen:

---

[15]) $\wedge$ ist das Zeichen für die Durchschnittbildung.

$$\psi_\tau(x_1, \ldots, x_{e-1}, \xi) \begin{matrix} = (x_1, \ldots, x_{e-1}, \varphi_\tau(\xi)) \\ = (x_1, \ldots, x_{e-1}, \alpha\varphi_\tau(\xi)+(1-\alpha)\xi) \end{matrix} \text{ für Max } |x_\nu| \begin{matrix} \leqq \frac{1}{2}, \\ = 1-\frac{1}{2}\alpha \geqq \frac{1}{2}. \end{matrix}$$

χ_τ sei die Umkehrung von ψ_τ; obwohl sie nicht eindeutig ist, ist

$$f_\tau(a) = f(\chi_\tau(a))$$

eindeutig stetig.

Man überzeugt sich leicht davon, daß bei der stetigen Abänderung f_1 von f das Urbild von p' so aussieht: $Z_3, \ldots, Z_r$ sind unverändert geblieben; in $\mathfrak{m}Z_1$ und in $\mathfrak{m}Z_2$ ist ein Loch geschnitten (konzentrisch zu $D \wedge \mathfrak{m}Z_1$ bzw. $D \wedge \mathfrak{m}Z_2$), und diese Löcher sind durch einen (in D liegenden) Schlauch verbunden. Wiederholt man diesen Prozeß mit den andern Z_ν, so erhält man schließlich eine stetige Abänderung f^* von f, bei der das Urbild von p' eine einzige Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{m}Z^*$ ist. Es ist klar, daß $\mathfrak{c}_{Z^*}(f^*) = \mathfrak{c}_Z(f) = \mathfrak{c}(f)$ ist. Für die Anwendungen würde das genügen, wir tun aber noch ein Übriges und machen f^* wieder simplizial. [16])

6.3. Dabei kann es allerdings passieren, daß $\mathfrak{m}Z^*$ den Charakter einer Pseudomannigfaltigkeit verliert. Nun können wir die simpliziale Approximation f^{**} von f^* doch so wählen, daß außerhalb einer Umgebung U^* von $\mathfrak{m}Z^*$ keine neuen Urbilder von p' auftreten; U^* soll hier so bestimmt sein, daß jeder k-dimensionale Zyklus aus U^* in U^* einem Zyklus aus $\mathfrak{m}Z^*$ (also, da $\mathfrak{m}Z^*$ Pseudomannigfaltigkeit ist, einem Vielfachen von Z^*) homolog ist. Außerdem dürfen wir doch auf einigen Abstand von den Löchern und Schläuchen, wo bei allen Abänderungen die Abbildung simplizial geblieben ist, Z^{**} als im Wesentlichen [17]) mit Z^* identisch annehmen. $\mathfrak{m}Z^{**}$ besteht also aus einer Pseudomannigfaltigkeit, die als Zyklus in U^* mit Z^* homolog ist, und weiteren Bestandteilen, die in U^* homolog Null sind.

---

[16]) Ich führe das darum aus, weil die dafür in 6.3 entwickelte Methode auch sonst nützlich sein kann — besonders bei Beispielen, bei denen die Abbildung im Allgemeinen nicht in simplizialer Form gegeben sein wird.

[17]) Da man die Bildsphäre unterteilt, wird man gezwungen, auch auf größeren Abstand von Löchern und Schläuchen wieder für die Simplizialität zu sorgen. Sei u'^d das p' als inneren Punkt enthaltende Unterteilungssimplex. Im Innern eines t'^e benimmt sich das f-Urbild von u'^d wie das cartesische Produkt eines k-dimensionalen Simplexes (das in p' abgebildet wird) und eines d-dimensionalen Simplexes. Teilt man das cartesische Produkt etwa so unter, wie ich es in Fund. Math. **29** (1937), 138—142 angegeben habe, so erleidet auf größeren Abstand von Löchern und Schläuchen $\mathfrak{m}Z^*$ beim Übergang zu $\mathfrak{m}Z^{**}$ nur eine kleine Verschiebung in eine homöomorphe Menge.

