COMPOSITIO MATHEMATICA

M. PINL

Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 208-238

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__208_0>

Zur Existenztheorie und Klassifikation totalisotroper Flächen

von

M. Pinl

Prag

§ 1. *Einleitung und Terminologie.*

In der folgenden Untersuchung bedeuten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kartesische komplexe Koordinaten eines komplexen euklidischen Raumes von n Dimensionen R_n, die wir häufig als Komponenten eines Ortsvektors $\mathfrak{x}$ auf- und zusammenfassen. Bestehen dann gewisse analytische Abhängigkeiten der Koordinaten x_k von gewissen Parametern $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$, also auch solche für den Ortsvektor $\mathfrak{x}$, so sollen im Gegensatz zu den Komponenten untere Indices am Ortsvektor stets Ableitungen des Ortsvektors nach diesen Parametern bedeuten: $\mathfrak{x}_\alpha = \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}$, $\mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}, \ldots$ für $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, \mu$.

Nunmehr beschränken wir uns auf Vektorfunktionen in zwei unabhängigen Argumenten $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ unter gewissen bekannten Voraussetzungen also auf zweidimensionale [1]) Flächen im n-dimensionalen Raum und betrachten die Folge der Skalarprodukte

$$(1) \qquad g_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{x}_\alpha \cdot \mathfrak{x}_\beta, \; g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \mathfrak{x}_{\alpha\beta} \cdot \mathfrak{x}_{\gamma\delta}, \; g_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} \equiv \mathfrak{x}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \mathfrak{x}_{\delta\varepsilon\zeta}, \ldots,^{2)}$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \ldots = 1, 2,$$

deren erstes unter unseren dem Rahmen einer bewegungsinvarianten Differentialgeometrie zugehörigen Voraussetzungen stets den wohlbekannten quadratischen Fundamentaltensor der Fläche $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ darstellt.

Die Gramsche Matrix $\|g_{\alpha\beta}\|$ besitzt hier im binären Gebiet drei Rangmöglichkeiten: $r = 2, 1, 0$. Für $r = 1, 0$ verschwindet selbstverständlich die Gramsche Determinante $|g_{\alpha\beta}|$. Indessen kann im

---

[1]) Wir zählen stets komplexe Dimensionen!

[2]) Das Zeichen $\equiv$ bzw. $\not\equiv$ bedeutet stets „identisch gleich" bzw. „identisch ungleich" in einem gewissen Variabilitätsbereich $\{\ldots\}$, z.B. $g_{\alpha\beta} \equiv 0\{u_1, u_2\}$; doch wird diese Bezeichnung nicht immer konsequent durchgeführt.

Gebiet einer analytischen Differentialgeometrie auch in diesen Fällen im allgemeinen (insbesondere für nicht allzu beschränkte Dimensionszahlen n) die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ erhalten bleiben [3]). Dies veranlaßt zunächst die folgende Terminologie [4]):
(a) $r = 2$, $|g_{\alpha\beta}| \not\equiv 0$, reguläre Flächen; (b) $r = 1$, $|g_{\alpha\beta}| \equiv 0$, isotrope Flächen; (c) $r = 0$, $g_{\alpha\beta} \equiv 0$, totalisotrope Flächen.

Für (a) und (b) bricht die Reihe der Tensoren unter den Skalarprodukten (1) bereits mit $g_{\alpha\beta}$ ab, wenn man den Tensorbegriff in der üblichen Weise begrenzt [5]). Verschwinden dagegen die quadratischen Fundamentalkomponenten $g_{\alpha\beta}$ identisch, so prägt die euklidische Metrik des Einbettungsraumes R_n den Skalarprodukten $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta}$ Tensorcharakter auf (im gewöhnlichen Sinne!) [6]), während dies für die weiteren Skalarprodukte $g_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta}$, $g_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}, \ldots$ im allgemeinen noch nicht zutrifft, es sei denn, es verschwinden auch sämtliche biquadratische Fundamentalkomponenten usw.

Damit kommen wir für den Fall (c), der allein den Gegenstand unserer ferneren Betrachtungen darstellt, zu folgender weiteren Terminologie:

---

[3]) Über das Verhalten singulärer Gramscher Matrizen isotroper und linear unabhängiger Vektoren vgl.
(a) E. Schrenzel, Über Kurven mit isotropen Normalen [Sitz. Ber. Akad. Wien **138** (1928), 439—446];
(b) M. Pinl, Über Kurven mit isotropen Schmiegräumen [Monatshefte Math. u. Phys. **39** (1932), 157—172], insbes. 160;
(c) J. Lense, Über Kurven mit isotropen Normalen [Math. Ann. **112** (1935), 139—154];
(d) M. Pinl, Zur dualistischen Theorie isotroper und verwandter Kurven [Monatshefte Math. u. Phys. **44** (1936), 1—12], insbes. § 2;
(e) M. Pinl, Zur integrallosen Darstellung isotroper Mannigfaltigkeiten [Math. Zeitschr. **42** (1937), 337—354], insbes. § 1.

[4]) vgl. [3]) (e), 337.

[5]) Vgl. die Definition eines Vektors „di 2ª specie" bei E. Bompiani, Geometrie riemanniane di specie superiore [R. Acad. Italia, Memorie Science Fis., Mat. e Nat. **6** (1935), 269—520], insbes. 470—480.

[6]) Aus $\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta \equiv 0$ folgt nämlich $\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_{\beta\gamma} \equiv 0$ für alle Werte der Indizes α, β, γ; daher verschwinden für die Skalarprodukte

$$\bar{\mathfrak{x}}_{ik}\bar{\mathfrak{x}}_{lm} = \left(\mathfrak{x}_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{u}_i}\,\frac{\partial u_\beta}{\partial \bar{u}_k} + \mathfrak{x}_\varrho \frac{\partial^2 u_\varrho}{\partial \bar{u}_i \partial \bar{u}_k}\right)\left(\mathfrak{x}_{\gamma\delta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \bar{u}_l}\,\frac{\partial u_\delta}{\partial \bar{u}_m} + \mathfrak{x}_\sigma \frac{\partial^2 u_\sigma}{\partial \bar{u}_l \partial \bar{u}_m}\right) = \bar{g}_{iklm}$$

alle Produkte $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_\sigma$, $\mathfrak{x}_\varrho\mathfrak{x}_{\gamma\delta}$, so daß sich auf totalisotropen Mannigfaltigkeiten der Tensor $\bar{g}_{iklm}$ zweiter Art (im Sinne von Bompiani) auf einen gewöhnlichen Tensor erster Art (im Sinne von Ricci) reduziert.

(c_1) $g_{\alpha\beta} \equiv 0$, nicht alle $g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$, einfach totalisotrope Flächen,

(c_2) $g_{\alpha\beta} \equiv 0$, $g_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$,
nicht alle $g_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} \equiv 0$, zweifach totalisotrope Flächen,

⋮

(c_k) $g_{\alpha\beta} \equiv 0$, $g_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \equiv 0$,

$g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{2k}} \equiv 0$,
nicht alle $g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\ldots\alpha_{2k+2}} \equiv 0$, k-fach totalisotrope Flächen.

Schließlich haben wir noch die folgenden beiden Fallunterscheidungen auseinander zu halten:

(c_k) beschränkt totalisotrope Flächen, (c_∞) unbeschränkt totalisotrope Flächen.

Zufolge $g_{\alpha\beta} \equiv 0$ verschwindet die quadratische Fundamentalform $g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ [7]) identisch. Daher sind alle totalisotropen Flächen Integralflächen der Mongeschen Differentialgleichung

(2) $$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + \ldots + dx_n^2 = 0,$$

deren Theorie also die Existenztheorie aller totalisotropen Flächen enthält. Nach einem von Herrn J. Lense erstmalig durchgeführten Verfahren konnte die Existenz der allgemeinsten zweiparametrigen Lösungen und damit die der allgemeinsten totalisotropen Flächen des R_n für $n \geqq 4$ in Evidenz gesetzt werden [8]). Damit war die Grundlage für die weitere Theorie dieser Flächen vom Standpunkt ihrer Einbettung in einem gegebenen komplexen R_n ($n \geqq 4$) gelegt, sofern man jetzt ausgehend etwa von der Vektordarstellung

(3) $$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2), \quad \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta \equiv g_{\alpha\beta} \equiv 0 \qquad \{u_1, u_2\}, \ \alpha, \beta = 1, 2$$

Ableitungsgleichungen für die höheren Differentialquotienten $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}$ aufstellt und deren Integrabilitätsbedingungen diskutiert [9]).

Andererseits bietet der biquadratische Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (und in den höheren Fällen (c_2) usw. die Tensoren $g_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta}$

---

[7]) Wir verwenden stets die Einsteinsche Summenkonvention (gilt auch für [6])).

[8]) vgl. J. Lense, Über vollisotrope Flächen („vollisotrop" synonym mit „totalisotrop") [Monatshefte Math. u. Phys. **43** (1936), 177—186], insbes. § 1; ferner J. Moser, Approbationsarbeit für das höhere Lehramt [München 1932].

[9]) vgl. J. Lense, Die Ableitungsgleichungen ametrischer Mannigfaltigkeiten („ametrisch" synonym mit „totalisotrop") [Math. Zeitschr. **34** (1932), 721—726].

usw.) die Grundlage für eine weitere Entwicklung der Theorie totalisotroper Flächen auf Grund ihrer innergeometrischen Eigenschaften, wodurch man im Falle (c_1) auf die Theorie der algebraischen und differentiellen Invarianten einer binären biquadratischen Differentialform (im Falle (c_2) usw. entsprechend auf die Theorie der algebraischen und differentiellen Invarianten einer binären triquadratischen Differentialform usw.) geführt wird.

Gleichwie man nun die Riemannsche Geometrie einer Mannigfaltigkeit als Gesamtheit aller ihren Punkten örtlich zugeordneten euklidischen „Tangentialraumgeometrien" auffassen kann, wobei das Verknüpfungsgesetz dieser lokalen Geometrien durch die „Riemannsche Übertragung" in bekannter Weise gegeben erscheint, so kann man nun auch die biquadratische Geometrie einer einfach totalisotropen Mannigfaltigkeit, insbesondere die einer solchen Fläche als Gesamtheit aller ihren Punkten örtlich zugeordneten „Schmiegraumgeometrien" auffassen, wobei man sich im Falle (c_1) auf die von den Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha$, $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}$ in jedem regulären [10]) Punkte der Fläche aufgespannten sgn. ersten Schmiegräume S_ν von der Dimension $3 \leqq \nu \leqq 5$ beschränken wird. Auch hier bleibt als weiteres sehr wesentliches Ziel die Theorie einer Übertragung der „benachbarten" Schmiegräume und die Diskussion der Integrabilitätsbedingungen einer solchen Übertragung sowie die ihrer gruppentheoretischen Struktur im Sinne von E. Cartan's Konzeption einer zu einer Übertragung zugehörigen „Holonomiegruppe" [11]).

Dies wäre der Abschluß einer „Krümmungstheorie" totalisotroper Flächen. Als Vorbereitungen in dieser Richtung sind die Untersuchungen der Differentialinvarianten des binären biquadratischen Fundamentaltensors $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ aufzufassen, wie sie neuerdings sowohl mit Hilfe der Finsler-Berwaldschen Krümmungstheorie des Variationsproblems [12])

---

[10]) Darunter verstehen wir hier Punkte der Fläche, in denen die Matrix $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\|$ von Rang 2 und die Matrix $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\|$ zu mindestens vom Rang 3 ist.

[11]) vgl. [5]), insbesondere Abschnitt IV, Kapitel 4, „Trasporti di specie superiore" 480—518; ferner W. Mayer [Sitz. Ber. Akad. Berlin **1931**, 606—615, Monatshefte Math. u. Phys. **40** (1933), 283—293, Transactions A. M. S. **38** (1935) 267—309], ferner E. Cartan, Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, [Acta Math. **48** (1926), 1—42].

[12]) vgl. P. Finsler, Diss. [Göttingen 1918]; L. Berwald, [Math. Zeitschr. **25** (1926), 40—73; J. f. M. **156** (1927), 191—222, Atti del Congresso Bologna (1928), 263—270].

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt[4]{g_{\alpha\beta\gamma\delta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta}\, d\tau = 0\,, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2,$$

als auch direkt durch Ermittlung der Differentialinvarianten des Tensors $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ auf erster bzw. zweiter Differentiationsstufe durch Herrn G. F. C. Griss durchgeführt worden sind [13]).

Im Gegensatz zu diesen zuletzt genannten Untersuchungen bleibt die vorliegende Arbeit auf die Komitantentheorie nullter Differentiationsstufe des Fundamentaltensors $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ beschränkt und beabsichtigt, die bereits auf dieser Stufe noch bestehenden Lücken in der Klassifikation einfach totalisotroper Flächen zu schließen. Je nach dem Verhalten der algebraischen Komitanten des binären biquadratischen Fundamentaltensors $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ kann man nun bekanntlich sieben Typen einfach totalisotroper Flächen unterscheiden: (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) und (VII) [14]), deren Verteilung auf die euklidischen Einbettungsräume der Dimensionen 5 bis 9 hier zur Diskussion steht. Eine weitere Unterteilung der so entstehenden Klassifikation ergibt sich durch zusätzliche Fallunterscheidungen gemäß der Frage, welche der überhaupt möglichen Dimensionszahlen $\nu = 3, 4, 5$ des von den Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha$, $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}$ jeweils aufgespannten Schmiegraums S_ν bei gegebenem Typus und gegebener Dimensionszahl $n \geqq 5$ [15]) des Einbettungsraumes vorkommen kann.

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Theorie einfach totalisotroper Mannigfaltigkeiten als Spezialfall von E. Bompianis „Geometrie riemanniane di specie superiore" interpretiert [16]), nämlich als „Geometrie riemanniane di 2ª specie" besonders zahlreiche neue geometrische Perspektiven hinsichtlich Abwick-

---

[13]) vgl. G. F. C. Griss, Differentialvarianten eines kovarianten Tensors vierter Stufe im binären Gebiet [Compositio Math. **1** (1934), 238—247, Proc. Amsterdam **39** (1936), 947—955].

[14]) vgl.

(a) M. Pinl, Quasimetrik auf totalisotropen Flächen I [Proc. Amsterdam, **35** (1932), 1181—1188];

(b) M. Pinl, Quasimetrik auf totalisotropen Flächen II [Proc. Amsterdam, **36** (1933), 550—557];

(c) M. Pinl, Quasimetrik auf totalisotropen Flächen III [Proc. Amsterdam, **38** (1935), 171—180].

[15]) den Fall $n = 4$, wo nur lineare totalisotrope Flächen (Ebenen!) auftreten, schließen wir aus, da die totalisotropen Ebenen keinerlei invariantentheoretischer Behandlung zugänglich sind; vgl. auch § 12 dieser Arbeit.

[16]) vgl. [5]) insbes. Abschnitt IV, Kapitel 4, „Trasporti di specie superiore", 480—518, ferner W. Mayer [Sitz. Ber. Akad. Berlin **27** (1931), 606—615, Monatshefte Math. u. Phys. **40** (1933), 283—293, Trans. A. M. S. **38** (1935), 267—309].

lungs-, Abbildungs- und Projektionstheorien bietet, deren systematische Bearbeitung Herr J. Lense neuerdings in Aussicht gestellt hat [17]). Natürlich kann die „Unanschaulichkeit" aller dieser Resultate einer analytischen Differentialgeometrie stets durch Verwendung pseudoeuklidischer Einbettungsräume mit geeignet indefiniter Maßbestimmung

$$\varepsilon_1 dx_1^2 + \varepsilon_2 dx_2^2 + \varepsilon_3 dx_3^2 + \varepsilon_4 dx_4^2 + \ldots + \varepsilon_n dx_n^2, \quad \varepsilon_k^2 = 1,$$

behoben werden, wie dies ja vielfach auch bei neueren Untersuchungen algebraisch-geometrischer Probleme geschieht [18]).

§ 2. *Die Klassifikationstabelle.*

Den Symbolen (I), . . ., (VII) entsprechen bekanntlich die folgenden „kanonischen" biquadratischen Fundamentalformen F [19]):

(I) : $F \equiv g_{1111} du_1^4$ bzw. $F \equiv g_{2222} du_2^4$,

(II) : $F \equiv 6 g_{1122} du_1^2 du_2^2$,

(III): $F \equiv 4 g_{1112} du_1^3 du_2$ bzw. $F \equiv 4 g_{1222} du_1 du_2^3$,

(IV): $F \equiv (g_{1111} du_1^2 + 6 g_{1122} du_2^2) du_1^2$ bzw. $F \equiv (6 g_{1122} du_1^2 + g_{2222} du_2^2) du_2^2$,

(V) : $F \equiv g_{1111} du_1^4 + g_{2222} du_2^4$ („harmonische" Fundamentalform),

(VI): $F \equiv g_{1111} du_1^4 \pm 2i \sqrt{3 g_{1111} g_{2222}}\, du_1^2 du_2^2 + g_{2222} du_2^4$

(„äquianharmonische" Fundamentalform),

(VII): $F \equiv g_{1111} du_1^4 + 6 g_{1122} du_1^2 du_1^2 + g_{2222} du_2^4$,

welche die verschiedenen charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Typen unmittelbar erkennen lassen, wenn man die Nullinien der Form F betrachtet, d.h. das Netz der zweifach isotropen Kurven [20]) auf der Fläche. Im allgemeinen Falle (VII) gehen durch jeden Flächenpunkt allgemeiner Lage [21]) vier Kurven

---

[17]) vgl. auch M. Pinl, W-Projektionen totalisotroper Flächen I [Časopis Praha **66** (1937), 95—102].

[18]) Ein Muster von „Anschaulichkeit" einer geometrischen Untersuchung isotroper Gebilde bietet in dieser Hinsicht K. Strubeckers „Über die Liesche Abbildung der Linienelemente . . ." [Monatshefte Math. u. Phys. **42** (1935), 309—376], in welcher Abhandlung mit isotropen Elementen regelrecht militärisch „exerziert" wird.

[19]) vgl. [14]) (b), insbes. S. 551.

[20]) vgl. [14]) (a), insbes. S. 1182; für eine Kurve $\mathfrak{y}(t) = \mathfrak{x}[u_1(t), u_2(t)]$ auf der totalisotropen Fläche $\mathfrak{y}$ gilt $\dot{\mathfrak{y}}^2 \equiv 0\{t\}$, $\ddot{\mathfrak{y}}^2 \equiv g_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta$; sie ist also stets einfach isotrop $\dot{\mathfrak{y}}^2 \equiv 0$, $\ddot{\mathfrak{y}}^2 \not\equiv 0$ und für die Nullrichtungen von $g_{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta$ zweifach isotrop $\dot{\mathfrak{y}}^2 \equiv \ddot{\mathfrak{y}}^2 \equiv 0$, $\dddot{\mathfrak{y}}^2 \not\equiv 0$.

[21]) d.h. in diesem Falle in jeden Punkte, wo $\|\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}\|$ vom Rang 5 ist.

dieses Netzes, deren vier Tangenten eine allgemeine Lage zukommt. Im Falle (VI) liegen diese vier Tangenten äquianharmonisch, im Falle (V) harmonisch. Im Falle (IV) fallen zwei, im Falle (III) drei der Kurven des Netzes in jedem allgemeinen Flächenpunkt zusammen. Auch im Falle (II) gehen durch jeden allgemeinen Flächenpunkt zwei Kurven des Netzes, die jedoch durch paarweises Zusammenfallen der vier Nullrichtungen entstehen. Schließlich fallen für (I) sämtliche vier Nullrichtungen in einer einzigen zusammen [22]). Entsprechend wird F für (I) das Biquadrat einer Pfaffschen, für (II) das Quadrat einer quadratischen Form.

Besitzen dann die Symbole S_ν und R_n die einleitend angegebene Bedeutung, so verteilen sich die Typen (I) bis (VII) einfach totalisotroper Flächen vom Schmiegraum S_3 bzw. S_4 bzw. S_5 auf die euklidischen Einbettungsräume R_5 bis R_9 gemäß der folgenden Tabelle.