War U^* klein genug gewählt, so sind wir jetzt bei der Behauptung des Hilfssatzes angelangt.

7. *Beweis von Satz I.*

In 7 sei $f \in (d^e)$, $d \geqq k$.

7.1. Um Satz I zu beweisen, braucht man nur (unter der Voraussetzung $\mathfrak{c}(f)=0$) f in seiner Abbildungsklasse so zu ermitteln, daß das Urbild von p' aus genau *einem* Punkt p besteht. Dann kann man nämlich S^e in zwei Vollkugeln V_1^e, V_2^e zerlegen (V_1^e = kleine Umgebung von p, $V_2^e = \overline{S^e \setminus V^e}$[18])), so daß weder $f(V_1^e)$, noch $f(V_2^e)$ ganz S^e überdecken. Eine einfache Abänderung bringt dann f auf die Gestalt $\mathfrak{S}g$ in der Form von 3.2.

Um zu erreichen, daß das Urbild von p' ein einziger Punkt p wird, verfahren wir so: 1.) Das Urbild $\mathfrak{m}Z^k$ von p (das bereits die in 5.3 angegebene Gestalt habe) projizieren wir aus dem Punkt $p \in \mathfrak{m}Z^k$; dabei entsteht eine (sternige) Menge L. 2.) Unter Festhaltung auf $\mathfrak{m}Z^k$ ziehen wir das Bild von L auf p' zusammen, so daß L die gesamte Urbildmenge von p' wird; dabei machen wir von $\mathfrak{c}(f) = 0$ wesentlich Gebrauch. 3.) Schließlich ziehen wir L selbst in sich auf p zusammen.

Diese drei Schritte wollen wir jetzt ausführen.

7.2. p' sei wieder innerer Punkt eines $t'^d \subset S^d$; u'^d sei ein Unterteilungssimplex im Innern von t'^d und p' innerer Punkt von u'^d. Z^k sei der Urbildzyklus von p', U die Urbildmenge von u'^d, p ein Punkt von $\mathfrak{m}Z^k$. Man beachte, daß jeder k-dimensionale Zyklus mod m $(=0, 2, \ldots)$ aus U in U einem Zyklus aus $\mathfrak{m}Z^k$ homolog ist.

Wir setzen nun $\mathfrak{c}(f) = 0$ voraus. Nach 5.3 dürfen wir dann annehmen, daß $\mathfrak{c}_{Z_\nu}(f) = 0$ ist für alle Pseudomannigfaltigkeiten $\mathfrak{m}Z_\nu^k$ $(\nu=1, \ldots, r)$, aus denen sich $\mathfrak{m}Z^k$ zusammensetzt.

Nachdem wir einen nicht auf $\mathfrak{m}Z^k$ liegenden Punkt als unendlichfernen Punkt ausgezeichnet haben, fassen wir nun eine Weile S^e als euklidischen Raum auf. Wir verbinden p geradlinig mit $\mathfrak{m}Z^k$; die Vereinigung der Verbindungsstrecken heiße L. Weiter verbinden wir p geradlinig mit den Zyklen Z^k bzw. $Z_1^k, \ldots, Z_r^k$ und erhalten Komplexe K^{k+1} bzw. $K_1^{k+1}, \ldots, K_r^{k+1}$; $\mathfrak{r}K_\nu^{k+1} = Z_\nu^k$.

K^{*k+1} sei ein Zyklus mod m in L bis auf U. $\mathfrak{r}K^{*k+1}$ ist dann in U homolog einer Linearkombination der Z_ν^k (wobei in den Z_ν^k evtl. die Koeffizienten durch ihre Restklassen mod m zu

[18]) $A \setminus B$ bezeichnet die Menge der Punkte von A, die nicht zu B gehören.

ersetzen sind). K^{*k+1} ist also bis auf U mod m von der Form $\Sigma \alpha_\nu K_\nu^{k+1}$ + $(k+1)$-dimensionaler Zyklus, wird also (bis auf $f(U) = u'^d$) mit dem Grad Null in S^d abgebildet. D.h. jeder Zyklus mod m in L bis auf U wird vom Grad 0 abgebildet [19]).