Typus \ R_n	R_5	R_6		R_7		
I	(I, S_3, R_5)	(I, S_3, R_6)		(I, S_3, R_7)	(I, S_4, R_7)	
II						(II, S_5, R_7)
III			(III, S_4, R_6)		(III, S_4, R_7)	
IV						(IV, S_5, R_7)
V			(V, S_4, R_6)		(V, S_4, R_7)	
VI						(VI, S_5, R_7)
VII						(VII, S_5, R_7)
S_ν	S_3	S_3	S_4	S_3	S_4	S_5

Typus \ R_n	R_8			R_9		
I	(I, S_3, R_8)	(I, S_4, R_8)		(I, S_3, R_9)	(I, S_4, R_9)	(I, S_5, R_9)
II			(II, S_5, R_8)			(II, S_5, R_9)
III		(III, S_4, R_8)	(III, S_5, R_8)		(III, S_4, R_9)	(III, S_5, R_9)
IV			(IV, S_5, R_8)			(IV, S_5, R_9)
V		(V, S_4, R_8)	(V, S_5, R_8)		(V, S_4, R_9)	(V, S_5, R_9)
VI			(VI, S_5, R_8)			(VI, S_5, R_9)
VII			(VII, S_5, R_8)			(VII, S_5, R_9)
S_ν	S_3	S_4	S_5	S_3	S_4	S_5

[22]) vgl. [14]) (a), insbes. § 2, [8]), insbes. § 2, S. 181.

Davon war die Existenz totalisotroper Flächen der Klassen (I, S_3, R_5), (I, S_3, R_6), (I, S_3, R_7), (I, S_3, R_8), (I, S_3, R_9), (I, S_4, R_8); (II, S_5, R_9); (III, S_4, R_6), (III, S_4, R_7), (III, S_4, R_8), (III, S_4, R_9); (IV, S_5, R_9); (V, S_4, R_6), (V, S_4, R_7), (V, S_4, R_8), (V, S_4, R_9); (VI, S_5, R_9); (VII, S_5, R_9) bereits früher [23]) bekannt. Wir müssen daher im folgenden nur noch die Existenz totalisotroper Flächen aus den Klassen (I, S_4, R_7), (I, S_5, R_9); (II, S_5, R_7); (III, S_5, R_8); (IV, S_5, R_7); (V, S_5, R_8); (VI, S_5, R_7); (VII, S_5, R_7) beweisen (die Existenz der in der Tabelle noch enthaltenen Fälle (I, S_4, R_9); (II, S_5, R_8); (III, S_5, R_9); (IV, S_5, R_8); (V, S_5, R_9); (VI, S_5, R_8); (VII, S_5, R_8) ist dann trivial).

Den leeren Feldern der Tabelle entsprechen leere Klassen totalisotroper Flächen [24]). Auch die Unmöglichkeit des Auftretens entsprechender Flächen werden wir nachweisen [25]). Zuvor formulieren wir die geometrischen Aussagen der vorstehenden Klassifikationstabelle unter Verwendung bereits bekannter Ergebnisse aus der Theorie totalisotroper Flächen:

Satz 1. *Der komplexe euklidische R_5 enthält nur nichtlineare totalisotrope Flächen vom Typus* (I) (*Torsen*) *mit dreidimensionalem Schmiegraum* [26]).

Satz 2. *Der komplexe euklidische R_6 enthält außer den bereits in R_5 vorkommenden totalisotropen Torsen zwei weitere Typen nichtlinearer einfach totalisotroper Flächen* (III) *und* (V)[27]); (III) *entsprechen totalisotrope Regelflächen, welche keine Torsen sind* [28]), (V) *sogenannte harmonische Flächen* [29]), *darunter insbesondere Schiebflächen* [30]), *beider Typen Schmiegräume sind vierdimensional.*

Satz 3. *Der komplexe euklidische R_7 enthält außer den bereits in R_6 vorkommenden Typen nichtlinearer einfach totalisotroper Flächen noch fünf weitere Klassen nichtlinearer einfach totalisotroper Flächen, darunter insbesondere die Klasse* (I, S_4, R_7), *deren Flächen keine Torsen darstellen und die „äquianharmonische" Klasse* (VI, S_5, R_7), *deren Flächen ein äquianharmonisches Netz zweifach isotroper Kurven tragen*; *die Schmiegräume der Typen* (II), (IV), (VI) *und* (VII) *sind notwendig fünfdimensional* [31]).

---

23) vgl. [14]) (a), insbes. § 2.

24) vgl. jedoch § 12 dieser Arbeit.

25) vgl. § 11 dieser Arbeit.

26) vgl. [8]), insbes. S. 182.

27) vgl. [14]) (a), insbes. S. 1185, [8]), insbes. § 3.

28) vgl. [27]).

29) vgl. [27]).

30) vgl. [14]) (a), insbes. S. 1185, [14]) (b), insbes. S. 555—556, [8]), insbes. S. 186.

31) vgl. [14]) (a), insbes. S. 1186.

Satz 4. *Der komplexe euklidische R_8 enthält außer den bereits in R_7 vorkommenden Typen nichtlinearer einfach totalisotroper Flächen noch zwei weitere Klassen nichtlinearer einfach totalisotroper Flächen und zwar allgemeinere Vertreter der Typen* (III) *und* (V) *mit fünfdimensionalen Schmiegräumen, unter denen also weder Regel- noch Schiebflächen vorkommen.*

Satz 5. *Der komplexe euklidische R_9 enthält außer den bereits in R_8 vorkommenden Typen nichtlinearer einfach totalisotroper Flächen noch eine weitere letzte Klasse nichtlinearer einfach totalisotroper Flächen und zwar Flächen vom Typus* (I) *mit fünfdimensionalem Schmiegraum.*

Da die Behauptungen der Sätze 1 und 2 bereits bei früherer Gelegenheit bewiesen worden waren [32] (sie sind hier nur der Vollständigkeit halber angeführt worden), können wir uns im folgenden auf den Beweis der Sätze 3, 4, 5 beschränken und beginnen daher mit der Konstruktion von Beispielen für die Flächenklassen (I, S_4, R_7), (II, S_5, R_7), (IV, S_5, R_7), (VI, S_5, R_7) und (VII, S_5, R_7).

§ 3. *Beispiel für die Flächenklasse* (I, S_4, R_7).

Wir betrachten die dreifach isotrope Kurve des R_7 [33])

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(u_1),\ \mathfrak{z}_1^2 = \mathfrak{z}_{11}^2 = \mathfrak{z}_{111}^2 = 0,\ \mathfrak{z}_{1111}^2 \neq 0, \\ (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_{11}, \mathfrak{z}_{111}, \ldots, \mathfrak{z}_{1111111}) \neq 0 \quad \{u_1\}. \end{cases}$$

Sie erzeugt die dreidimensionale totalisotrope Hypertorse (Tangentenhyperfläche)

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{y}(u_1, u_2, u_3) = \mathfrak{z}(u_1) + u_2\mathfrak{z}_1(u_1) + u_3\mathfrak{z}_{11}(u_1); \\ \mathfrak{y}_\alpha\mathfrak{y}_\beta = 0 \quad \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Auf (5) betrachten wir die zweidimensionale Fläche:

$$(6)\qquad \mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{z}(u_1) + u_2\mathfrak{z}_1(u_1) + \varphi(u_1, u_2)\,\mathfrak{z}_{11}(u_1),$$

die wir also aus (5) erhalten, indem wir u_3 durch eine geeignete analytische Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ der Parameter u_1, u_2 ersetzen.

Für die ersten Ableitungen des Flächenortsvektors $\mathfrak{x}$ ergibt sich:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{z}_1 + (u_2 + \varphi_1)\,\mathfrak{z}_{11} + \varphi\mathfrak{z}_{111},\ \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{z}_1 + \varphi_2\mathfrak{z}_{11}, \\ \mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2^2 = 0 \ \{u_1, u_2, \varphi\} \left(\varphi_\alpha = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_\alpha}\right). \end{cases}$$

Somit ist die Fläche totalisotrop. Für die zweiten Ableitungen ergibt sich:

---

[32]) vgl. [14]) (a), [14]) (b), [8]).

[33]) vgl. [3]) (c), insbes. § 5.

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_{11} = (1+\varphi_{11})\mathfrak{z}_{11} + (u_2+2\varphi_1)\mathfrak{z}_{111} + \varphi\mathfrak{z}_{1111}, \\ \mathfrak{x}_{12} = (1+\varphi_{12})\mathfrak{z}_{11} + \varphi_2\mathfrak{z}_{111}, \quad \mathfrak{x}_{22} = \varphi_{22}\mathfrak{z}_{11} \quad \left(\varphi_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\right). \end{cases}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der ersten sieben Ableitungen des Kurvenortsvektors $\mathfrak{z}(u_1)$ in R_7 kann z.B. eine Relation

$$(9)\qquad \lambda_1\mathfrak{x}_1 + \lambda_2\mathfrak{x}_2 + \lambda_{11}\mathfrak{x}_{11} + \lambda_{22}\mathfrak{x}_{22} \doteq 0$$

identisch in $\varphi(u_1, u_2)$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$ bestehen [34]). Mithin ist der Schmiegraum der Fläche mindestens vierdimensional. Andererseits sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$ nach (7) und (8) offensichtlich linear abhängig. Somit ist der Schmiegraum höchstens vierdimensional [35]), also wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_{11}, \mathfrak{z}_{111}, \mathfrak{z}_{1111}$ für passend gewählte Funktionen $\varphi(u_1, u_2)$ genau vierdimensional. Für die biquadratischen Fundamentalkomponenten der Fläche $\mathfrak{x}$ ergibt sich

$$(10)\quad \begin{cases} g_{1111} = \mathfrak{x}_{11}^2 = \varphi^2\mathfrak{z}_{1111}^2, \quad g_{1112} = \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{12} = 0, \\ g_{1122} = \mathfrak{x}_{12}^2 = \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22} = 0, \quad g_{1222} = \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_{22} = 0, \quad g_{2222} = \mathfrak{x}_{22}^2 = 0, \end{cases}$$

entsprechend reduziert sich die Fundamentalform F auf das Biquadrat

$$(11)\qquad F \equiv g_{1111}du_1^4,$$

d.h. auf die kanonische Fundamentalform (I). Die Fläche (6) ist also für passend gewählte Funktionen $\varphi(u_1, u_2)$ ein Beispiel für die Flächenklasse (I, S_4, R_7).

§ 4. *Beispiel für die Flächenklasse* (II, S_5, R_7).

Ein Beispiel für eine totalisotrope Fläche dieser Klasse konstruieren wir unter Anwendung der allgemeinen Integrationsmethode von J. Lense [36]) auf die spezielle Mongesche Differentialgleichung

$$(12)\qquad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2 + dx_6^2 + dx_7^2 = 0\,.$$

---

[34]) nach (7) und (8) bestünde nämlich an Stelle von (9)

$$\mathfrak{z}_1(\lambda_1+\lambda_2) + \mathfrak{z}_{11}[\lambda_1(u_2+\varphi_1) + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_{11}(1+\varphi_{11}) + \lambda_{22}\varphi_{22}] + \\ + \mathfrak{z}_{111}[\lambda_1\varphi + \lambda_{11}(u_2+2\varphi_1)] + \mathfrak{z}_{1111}\lambda_{11}\varphi \equiv 0 \quad \{u_1, u_2, \varphi\},$$

also $$\lambda_{11} = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{22} = 0.$$

[35]) vgl. § 11 dieser Arbeit, Gleichung (117).