7.3. Nun können wir einen Überführungssatz von H. Hopf [20]) anwenden. Die Abbildung $f(\overline{L \setminus U}) \subset \overline{S^d \setminus u'^d}$ läßt sich (bei Festhaltung auf dem Durchschnitt mit U) stetig überführen in eine Abbildung $f_1(\overline{L \setminus U}) \subset \mathfrak{r} u'^d$. Man darf sich f_1 fortgesetzt denken zu einer Abbildung $f(\overline{S^e \setminus U}) \subset \overline{S^d \setminus u'^d}$, die auf dem Durchschnitt mit U übereinstimmt mit f. Erklärt man schließlich f_1 in U als mit f identisch, so hat man

$$f_1(S^e) \subset S^d,$$

$$f_1(\overline{S^e \setminus U}) \subset \overline{S^d \setminus u'^d},$$

$$f_1(\overline{L \setminus U}) \subset \mathfrak{r} u'^d,$$

$$f_1 = f \text{ in } U.$$

f_1 ändern wir ab in f_2: Für ein q im Abstande $\varrho \leqq \varepsilon$ [20a]) von L durchlaufe $f_{1+\tau}(q)$ in Abhängigkeit von τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ die Strecke von $f_1(q)$ nach p' gleichförmig bis zu *dem* Punkte, der diese Strecke im Verhältnis $\varepsilon - \varrho$ zu ϱ teilt; für die q im Abstande $\varrho \geqq \varepsilon$ sei $f_{1+\tau} \equiv f$.

f_2 bildet die Menge L und nicht mehr als L in p' ab.

7.4. Für ein q im Abstande $\varrho \leqq \eta$ von L durchlaufe $\varphi_\tau(q)$ in Abhängigkeit von τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ die Strecke von q nach p gleichförmig bis zu *dem* Punkte, der diese Strecke im Verhältnis $\eta - \varrho$ zu ϱ teilt; für die q im Abstande $\varrho \geqq \eta$ sei $\varphi_\tau(q) = q$.

$\psi_\tau(q)$ sei die Umkehrung von $\varphi_\tau(q)$. Wir setzen

---

[19]) Man bemerkt, wieviel Überlegungen man sich für $d > k+1$ sparen kann.

[20]) Es handelt sich um den Überführungssatz aus Rec. Math. Moscou **37** (1930), 53—62, Satz II*: A sei ein Teilpolytop des höchstens n-dimensionalen Polytops B, S sei die Randsphäre des n-dimensionalen Simplexes T; eine Abbildung f mit $f(A) \subset S$, $f(B) \subset T$ läßt sich dann und nur dann unter Festhaltung auf A überführen in (oder, was auf dasselbe hinauskommt, ersetzen durch) eine Abbildung $g(B) \subset S$, wenn jeder Zyklus mod $m(= 0, 2, \ldots)$ aus B bis auf A mit dem Grad 0 mod m abgebildet wird. Siehe auch Alexandroff-Hopf, Topologie (Berlin 1935), 508, Satz IV. — Den Überführungssatz haben wir hier so *anzuwenden*, daß die Rolle von B durch $\overline{L \setminus U}$, die von T durch $\overline{S^d \setminus u'^d}$, die von A durch den Rand von B, die von S durch den Rand von T übernommen wird.

Für $d > k+1$ können wir den Überführungssatz natürlich entbehren.

[20a]) ε wähle man so, daß das Bild einer ε-Umgebung von L nicht ganz S^d überdeckt; dann kann man nämlich, wie es in diesem Absatz geschieht, S^d wie einen euklidischen Raum behandeln.

$$f_{2+\tau} = f_2(\psi_\tau(q));$$

f_3 bildet p und nicht mehr als p in q' ab, besitzt also die Gestalt, die wir nach 7.1 anzustreben hatten.

8. *Vorbereitungen zu Satz II und III.*

In 8 sei $g \in (d^e)$, $d \geqq k + 1$ und $f = \mathfrak{E}g = 0$.

8.1. $f = \mathfrak{E}g$ sei zu g wie in 3.2 konstruiert (das dortige f heißt jetzt g, das dortige $\mathfrak{E}f$ jetzt f) und danach simplizial approximiert; da f unwesentlich sein soll, darf es als auf eine von der S^{e+1} berandete V^{e+2} fortgesetzt angenommen werden, $f(V^{e+2}) \subset S^{d+1}$.

$p' \in S^{d+1}$ sei innerer Punkt eines t'^{d+1} und liege auf der Breitensphäre S^d_β $(-1<\beta<1)$ (siehe 3.3). Der Urbildzyklus von p' in S^{e+1} heiße wieder Z^k, der Urbildkomplex von p' in V^{e+2} heiße Y^{k+1} [21]); $\mathfrak{r}Y^{k+1} = Z^k$ [22]). Z^k liegt im Wesentlichen in der Breitensphäre S^e_β (in Wirklichkeit kann die simpliziale Approximation eine Verschiebung verursacht haben, die wir aber getrost vernachlässigen dürfen). Z^k berandet in S^e_β ein K^{k+1};

$$Y^{k+1} - K^{k+1} = Z^{k+1} \tag{8.11}$$

ist ein Zyklus.

$f(\mathfrak{m}Y^{k+1}) = p'$; $f(K^{k+1}) = \mathfrak{c}(g)S^d_\beta$. Z^{k+1} berandet in V^{e+2} ein K^{k+2};

$$\mathfrak{r}K^{k+2} = Z^{k+1}, \tag{8.12}$$

$$\mathfrak{r}f(K^{k+2}) = f\mathfrak{r}(K^{k+2}) = \mathfrak{c}(g)S^d_\beta.$$

$f(K^{k+2})$ überdecke die Kappe $V^{d+1}_{\geqq\beta}$ (siehe 3.3) $\mathfrak{c}'$-mal, die Kappe $V^{d+1}_{\leqq\beta}$ (siehe 3.3) $\mathfrak{c}''$-mal. Für $\mathfrak{c}(g)$ schreiben wir kurz $\mathfrak{c}$. Dann ist

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' - \mathfrak{c}''.$$

8.2. $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ hängen von der Wahl von K^{k+2} nicht ab, da eine Änderung von K^{k+2} nur eine Änderung um das Bild eines (berandenden) Zyklus bei $f(K^{k+2})$ nach sich zieht.

$\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ hängen auch von der Wahl von K^{k+1} nicht ab, denn eine Änderung von K^{k+1} zieht nur nach sich eine von Z^{k+1} um einen in S^e_β liegenden und dort berandenden Zyklus, also von K^{k+2} um etwas in S^e_β Liegendes, dessen Bild $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ nicht beeinflußt.

8.3. $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{c}''$ hängen schließlich auch von der Wahl von p'

[21]) Siehe Hopf I, § 2, 3.

[22]) Siehe Hopf I, § 2, 5.

nicht ab. Um das zu zeigen, wählen wir Punkte p'_ν mit den Breiten β_ν $(\nu=1, 2)$. Zu p'_ν bestimmen wir Z^k_ν, Y^{k+1}_ν, K^{k+1}_ν, Z^{k+1}_ν, K^{k+2}_ν wie früher. $Z^{k+1}_{1\ldots 2}$ und $Y^{k+2}_{1\ldots 2}$ seihen die Urbildkomplexe eines in $V^{d+1}_{\beta_1,\beta_2}$ liegenden, von p'_1 nach p'_2 gerichteten Streckenzuges, und zwar bzw. genommen in S^{e+1} und V^{e+2}. Man hat dann

$$\mathfrak{r}Y^{k+2}_{1\ldots 2} = Y^{k+1}_2 - Y^{k+1}_1 - Z^{k+1}_{1\ldots 2},$$