[36]) vgl. [8]), insbes. § 1.

Nach diesem Verfahren erhält man die allgemeinsten Integralflächen von (12) aus dem Pfaffschen System

$$(13)\quad \begin{cases} dy_3=A_3(y_1,y_2)dy_1+B_3(y_1,y_2)dy_2, & dz=C(y_1,y_2)dy_1+D(y_1,y_2)dy_2,\\ d\bar{y}_1=\bar{A}_1(y_1,y_2)dy_1+\bar{B}_1(y_1,y_2)dy_2, & d\bar{y}_2=\bar{A}_2(y_1,y_2)dy_1+\bar{B}_2(y_1,y_2)dy_2,\\ d\bar{y}_3=\bar{A}_3(y_1,y_2)dy_1+\bar{B}_3(y_1,y_2)dy_2, & \end{cases}$$

dessen Koeffizienten den algebraischen Bedingungen

$$(14)\quad \begin{cases} \bar{A}_1+A_3\bar{A}_3+C^2=0, \quad \bar{B}_1+\bar{A}_2+A_3\bar{B}_3+\bar{A}_3B_3+2CD=0,\\ \bar{B}_2+B_3\bar{B}_3+D^2=0 \end{cases}$$

genügen. Dabei hängen die affinen Koordinaten y_1, y_2 (Flächenparameter), y_3, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\bar{y}_3$, z mit den kartesischen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_7$ vermöge der Substitution

$$(15)\quad \begin{cases} y_1=x_1+ix_2, & y_2=x_3+ix_4, & y_3=x_5+ix_6,\\ \bar{y}_1=x_1-ix_2, & \bar{y}_2=x_3-ix_4, & \bar{y}_3=x_5-ix_6, \end{cases} \quad z=x_7 \quad (i=\sqrt{-1}),$$

und ihrer Umkehrung

$$(16)\quad \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(y_1+\bar{y}_1), & x_3=\frac{1}{2}(y_2+\bar{y}_2), & x_5=\frac{1}{2}(y_3+\bar{y}_3),\\ x_2=\frac{1}{2i}(y_1-\bar{y}_1), & x_4=\frac{1}{2i}(y_2-\bar{y}_2), & x_6=\frac{1}{2i}(y_3-\bar{y}_3), \end{cases} \quad x_7=z \quad (i=\sqrt{-1})$$

zusammen. Aus (16) erhalten wir durch zweimaliges Ableiten nach y_1 bzw. y_2 für die Skalarprodukte $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der zweiten Ableitungen, d.h. für die biquadratischen Fundamentalkomponenten, mit Rücksicht auf (13)

$$(17)\quad \begin{cases} g_{1111}=\dfrac{\partial A_3}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_1}+\left(\dfrac{\partial C}{\partial y_1}\right)^2,\\ g_{1112}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial A_3}{\partial y_2}+\dfrac{\partial A_3}{\partial y_1}\dfrac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_2}\right)+\dfrac{\partial C}{\partial y_1}\dfrac{\partial C}{\partial y_2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_1}\dfrac{\partial B_3}{\partial y_1}+\dfrac{\partial A_3}{\partial y_1}\dfrac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_1}\right)+\dfrac{\partial C}{\partial y_1}\dfrac{\partial D}{\partial y_1},\\ g_{1122}=\dfrac{\partial A_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_2}+\left(\dfrac{\partial C}{\partial y_2}\right)^2=\dfrac{\partial B_3}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_1}+\left(\dfrac{\partial D}{\partial y_1}\right)^2,\\ g_{1222}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial B_3}{\partial y_1}+\dfrac{\partial B_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_1}\right)+\dfrac{\partial D}{\partial y_2}\dfrac{\partial D}{\partial y_1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial A_3}{\partial y_2}+\dfrac{\partial B_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_2}\right)+\dfrac{\partial C}{\partial y_2}\dfrac{\partial D}{\partial y_2},\\ g_{2222}=\dfrac{\partial B_3}{\partial y_2}\dfrac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_2}+\left(\dfrac{\partial D}{\partial y_2}\right)^2. \end{cases}$$

Für die Koeffizienten A_3, B_3, $\bar{A}_3$, $\bar{B}_3$, C, D bestehen die Integrabilitätsbedingungen [37])

[37]) vgl. [8]), insbes. § 1, Gleichungen (9).

$$(18)\qquad \frac{\partial A_3}{\partial y_1}\frac{\partial \overline{B}_3}{\partial y_2}+\frac{\partial \overline{A}_3}{\partial y_1}\frac{\partial B_3}{\partial y_2}-2\frac{\partial A_3}{\partial y_2}\frac{\partial \overline{A}_3}{\partial y_2}+2\frac{\partial C}{\partial y_1}\frac{\partial D}{\partial y_2}-2\left(\frac{\partial C}{\partial y_2}\right)^2=0,$$

$$(19)\qquad \frac{\partial B_3}{\partial y_1}=\frac{\partial A_3}{\partial y_2},\quad \frac{\partial \overline{B}_3}{\partial y_1}=\frac{\partial \overline{A}_3}{\partial y_2},\quad \frac{\partial D}{\partial y_1}=\frac{\partial C}{\partial y_2},$$

die im allgemeinen $\left(\text{z.B. für } \frac{\partial \overline{B}_3}{\partial y_2}\neq 0\right)$ ein Cauchy-Kowalewskisches Normalsystem bilden [38]).

Setzen wir

$$(20)\quad \begin{cases} A_3=a_1^{(3)}y_1+a_2^{(3)}y_2,\ B_3=b_1^{(3)}y_1+b_2^{(3)}y_2,\ \overline{A}_3=\overline{a}_1^{(3)}y_1+\overline{a}_2^{(3)}y_2,\\ \overline{B}_3=\overline{b}_1^{(3)}y_1+\overline{b}_2^{(3)}y_2,\ C=c_1y_1+c_2y_2,\ D=d_1y_1+d_2y_2 \end{cases}$$

und wählen zunächst

$$(21)\quad \begin{cases} a_1^{(3)}=1,\quad \overline{a}_1^{(3)}=-1,\quad b_2^{(3)}=i,\quad \overline{b}_2^{(3)}=-i\left(=\frac{\partial \overline{B}_3}{\partial y_2}\neq 0\right),\\ b_1^{(3)}=a_2^{(3)},\quad \overline{b}_1^{(3)}=\overline{a}_2^{(3)},\quad d_1=c_2,\quad c_1=\mp 1,\quad d_2=\pm i, \end{cases}$$

so sind die Bedingungen (19) erfüllt und die Fundamentalkomponenten $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ erhalten nach (17) die Werte

$$(22)\quad \begin{cases} g_{1111}=0,\quad g_{1112}=\frac{1}{2}(\overline{a}_2^{(3)}-a_2^{(3)})\mp c_2,\quad g_{1122}=a_2^{(3)}\overline{a}_2^{(3)}+c_2^2,\\ g_{1222}=\frac{i}{2}(\overline{a}_2^{(3)}-a_2^{(3)})\pm ic_2,\quad g_{2222}=0. \end{cases}$$

Wählen wir überdies

$$(23)\qquad c_2=d_1=0,\quad a_2^{(3)}=\overline{a}_2^{(3)}=\pm i\sqrt{2i},$$

so erhalten wir

$$(24)\quad g_{1111}=0,\ g_{1112}=0,\ g_{1122}=-2i,\ g_{1222}=0,\ g_{2222}=0.$$

Außerdem ist jetzt auch die Bedingung (18) erfüllt.

Für das partikuläre Integral

$$(25)\quad \begin{cases} A_3=y_1\pm i\sqrt{2i}\,y_2,\quad B_3=\pm i\sqrt{2i}\,y_1+iy_2,\quad \overline{A}_3=-y_1\pm i\sqrt{2i}\,y_2,\\ \overline{B}_3=\pm i\sqrt{2i}\,y_1-iy_2,\quad C=\mp y_1,\quad D=\pm iy_2 \end{cases}$$

des Cauchy-Kowalewskischen Normalsystems (18), (19) *reduzieren sich die Fundamentalkomponenten* (17) *auf die für den Typus* (II) *charakteristischen Werte* [39]).

Jetzt berechnen wir aus (14) die Koeffizienten $\overline{A}_1$, $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$ des Pfaffschen Systems (13) und erhalten mit Rücksicht auf (25):

---

[38]) vgl. [8]), insbes. § 1, S. 179.

[39]) vgl. § 2 dieser Arbeit.

$$(26) \qquad \bar{A}_1 = 2iy_2^2,\ \bar{B}_1 = -\bar{A}_2 + 8iy_1y_2,\ \bar{B}_2 = 2iy_1^2.$$

Die Integrabilitätsbedingungen verlangen

$$(27) \qquad \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_2} = 4iy_2 = \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y_1} + 8iy_2,\quad \frac{\partial \bar{B}_2}{\partial y_1} = 4iy_1 = \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y_2}$$

oder

$$(28) \qquad \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y_1} = 4iy_2,\quad \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y_2} = 4iy_1,\quad \frac{\partial^2 \bar{A}_2}{\partial y_1 \partial y_2} = 4i.$$

Daraus ergibt sich abgesehen von additiven Konstanten

$$(29) \qquad \bar{A}_2 = 4iy_1y_2 = \bar{B}_1$$

und wir erhalten das vollständig integrable Pfaffsche System

$$(30) \qquad \begin{cases} dy_3 = (y_1 \pm i\sqrt{2i}\, y_2)\, dy_1 + (\pm i\sqrt{2i}\, y_1 + iy_2)\, dy_2, \\ d\bar{y}_1 = 2iy_2^2\, dy_1 + 4iy_1y_2\, dy_2, \\ d\bar{y}_2 = 4iy_1y_2\, dy_1 + 2iy_1^2\, dy_2, \\ d\bar{y}_3 = (-y_1 \pm i\sqrt{2i}\, y_2)\, dy_1 + (\pm i\sqrt{2i}\, y_1 - iy_2)\, dy_2, \\ dz = \mp y_1 dy_1 \pm iy_2 dy_2. \end{cases}$$

Die Integration ergibt abgesehen von additiven Konstanten

$$(31) \qquad \begin{cases} y_3 = \frac{y_1^2}{2} \pm i\sqrt{2i}\, y_1y_2 + \frac{iy_2^2}{2},\ \bar{y}_1 = 2iy_1y_2^2, \\ \bar{y}_2 = 2iy_1^2y_2 \qquad ,\ \bar{y}_3 = -\frac{y_1^2}{2} \pm i\sqrt{2i}\, y_1y_2 - \frac{iy_2^2}{2}, \\ z = \mp \frac{y_1^2}{2} \pm \frac{iy_2^2}{2}, \end{cases}$$

oder zufolge (16) für den Ortsvektor $\mathfrak{x}(y_1, y_2)$ der Integralfläche die Komponenten

$$(32) \qquad \boxed{\begin{aligned} & x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + 2iy_1y_2^2),\ x_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - 2iy_1y_2^2), \\ & x_3 = \frac{1}{2}(y_2 + 2iy_1^2y_2),\ x_4 = \frac{1}{2i}(y_2 - 2iy_1^2y_2),\ x_7 = \pm\frac{i}{2}(y_2^2 + iy_1^2) \\ & x_5 = \pm i\sqrt{2i}\, y_1y_2,\quad x_6 = \frac{1}{2i}(y_1^2 + iy_2^2). \end{aligned}}$$

Für die ersten und zweiten Ableitungen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$ des Vektors (32) ergibt sich die Komponentenmatrix

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{x}_{11} \\ \mathfrak{x}_{12} \\ \mathfrak{x}_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2}(1+2iy_2^2), & \frac{1}{2i}(1-2iy_2^2), & 2iy_1y_2, & -2y_1y_2, & \pm i\sqrt{2i}\,y_2, & -iy_1, & \mp y_1 \\ 2iy_1y_2, & -2y_1y_2, & \frac{1}{2}(1+2iy_1^2), & \frac{1}{2i}(1-2iy_1^2), & \pm i\sqrt{2i}\,y_1, & y_2, & \pm iy_2 \\ 0, & 0, & 2iy_2, & -2y_2, & 0, & -i, & \mp 1 \\ 2iy_2, & -2y_2, & 2iy_1, & -2y_1, & \pm i\sqrt{2i}, & 0, & 0 \\ 2iy_1, & -2y_1, & 0, & 0, & 0, & 1, & \pm i \end{matrix} \right\| . \tag{33}$$

Sie ist vom Rang 5, wie man etwa in einer gewissen Umgebung der Parameterwerte $y_1 = y_2 = 0$ mit Hilfe der aus der ersten, dritten, fünften, sechsten und siebenten Kolonne gebildeten Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -i, & \mp 1 \\ 0, & 0, & \pm i\sqrt{2i}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & \pm i \end{vmatrix} = -\frac{i\sqrt{2i}}{2} \neq 0 \tag{34}$$

erkennt. Somit sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_{11}$, $\mathfrak{x}_{12}$, $\mathfrak{x}_{22}$ für einen gewissen Parameterbereich sicherlich linear unabhängig, der Schmiegraum der Fläche $\mathfrak{x}$ [40]) in den diesen Bereichpunkten entsprechenden Flächenpunkten also fünfdimensional. Ferner verschwinden die Quadratsummen der Elemente sämtlicher Zeilen der Matrix (33) mit Ausnahme der Quadratsumme der Elemente der vierten Zeile identisch in y_1 und y_2. Dasselbe gilt für die inneren Produkte sämtlicher Zeilenpaare mit Ausnahme des Produktes der dritten und fünften Zeile ($\mathfrak{x}_{12}^2 \equiv \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22} \neq 0$). Somit ist die Fläche (32) totalisotrop und erfüllt alle Voraussetzungen für ein Beispiel der Klasse (II, S_5, R_7).

§ 5. *Beispiel für die Flächenklasse* (IV, S_5, R_7).

Ein Beispiel dieser Art gewinnen wir nach einer anderen Methode, die in diesem Falle besonders rasch zum Ziel führt. Wir betrachten das isometrische Flächenpaar

$$x_1 = \cos u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = \sin u, \tag{35}$$

$$y_1 = \cos u \cos v, \quad y_2 = \sin u \cos v, \quad y_3 = \cos u \sin v, \quad y_4 = \sin u \sin v, \tag{36}$$

also einen Zylinder in einem dreidimensionalen und einen Torus

---

[40]) Der Rang der Matrix (33) ist trivialerweise größer als 2, die Integralfläche (32) verdient also wirklich den Namen einer Fläche.

in einem vierdimensionalen Raum. Die totalisotrope „Darstellungsfläche" (im Sinne von E. Bompiani [41]))

$$(37)\quad \mathfrak{x} = \{\cos u, v, \sin u, i\cos u\cos v,\ i\cos u\sin v,\ i\sin u\cos v,\ i\sin u\sin v\}$$

liefert bereits das gesuchte Beispiel!

Beweis. Sind $g^{(z)}_{\alpha\beta}$ und $g^{(t)}_{\alpha\beta}$ die quadratischen Fundamentalkomponenten der Flächen (35) und (36), so gilt

$$\left\| g^{(z)}_{\alpha\beta} \right\| = \left\| g^{(t)}_{\alpha\beta} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Sind dann $g_{\alpha\beta}$ die quadratischen und $g_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die biquadratischen Fundamentalkomponenten der Fläche (36), so gilt:

$$(38)\quad \begin{cases} \left\| g_{\alpha\beta} \right\| = \left\| g^{(z)}_{\alpha\beta} + i^2 g^{(t)}_{\alpha\beta} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{matrix} \right\|, \\ g_{1111} = g_{1112} = 0,\ g_{1122} = -1,\ g_{1222} = 0,\ g_{2222} = -1. \end{cases}$$

Somit hat die biquadratische Fundamentalform F der Fläche (37) die Gestalt:

$$(39)\quad F \equiv -\left(6du_1^2 + du_2^2\right)du_2^2.$$

Für ihre Invarianten Θ_1, Θ_2, Θ_3 gilt

$$(40)\quad \Theta_1 = 6,\ \Theta_2 = 6,\ \Theta_3 = \Theta_2^2 - \frac{1}{6}\Theta_1^3 = 0.$$

Wegen $\Theta_2 \neq 0$ folgt aus der linearen Relation

$$(41)\quad \lambda_1\mathfrak{x}_1 + \lambda_2\mathfrak{x}_2 + \lambda_{11}\mathfrak{x}_{11} + \lambda_{12}\mathfrak{x}_{12} + \lambda_{22}\mathfrak{x}_{22} = 0$$

$$(42)\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{22} = 0,$$

wie man mit Rücksicht auf die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ durch skalare Multiplikation von (41) mit $\mathfrak{x}_{11}$ bzw. $\mathfrak{x}_{12}$ bzw. $\mathfrak{x}_{22}$ erkennt [42]). Somit ist der Schmiegraum der Fläche $\mathfrak{x}$ fünfdimensional. Da Θ_3 verschwindet, gehen durch jeden Punkt allgemeiner Lage auf der Fläche drei zweifach isotrope Kurven und die Fläche genügt somit allen Voraussetzungen für ein Beispiel der Klasse (IV, S_5, R_7).

---

[41]) vgl. E. Bompiani, Geometrie riemanniane di specie superiore [Accad. Italia, Memorie Science Fis., Mat. Nat. 6 (1935), 269—520], insbes. Abschnitt II, Kapitel 5 „La superficie figurativa di una deformazione", 315—326; [17]), § 1.

[42]) vgl. [14]) (a), insbes. S. 1185; zur Theorie der algebraischen Komitanten binärer biquadratischer Formen und ihrer geometrischen Deutung vgl. R. Weitzenböck, Invariantentheorie [Groningen, 1923], § 11, S. 54, A. Clebsch, Theorie der binären Formen [Leipzig, 1872], §§ 40, 48, 49.

§ 6. *Beispiel für die Flächenklasse* (VI, S_5, R_7).

Um eine „äquianharmonische" Fläche zu konstruieren, benutzen wir wiederum die Methode von § 4, wählen aber nunmehr für den Ansatz (20) die speziellen Koeffizienten

$$b_1^{(3)} = a_2^{(3)} = \bar{b}_1^{(3)} = \bar{a}_2^{(3)} = d_1 = c_2 = 1, \tag{43}$$

wodurch die Gleichungen (19) befriedigt werden und die Fundamentalkomponenten (17) die Werte

$$\begin{cases} g_{1111} = a_1^{(3)}\bar{a}_1^{(3)} + c_1^2, \quad g_{1112} = \frac{1}{2}(a_1^{(3)} + \bar{a}_1^{(3)}) + c_1, \\ g_{1122} = 0, \quad g_{1222} = \frac{1}{2}(b_2^{(3)} + \bar{b}_2^{(3)}) + d_2, \quad g_{2222} = b_2^{(3)}\bar{b}_2^{(3)} + d_2^2 \end{cases} \tag{44}$$

gewinnen. Um die für den Typus (VI) charakteristische Fundamentalform [43]) zu erhalten, setzen wir:

$$\begin{cases} (a_1^{(3)}\bar{a}_1^{(3)} + c_1^2)(b_2^{(3)}\bar{b}_2^{(3)} + d_2^2) = -12, \\ \frac{1}{2}(a_1^{(3)} + \bar{a}_1^{(3)}) + c_1 = \frac{1}{2}(b_2^{(3)} + \bar{b}_2^{(3)}) + d_2 = 0\,. \end{cases} \tag{45}$$

Dazu kommt noch die Bedingung (18) in der Form:

$$a_1^{(3)}\bar{b}_2^{(3)} + \bar{a}_1^{(3)}b_2^{(3)} + 2c_1d_2 - 2a_2^{(3)}\bar{a}_2^{(3)} - 2c_2^2 = 0\,. \tag{46}$$

Wir erfüllen (45) durch den Ansatz

$$\begin{cases} a_1^{(3)}\bar{a}_1^{(3)} + c_1^2 = 4 \quad , \qquad b_2^{(3)}\bar{b}_2^{(3)} + d_2^2 = -3, \\ \frac{1}{2}(a_1^{(3)} + \bar{a}_1^{(3)}) + c_1 = 0, \quad \frac{1}{2}(b_2^{(3)} + \bar{b}_2^{(3)}) + d_2 = 0, \\ \text{d.h.} \begin{cases} a_1^{(3)} + \bar{a}_1^{(3)} = -2c_1 \qquad , \quad b_2^{(3)} + \bar{b}_2^{(3)} = -2d_2\,, \\ a_1^{(3)} - \bar{a}_1^{(3)} = \pm 2\sqrt{2c_1^2 - 4}, \quad b_2^{(3)} - \bar{b}_2^{(3)} = \pm 2\sqrt{2d_2^2 + 3}\,. \end{cases} \end{cases} \tag{47}$$