$$\mathfrak{r}Z^{k+1}_{1\ldots 2} = Z^k_2 - Z^k_1.$$

Wir bilden

$$L^{k+2} = K^{k+2}_2 - K^{k+2}_1 - Y^{k+2}_{1\ldots 2}.$$

Da $\mathfrak{m}Y^{k+2}$ in einen Streckenzug abgebildet wird, genügt es, wenn wir jetzt beweisen, daß Nord- und Südpol durch $f(L^{k+2})$ mit dem Grad Null überdeckt werden. Wegen 8.11 und 8.12 hat man

$$\mathfrak{r}L^{k+2} = Z^{k+1}_2 - Z^{k+1}_1 - Y^{k+1}_2 + Y^{k+1}_1 + Z^{k+1}_{1\ldots 2}$$
$$= -K^{k+1}_2 + K^{k+1}_1 + Z^{k+1}_{1\ldots 2}.$$

Dieser in $V^{e+1}_{\beta_1,\beta_2}$ liegende Zyklus berandet dort ein M^{k+2},

$$\mathfrak{r}L^{k+2} = \mathfrak{r}M^{k+2}.$$

Da sich L^{k+2} und M^{k+2} nur um einen (berandenden) Zyklus unterscheiden, brauchen wir nur nachzuweisen, daß $f(M^{k+2})$ Nord- und Südpol mit dem Grade Null überdeckt. Wegen $\mathfrak{m}M^{k+2} \subset V^{e+2}_{\beta_1,\beta_2}$ gilt aber sogar $f(\mathfrak{m}M^{k+2}) \subset V^{d+1}_{\beta_1,\beta_2}$, womit unser Beweisziel erreicht ist.

8.4. Seien wieder p'_1 und p'_2 zwei Punkte mit den Breiten β_1, β_2 $(\beta_1 > \beta_2)$ und Z^{k+1}_1, Z^{k+2}_2 die zugehörigen Zyklen. Die Verschlingungszahl

$$\mathfrak{v}(Z^{k+1}_\mu, Z^{k+1}_\nu)$$

sei als Schnitt von K^{k+2}_μ und Z^{k+1}_ν erklärt. Man hat dann (siehe das Analoge bei H. Hopf [23]))

$$\mathfrak{c}' = \varepsilon\mathfrak{v}(Z^{k+1}_2, Z^{k+1}_1), \quad \mathfrak{c}'' = \varepsilon\mathfrak{v}(Z^{k+1}_1, Z^{k+1}_2).\ ^{24})$$

8.5. Für $d > k+1$ ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = \mathfrak{c}'' = 0$. — Für gerades $d = k+1$ ist $\mathfrak{v}$ antisymmetrisch [25]), also $\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}'' = 0$; andererseits $\mathfrak{c}' - \mathfrak{c}'' = \mathfrak{c}$, also $2\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}$.

---

23) II, 429 unten.

24) Das Vorzeichen ε hängt nur von der Dimension ab; siehe a.a.O. [23]).

25) Hopf II, 430, § 2, 5.

8.6. Für $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = 0$ (und $\mathfrak{S}g=0$) ist $g = 0$. — Denn man darf wegen $\mathfrak{c} = 0$ (wie in 7) f in S^e_β (und höchstens noch einer kleinen Umgebung) so abändern, daß $f(\mathfrak{m}K^{k+1})$, also auch $f(\mathfrak{m}\mathfrak{r}K^{k+2})$ ein einzelner Punkt wird. K^{k+2} wähle man dabei wieder sternig und ziehe dann (genau wie in 7, nun aber unter Verwendung von $\mathfrak{c}' = 0$) erst das Bild von K^{k+2} (bei Festhaltung auf $\mathfrak{m}\mathfrak{r}K^{k+2}$) und dann K^{k+2} selbst auf einen Punkt zusammen. So erreicht man, daß bei $f(V^{e+2}) \subset S^{d+1}$ ein gewisser Punkt (etwa der Nordpol) nur *ein* Urbild (etwa den Nordpol) besitzt. In S^{e+1} hat sich dabei nichts Wesentliches ereignet, d.h. in jeder Breitensphäre S^e_β ist f als stetige Abänderung von g aufzufassen. Das Bild einer Breitenkugel V^{e+1}_β in genügender Nähe des Nordpols überdeckt natürlich den Südpol nicht, aber auch nicht den Nordpol (dessen Urbildmenge ja aus dem Nordpol besteht). Damit läßt sich aber $f(S^e_\beta) \subset S^d_\beta$ fortsetzen zu $f(V^e_\beta) \subset S^d_\beta$, so daß in der Tat g unwesentlich ist.