Wählen wir $c_1 = \pm\sqrt{2}$, so folgt

$$\begin{cases} a_1^{(3)} = \bar{a}_1^{(3)} = \mp\sqrt{2}, \quad b_2^{(3)} = -d_2 \pm \sqrt{2d_2^2 + 3}, \\ \bar{b}_2^{(3)} = -d_2 \mp \sqrt{2d_2^2 + 3}\,. \end{cases} \tag{48}$$

Den Koeffizienten d_2 bestimmen wir aus (46) und erhalten:

$$\begin{cases} \mp\sqrt{2}(-d_2 \mp \sqrt{2d_2^2 + 3}) \mp \sqrt{2}(-d_2 \pm \sqrt{2d_2^2 + 3}) \pm 2\sqrt{2}d_2 - 4 = 0, \\ \text{d.h. } d_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_2^{(3)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \pm 2, \quad \bar{b}_2^{(3)} = \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} \mp 2\,. \end{cases} \tag{49}$$

Für das partikuläre Integral

---

[43]) vgl § 2 dieser Arbeit.

$$
(50)\begin{cases}
A_3 = \mp\sqrt{2}\,y_1 + y_2, & \bar{A}_3 = \mp\sqrt{2}y_1 + y_2,\\
B_3 = \qquad y_1 + \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}} \pm 2\right)y_2, & \bar{B}_3 = \qquad y_1 + \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}} \mp 2\right)y_2,\\
C = \pm\sqrt{2}\,y_1 + y_2 \qquad , & D = \qquad y_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,y_2,
\end{cases}
$$

des Cauchy-Kowalewskischen Normalsystems (18), (19) $\left(\bar{b}_2^{(3)} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \mp 2 \neq 0\right)$ *reduzieren sich die Fundamentalkomponenten* (17) *auf die für den Typus* (VI) *charakteristischen Werte* [44])

$$
(51)\quad g_{1111} = 4,\quad g_{1112} = 0,\quad g_{1122} = 2,\quad g_{1222} = 0,\quad g_{2222} = -3,
$$

so daß man für die Invarianten Θ_1, Θ_2

$$
(52)\qquad \Theta_1 = 0,\quad \Theta_2 = 6\begin{vmatrix} 4, & 0, & 2\\ 0, & 2, & 0\\ 2, & 0, & -3\end{vmatrix} = -192 \neq 0
$$

erhält.

Jetzt berechnen wir aus (14) die Koeffizienten $\bar{A}_1$, $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$ des Pfaffschen Systems (13) und erhalten mit Rücksicht auf (50)

$$
(53)\quad \bar{A}_1 = -4y_1^2 - 2y_2^2,\quad \bar{B}_1 = -\bar{A}_2 - 8y_1y_2,\quad \bar{B}_2 = -2y_1^2 + 3y_2^2.
$$

Die Integrabilitätsbedingungen verlangen

$$
(54)\quad \frac{\partial\bar{A}_1}{\partial y_2} = -4y_2 = \frac{\partial\bar{B}_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial\bar{A}_2}{\partial y_1} - 8y_2,\quad \frac{\partial\bar{B}_2}{\partial y_1} = -4\,y_1 = \frac{\partial\bar{A}_2}{\partial y_2}
$$

oder

$$
(55)\qquad \frac{\partial\bar{A}_2}{\partial y_1} = -4y_2,\quad \frac{\partial\bar{A}_2}{\partial y_2} = -4y_1,\quad \frac{\partial^2\bar{A}}{\partial y_1\partial y_2} = -4\,.
$$

Daraus ergibt sich abgesehen von additiven Konstanten

$$
(56)\qquad \bar{A}_2 = -4y_1y_2,\quad \bar{B}_1 = -4y_1y_2,
$$

und wir erhalten das vollständig integrable Pfaffsche System

$$
(57)\begin{cases}
dy_3 = (\mp\sqrt{2}y_1 + y_2)dy_1 + \left(y_1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \pm 2y_2\right)dy_2,\\
d\bar{y}_1 = \quad(-4y_1^2 - 2y_2^2)dy_1 - \qquad 4y_1y_2dy_2,\\
d\bar{y}_2 = \qquad -4y_1y_2\,dy_1 + \quad(-2y_1^2 + 3y_2^2)\,dy_2,\\
d\bar{y}_3 = (\mp\sqrt{2}y_1 + y_2)dy_1 + \left(y_1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \mp 2y_2\right)dy_2,\\
dz = (\pm\sqrt{2}y_1 + y_2)\,dy_1 + \qquad \left(y_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}y_2\right)dy_2.
\end{cases}
$$

[44]) vgl. [43]).

Die Integration ergibt abgesehen von additiven Konstanten

$$
(58)\quad \begin{cases}
y_3 = \dfrac{\mp\sqrt{2}}{2} y_1^2 + y_1 y_2 \mp \dfrac{1}{2\sqrt{2}} y_2^2 \pm y_2^2, & \bar{y}_1 = -\dfrac{4}{3} y_1^3 - 2 y_1 y_2^2, \\
\bar{y}_2 = -2 y_1^2 y_2 + y_2^3 & , \quad \bar{y}_3 = \mp \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_1^2 + y_1 y_2 \mp \dfrac{1}{2\sqrt{2}} y_2^2 \mp y_2^2, \\
z = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} y_1^2 + y_1 y_2 \pm \dfrac{1}{2\sqrt{2}} y_2^2 & ,
\end{cases}
$$

oder zufolge (16) für den Ortsvektor $\mathfrak{x}(y_1, y_2)$ der Integralfläche die Komponenten

$$
(59)\quad \boxed{\begin{array}{ll}
x_1 = \dfrac{1}{2}\left(y_1 - \dfrac{4}{3} y_1^3 - 2 y_1 y_2^2\right), & x_2 = \dfrac{1}{2i}\left(y_1 + \dfrac{4}{3} y_1^3 + 2 y_1 y_2^2\right), \\
x_3 = \dfrac{1}{2}\left(y_2 - 2 y_1^2 y_2 + y_2^3\right) \quad , & x_4 = \dfrac{1}{2i}\left(y_2 + 2 y_1^2 y_2 - y_2^3\right) \quad , \\
x_5 = \dfrac{1}{2}\left(\mp \sqrt{2}\, y_1^2 + 2 y_1 y_2 \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2^2\right), & x_6 = \mp i y_2^2, \\
x_7 = \dfrac{\pm\sqrt{2}}{2} y_1^2 + y_1 y_2 \pm \dfrac{1}{2\sqrt{2}} y_2^2. &
\end{array}}
$$

Für die ersten und zweiten Ableitungen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$ des Vektors (59) ergibt sich die Komponentenmatrix

$$
\left\| \begin{array}{ccccccc}
\dfrac{1-4y_1^2-2y_2^2}{2}, & \dfrac{1+4y_1^2+2y_2^2}{2i}, & -2y_1y_2 \;, & -2iy_1y_2 \;, & \mp\sqrt{2}y_1+y_2, & 0 \;, & \pm\sqrt{2}y_1+y_2 \\
-2y_1y_2 \;, & -2iy_1y_2 \;, & \dfrac{1-2y_1^2+3y_2^2}{2}, & \dfrac{1+2y_1^2-3y_2^2}{2i}, & y_1 \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2 \;, & \mp 2iy_2 \;, & y_1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\
-4y_1 \;, & -4iy_1 \;, & -2y_2 \;, & -2iy_2 \;, & \mp\sqrt{2} \;, & 0 \;, & \pm\sqrt{2} \\
-2y_2 \;, & -2iy_2 \;, & -2y_1 \;, & -2iy_1 \;, & +1 \;, & 0 \;, & 1 \\
-2y_1 \;, & -2iy_1 \;, & 3y_2 \;, & 3iy_2 \;, & \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \;, & \mp 2i \;, & \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}
\end{array} \right\|
$$

Sie ist vom Rang 5, wie man etwa in einer gewissen Umgebung der Parameterwerte $y_1 = y_2 = 0$ mit Hilfe der aus der ersten, dritten, fünften, sechsten und siebenten Kolonne gebildeten Determinante

$$
(61)\quad \begin{vmatrix}
\dfrac{1}{2}, & 0, & 0, & 0, & 0 \\
0, & \dfrac{1}{2}, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & \mp\sqrt{2}, & 0, & \pm\sqrt{2} \\
0, & 0, & +1, & 0, & 1 \\
0, & 0, & \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}, & \mp 2i, & \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}
\end{vmatrix} = + \frac{\sqrt{2}}{i} \neq 0
$$

erkennt. Somit sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_{11}$, $\mathfrak{x}_{12}$, $\mathfrak{x}_{22}$ für einen gewissen Parameterbereich sicherlich linear unabhängig, der Schmiegraum der Fläche $\mathfrak{x}$ [45]) in den diesen Bereichpunkten entsprechenden Flächenpunkten also fünfdimensional. Ferner verschwinden die Quadratsummen der Elemente der ersten und zweiten Zeile der Matrix (60) identisch in y_1 und y_2, während diejenigen der dritten, vierten und fünften Zeile die Werte 4, 2, -3 annehmen. Desgleichen verschwinden die inneren Produkte sämtlicher Zeilenpaare mit Ausnahme des Produktes der dritten und fünften Zeile ($\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22} \equiv \mathfrak{x}_{12}^2 \neq 0$). Somit ist die Fläche (59) totalisotrop und erfüllt alle Voraussetzungen für ein Beispiel der Klasse (VI, S_5, R_7).

§ 7. *Beispiel für die Flächenklasse* (VII, S_5, R_7).

Hier empfiehlt sich wiederum die Methode von § 5. Wir betrachten das isometrische Flächenpaar

$$(62)\quad x_1 = \cos\left[\frac{\pm i}{2}(u+v)\right],\ x_2 = \sin\left[\frac{\pm i}{2}(u+v)\right],\ x_3 = \pm\frac{1}{2}(u-v),$$

$$(63)\quad y_1 = -\frac{u^3}{12} - \frac{v}{u^2},\ y_2 = -\frac{iu^3}{12} + \frac{iv}{u^2},\ y_3 = \frac{u_2}{4} - \frac{v}{u},\ y_4 = -\frac{iu^2}{4} - \frac{iv}{u},$$

also einen Zylinder in einem dreidimensionalen und eine (euklidische!) Regelfläche [46]) in einem vierdimensionalen Raum. Sind $g^{(z)}_{\alpha\beta}$ die quadratischen Fundamentalkomponenten von (62), $g^{(r)}_{\alpha\beta}$ diejenigen von (63) und $g_{\alpha\beta}$ diejenigen der Darstellungsfläche [47])

$$(64)\quad \mathfrak{x} = \left\{ i\cos\left[\frac{\pm i}{2}(u+v)\right],\ i\sin\left[\frac{\pm i}{2}(u+v)\right],\ \pm\frac{i}{2}(u-v),\right.$$
$$\left. -\frac{u^3}{12} - \frac{v}{u^2},\ -\frac{iu^3}{12} + \frac{iv}{u^2},\ \frac{u^2}{4} - \frac{v}{u},\ -\frac{iu^2}{4} - \frac{iv}{u} \right\},$$

so gilt

$$(65)\quad \|g^{(z)}_{\alpha\beta}\| = \|g^{(r)}_{\alpha\beta}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right\|,\ \|g_{\alpha\beta}\| = \|g^{(z)}_{\alpha\beta} + i^2 g^{(r)}_{\alpha\beta}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

und man erhält die biquadratischen Fundamentalkomponenten

---

[45]) vgl. [40]).
[46]) vgl. [17]), insbes. § 3.
[47]) vgl. [41]).

und Invarianten

$$(66)\quad \begin{cases} g_{1111} \equiv \dfrac{8v}{u^3} - \dfrac{1}{16}, \quad g_{1112} \equiv -\dfrac{1}{u^2} - \dfrac{1}{16}, \quad g_{1122} \equiv -\dfrac{1}{16}, \\ g_{1222} = -\dfrac{1}{16}, \qquad g_{2222} \equiv -\dfrac{1}{16}, \end{cases}$$

$$(67)\quad \begin{cases} \Theta_1 \equiv -\dfrac{v}{u^3} - \dfrac{1}{2u^2}, \quad \Theta_2 \equiv -\dfrac{6}{16} \begin{vmatrix} \dfrac{8v}{u^3}, & -\dfrac{1}{u^2}, & 1 \\ -\dfrac{1}{u^2}, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \equiv \dfrac{3}{8u^4}, \\ \Theta_3 \equiv \Theta_2^2 - \dfrac{1}{6}\Theta_1^3 \not\equiv 0 \end{cases} \qquad \{u, v\}.$$

Zufolge $\Theta_2 \not\equiv 0$ ist der Schmiegraum der Fläche (64) in Punkten allgemeiner Lage notwendig fünfdimensional, zufolge (65) ist sie totalisotrop und genügt damit allen Voraussetzungen für ein Beispiel der Klasse (VII, S_5, R_7).

Durch die Ergebnisse der §§ 3, 4, 5, 6, 7 erscheinen sämtliche Behauptungen von Satz 3 aus § 2 bewiesen. Wir wenden uns daher jetzt in den folgenden §§ zum Beweise der Aussagen von Satz 4 aus § 2. Es handelt sich um die beiden Flächenklassen: (III, S_5, R_8) und (V, S_5, R_8).

§ 8. *Beispiel für die Flächenklasse* (III, S_5, R_8).

Die Integration der Mongeschen Differentialgleichung

$$(68)\qquad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + dx_5^2 + dx_6^2 + dx_7^2 + dx_8^2 = 0$$

führt in Analogie zu der in § 4 und § 6 verwendeten Methode auf das Pfaffsche System

$$(69)\quad \begin{cases} dy_3 = A_3(y_1, y_2)dy_1 + B_3(y_1, y_2)dy_2, \\ \qquad d\bar{y}_1 = \bar{A}_1(y_1, y_2)dy_1 + \bar{B}_1(y_1, y_2)\,dy_2\,, \\ \qquad d\bar{y}_3 = \bar{A}_3(y_1, y_2)dy_1 + \bar{B}_3(y_1, y_2)dy_2 \\ dy_4 = A_4(y_1, y_2)dy_1 + B_4(y_1, y_2)dy_2\,. \\ \qquad d\bar{y}_2 = \bar{A}_2(y_1, y_2)dy_1 + B_2(y_1, y_2,)dy_2\,, \\ \qquad d\bar{y}_4 = \bar{A}_4(y_1, y_2)dy_1 + \bar{B}_4(y_1, y_2)dy_2\,, \end{cases}$$

wobei jetzt

$$(70)\quad \begin{cases} \bar{A}_1 + A_3\bar{A}_3 + A_4\bar{A}_4 = 0\,, \\ \qquad \bar{B}_1 + \bar{A}_2 + A_3\bar{B}_3 + \bar{A}_3B_3 + A_4\bar{B}_4 + \bar{A}_4B_4 = 0\,, \\ \bar{B}_2 + B_3\bar{B}_3 + B_4\bar{B}_4 = 0\,. \end{cases}$$

Den Substitutionen (15) und (16) entsprechen

$$(71)\quad \begin{cases} y_1=x_1+ix_2, & y_2=x_3+ix_4, \quad y_3=x_5+ix_6, \quad y_4=x_7+ix_8, \\ \bar{y}_1=x_1-ix_2, & \bar{y}_2=x_3-ix_4, \quad \bar{y}_3=x_5-ix_6, \quad \bar{y}_4=x_7-ix_8, \end{cases} \quad (i=\sqrt{-1});$$

$$(72)\quad \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(y_1+\bar{y}_1), \quad x_3=\frac{1}{2}(y_2+\bar{y}_2), \\ \qquad x_5=\frac{1}{2}(y_3+\bar{y}_3), \quad x_7=\frac{1}{2}(y_4+\bar{y}_4), \\ x_2=\frac{1}{2i}(y_1-\bar{y}_1), \quad x_4=\frac{1}{2i}(y_2-\bar{y}_2), \\ \qquad x_6=\frac{1}{2i}(y_3-\bar{y}_3), \quad x_8=\frac{1}{2i}(y_4-\bar{y}_4), \end{cases} \quad (i=\sqrt{-1}).$$

Aus (72) ergeben sich die biquadratischen Fundamentalkomponenten

$$(73)\quad \begin{cases} g_{1111}=\frac{\partial A_3}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_1}+\frac{\partial A_4}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{A}_4}{\partial y_1}, \\ g_{1112}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_1}\frac{\partial A_3}{\partial y_2}+\frac{\partial A_3}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_2}+\frac{\partial \bar{A}_4}{\partial y_1}\frac{\partial A_4}{\partial y_2}+\frac{\partial A_4}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{A}_4}{\partial y_2}\right)= \\ \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_1}\frac{\partial B_3}{\partial y_1}+\frac{\partial A_3}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_1}+\frac{\partial \bar{A}_4}{\partial y_1}\frac{\partial B_4}{\partial y_1}+\frac{\partial A_4}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{B}_4}{\partial y_1}\right), \\ g_{1122}=\frac{\partial A_3}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_2}+\frac{\partial A_4}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{A}_4}{\partial y_2}=\frac{\partial B_3}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_1}+\frac{\partial B_4}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{B}_4}{\partial y_1}, \\ g_{1222}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_2}\frac{\partial B_3}{\partial y_2}+\frac{\partial A_3}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_2}+\frac{\partial \bar{A}_4}{\partial y_2}\frac{\partial B_4}{\partial y_2}+\frac{\partial A_4}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{B}_4}{\partial y_2}\right)= \\ \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_2}\frac{\partial B_3}{\partial y_1}+\frac{\partial B_3}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_1}+\frac{\partial \bar{B}_4}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{B}_4}{\partial y_1}+\frac{\partial B_2}{\partial y_4}\frac{\partial \bar{B}_4}{\partial y_1}\right), \\ g_{2222}=\frac{\partial B_3}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_2}+\frac{\partial B_4}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{B}_4}{\partial y_2}. \end{cases}$$

Analog zu (18), (19) bestehen hier die Integrabilitätsbedingungen

$$(74)\qquad \sum_{\nu=3}^{4}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial y_1}\frac{\partial \bar{B}_\nu}{\partial y_2}+\frac{\partial \bar{A}_\nu}{\partial y_1}\frac{\partial B_\nu}{\partial y_2}-2\frac{\partial A_\nu}{\partial y_2}\frac{\partial \bar{A}_\nu}{\partial y_2}\right)=0,$$

$$(75)\qquad \frac{\partial A_3}{\partial y_2}=\frac{\partial B_3}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial A_4}{\partial y_2}=\frac{\partial B_4}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \bar{A}_3}{\partial y_2}=\frac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \bar{A}_4}{\partial y_2}=\frac{\partial \bar{B}_4}{\partial y_1},$$

die im allgemeinen wiederum $\left(\text{z.B. für } \frac{\partial \bar{B}_3}{\partial y_2}\neq 0\right)$ ein Cauchy-