9. *Beweis von Satz II.*

In 9 sei $d \geqq k + 1$, $g \in (d^e)$, $\mathfrak{c}(g) = 0$, $\mathfrak{S}g = 0$.

9.1. Für $d > k + 1$ und gerades $d = k + 1$ hat man nach 8.5 $\mathfrak{c}' = 0$, also nach 8.6 Unwesentlichkeit von g.

9.2. Gibt es ein $\psi \in (d+1^{e+2})$ mit der Invariante $-\mathfrak{c}'$, so verfahre man so: Man ersetze f (siehe 8.1) durch die kleine Abänderung f_1, die auf S^{e+1} mit f übereinstimme und eine zu K^{k+2} fremde Vollkugel V^{e+2}_1 aus dem Innern von V^{e+2} in *einen* Punkt abbilde. φ bilde V^{e+2}_1 auf eine S^{e+2}_1 ab und zwar das Innere topologisch und den Rand in einen Punkt; ψ bilde S^{e+2}_1 in S^{d+1} mit der Invariante $-\mathfrak{c}'$ ab. Wir setzen

$$f_2 = \psi\varphi \text{ in } V^{e+2}_1,$$

$$f_2 = f_1 \text{ sonst.}$$

f_2 ist auf S^{e+1} mit f identisch; $\mathfrak{c}'$ hat aber für f_2 den Wert Null erhalten, so daß wir nach 8.6 wieder auf die Unwesentlichkeit von g schließen können.

9.3. Gibt es in $(d+1^{e+2})$ ein Element mit der Invariante 1, so gibt es sicher auch ein Element mit beliebiger Invariante $-\mathfrak{c}'$ und wir können 9.2 anwenden. Andernfalls tritt aber bei ungeradem $d = k + 1$ immer noch jede *gerade* Zahl als Invariante auf [26]). Wie man leicht sieht, kann man die Fortsetzung von

[26]) Hopf II, Satz II′.

$f^* = 2f = \mathfrak{S}2g$ $(f^*(S^{e+1}) \subset S^{d+1})$ so einrichten, daß $\mathfrak{c}'(f^*) = 2\mathfrak{c}'(f)$ wird. Da das *gerade* ist, können wir 9.2 immerhin auf $f^* = 2f$ anwenden und auf die Unwesentlichkeit von $2g$ schließen.

Damit ist Satz II vollständig bewiesen.

10. *Beweis von Satz III.*

Es sei $g \in (d^e)$, $f = \mathfrak{S}g$, $d = k + 1$ gerade. 8.5 lehrt: Ist f unwesentlich, so ist notwendig $\mathfrak{c}(g)$ gerade. Damit ist eine Hälfte von IIIa bewiesen.

$\mathfrak{c}(g) \in \mathfrak{c}(d^e)$ sei ein tatsächlich auftretender Wert der Invariante ($d = k+1$ gerade). Wir setzen $h = g + (-1)g$. Dann ist (nach 3.8) $\mathfrak{S}h = 0$ und (nach 4.6 mit g statt f) $\mathfrak{c}(h) = 2\mathfrak{c}(g)$. Da entweder alle ganzen oder alle geraden Zahlen als Werte der Invariante auftreten, ist III damit vollständig bewiesen.

(Eingegangen den 4. September 1937.)