Kowalewskisches Normalsystem bilden. In Analogie zu (20) setzen wir

$$(76)\quad \begin{cases} A_3 = a_1^{(3)} y_1 + a_2^{(3)} y_2, \quad A_4 = a_1^{(4)} y_1 + a_2^{(4)} y_2, \\ \qquad\qquad \bar{A}_3 = \bar{a}_1^{(3)} y_1 + \bar{a}_2^{(3)} y_2, \quad \bar{A}_4 = \bar{a}_1^{(4)} y_1 + \bar{a}_2^{(4)} y_2, \\ B_3 = b_1^{(3)} y_1 + b_2^{(3)} y_2, \quad B_4 = b_1^{(4)} y_1 + b_2^{(4)} y_2, \\ \qquad\qquad \bar{B}_3 = \bar{b}_1^{(3)} y_1 + \bar{b}_2^{(3)} y_2, \quad \bar{B}_4 = \bar{b}_1^{(4)} y_1 + \bar{b}_2^{(4)} y_2 \end{cases}$$

und befriedigen zunächst die Gleichungen (75) durch die Wahl

$$(77)\quad b_1^{(3)} = a_2^{(3)} = \bar{b}_1^{(3)} = \bar{a}_2^{(3)} = 1, \quad b_1^{(4)} = a_2^{(4)} = \bar{b}_1^{(4)} = \bar{a}_2^{(4)} = i,$$

gemäß welcher sich die Fundamentalkomponenten (73) auf die Werte

$$(78)\quad \begin{cases} g_{1111} = a_1^{(3)} \bar{a}_1^{(3)} + a_1^{(4)} \bar{a}_1^{(4)}, \quad g_{1112} = \frac{1}{2}\left(a_1^{(3)} + \bar{a}_1^{(3)} + i a_1^{(4)} + i \bar{a}_1^{(4)}\right), \\ g_{1122} = 0, \quad g_{1222} = \frac{1}{2}\left(b_2^{(3)} + \bar{b}_2^{(3)} + i b_2^{(4)} + i \bar{b}_2^{(4)}\right), \\ g_{2222} = b_2^{(3)} \bar{b}_2^{(3)} + b_2^{(4)} \bar{b}_2^{4)} \end{cases}$$

reduzieren. Um eine für den Typus (III) charakteristische Fundamentalform [48]) zu erhalten, setzen wir

$$(79)\quad \begin{cases} a_1^{(3)} = \bar{a}_1^{(3)} = \frac{1}{2}, \quad a_1^{(4)} = \bar{a}_1^{(4)} = \frac{1}{2i}, \\ b_2^{(3)} + \bar{b}_2^{(3)} + i\left(b_2^{(4)} + \bar{b}_2^{(4)}\right) = b_2^{(3)} \bar{b}_2^{(3)} + b_2^{(4)} \bar{b}_2^{(4)} = 0. \end{cases}$$

Außerdem besteht noch die Bedingung (74) in der Form

$$(80)\quad b_2^{(3)} + \bar{b}_2^{(3)} - i\left(b_2^{(4)} + \bar{b}_2^{(4)}\right) = 0.$$

Wir erfüllen (79) und (80) durch die Wahl

$$(81)\quad b_2^{(3)} = \pm i, \quad \bar{b}_2^{(3)} = \mp i, \quad b_2^{(4)} = +1, \quad \bar{b}_2^{(4)} = -1$$

und erhalten entsprechend

$$(82)\quad g_{1111} = 0, \quad g_{1112} = 1, \quad g_{1122} = 0, \quad g_{1222} = 0, \quad g_{2222} = 0.$$

Für das partikuläre Integral

$$(83)\quad \begin{cases} A_3 = \frac{1}{2} y_1 + y_2, \quad A_4 = \frac{1}{2i} y_1 + i y_2, \\ \qquad\qquad \bar{A}_3 = \frac{1}{2} y_1 + y_2, \quad \bar{A}_4 = \frac{1}{2i} y_1 + i y_2, \\ B_3 = y_1 \pm i y_2, \quad B_4 = i y_1 + y_2, \\ \qquad\qquad \bar{B}_3 = y_1 \mp i y_2, \quad \bar{B}_4 = i y_1 - y_2, \end{cases}$$

des Cauchy-Kowalewskischen Normalsystems (74), (75) ($\bar{b}_2^{(3)} = \mp i \neq 0$)

---

48) vgl. § 2 dieser Arbeit.

reduzieren sich die Fundamentalkomponenten (73) *auf die für den Typus* (III) *charakteristischen Werte*[49]).

Jetzt berechnen wir aus (70) die Koeffizienten $\bar{A}_1$, $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$ des Pfaffschen Systems (69) und erhalten mit Rücksicht auf (83)

$$\bar{A}_1 = -2y_1y_2,\quad \bar{B}_1 = -\bar{A}_2 - 2y_1^2,\quad \bar{B}_2 = 0\,. \tag{84}$$

Die Integrabilitätsbedingungen verlangen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y_2} = -2y_1 = \frac{\partial \bar{B}_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y_1} - 4y_1,\\ &\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y_2} = \frac{\partial \bar{B}_2}{\partial y_1} = 0,\ \text{d.h.}\ \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y_1} = -2y_1,\quad \frac{\partial^2 \bar{A}_2}{\partial y_1\,\partial y_2} = 0. \end{aligned}\right. \tag{85}$$

Somit ergibt sich

$$\bar{A}_2 = -y_1^2 + k,\quad \bar{B}_1 = -y_1^2 - k\,, \tag{86}$$

und wir erhalten das vollständig integrable Pfaffsche System

$$\left\{\begin{aligned} dy_3 &= \left(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2\right)dy_1 + (y_1 \pm iy_2)\,dy_2\,,\\ d\bar{y}_1 &= -2y_1y_2\,dy_1 + (-y_1^2 - k)\,dy_2\,,\\ d\bar{y}_3 &= \left(\tfrac{1}{2}y_1 + y_2\right)dy_1 + (y_1 \mp iy_2)\,dy_2\,,\\ dy_4 &= \left(\tfrac{1}{2i}y_1 + iy_2\right)dy_1 + (iy_1 + y_2)\,dy_2\,,\\ d\bar{y}_2 &= (-y_1^2 + k)\,dy_1\,,\\ d\bar{y}_4 &= \left(\tfrac{1}{2i}y_1 + iy_2\right)dy_1 + (iy_1 - y_2)\,dy_2\,. \end{aligned}\right. \tag{87}$$

Die Integration ergibt abgesehen von additiven Konstanten

$$\left\{\begin{aligned} &y_3 = y_1y_2 + \frac{y_1^2}{4} \pm \frac{iy_2^2}{2},\quad \bar{y}_1 = -y_1^2y_2 - ky_2,\quad \bar{y}_3 = \frac{y_1^2}{4} + y_1y_2 \mp \frac{iy_2^2}{2},\\ &y_4 = iy_1y_2 + \frac{y_1^2}{4i} + \frac{y_2^2}{2},\quad \bar{y}_2 = -\frac{y_1^3}{3} + ky_1,\quad \bar{y}_4 = \frac{y_1^2}{4i} + iy_1y_2 - \frac{y_2^2}{2}, \end{aligned}\right. \tag{88}$$

oder zufolge (72) für den Ortsvektor $\mathfrak{x}(y_1, y_2)$ der Integralfläche die Komponenten

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - y_1^2y_2 - ky_2),\quad x_3 = \frac{1}{2}\left(y_2 - \frac{y_1^3}{3} + ky_1\right),\\ &\qquad\qquad x_5 = \frac{y_1^2}{4} + y_1y_2\,,\qquad x_7 = \frac{y_1^2}{4i} + iy_1y_2\\ &x_2 = \frac{1}{2i}(y_1 + y_1^2y_2 + ky_2),\quad x_4 = \frac{1}{2i}\left(y_2 + \frac{y_1^3}{3} - ky_1\right),\\ &\qquad\qquad x_6 = \frac{y_2^2}{2},\qquad x_8 = \frac{y_2^2}{2i}\,. \end{aligned}} \tag{89}$$

[49]) vgl. [48]).

Für die ersten und zweiten Ableitungen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_{11}$, $\mathfrak{x}_{12}$, $\mathfrak{x}_{22}$ des Vektors (89) ergibt sich die Komponentenmatrix

$$\text{)}\quad \left\| \begin{matrix} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{x}_{11} \\ \mathfrak{x}_{12} \\ \mathfrak{x}_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} - y_1 y_2, & \frac{1}{2i} + \frac{y_1 y_2}{i}, & \frac{1}{2}(-y_1^2 + k), & \frac{1}{2i}(y_1^2 - k), & \frac{y_1}{2} + y_2, & 0, & \frac{y_1}{2i} + iy_2, & 0 \\ \frac{1}{2}(-y_1^2 - k), & \frac{1}{2i}(y_1^2 + k), & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2i}, & y_1, & y_2, & iy_1, & -iy_2 \\ -y_2, & -iy_2, & -y_1, & -iy_1, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2i}, & 0 \\ -y_1, & -iy_1, & 0, & 0, & 1, & 0, & i, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & -i \end{matrix} \right\|$$

Sie ist vom Rang 5, wie man etwa in einer gewissen Umgebung der Parameterwerte $y_1 = y_2 = 0$ mit Hilfe der aus der ersten, vierten, fünften, sechsten und siebenten Kolonne gebildeten Determinante

$$(91) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}, & -\frac{k}{2i}, & 0, & 0, & 0 \\ -\frac{k}{2}, & \frac{1}{2i} & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 0, & \frac{1}{2i} \\ 0, & 0, & 1, & 0, & i \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1 + k^2}{4}$$

für beliebige Konstante $k \neq \pm 1$ erkennt. Somit sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_{11}$, $\mathfrak{x}_{12}$, $\mathfrak{x}_{22}$ für einen gewissen Parameterbereich sicherlich linear unabhängig, der Schmiegraum der Fläche $\mathfrak{x}$ [50]) in den diesen Bereichpunkten entsprechenden Flächenpunkten also fünfdimensional. Ferner verschwinden die Quadratsummen der Elemente aller Zeilen der Matrix (90) identisch in y_1 und y_2, desgleichen die inneren Produkte aller Zeilenpaare mit Ausnahme des Produktes $\mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{12} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2i} = g_{1112} = 1$. Somit ist die Fläche (89) totalisotrop und erfüllt alle Voraussetzungen für ein Beispiel der Klasse (III, S_5, R_8).

§ 9. *Beispiel für die Flächenklasse* (V, S_5, R_8).

Zur Konstruktion eines Beispiels dieser Art übernehmen wir die Formeln (68) bis (76) des vorhergehenden § 8 ohne jede Änderung, befriedigen jedoch die Gleichungen (75) durch die

---

[50]) vgl. [45]).

Koeffizientenwahl

(92) $b_1^{(3)} = a_2^{(3)} = \bar{b}_1^{(3)} = \bar{a}_2^{(3)} = b_1^{(4)} = a_2^{(4)} = +1,\ \bar{b}_1^{(4)} = \bar{a}_2^{(4)} = -1.$

Dann erhalten wir für die Fundamentalkomponenten (73)

$$(93)\begin{cases} g_{1111} = a_1^{(3)}\bar{a}_1^{(3)} + a_1^{(4)}\bar{a}_1^{(4)}, \quad g_{1112} = \frac{1}{2}\left(a_1^{(3)} - a_1^{(4)} + \bar{a}_1^{(3)} - \bar{a}_1^{(4)}\right), \\ g_{1122} = 0, \quad g_{1222} = \frac{1}{2}\left(b_2^{(3)} - b_2^{(4)} + \bar{b}_2^{(3)} - \bar{b}_2^{(4)}\right), \\ g_{2222} = b_2^{(3)}\bar{b}_2^{(3)} + b_2^{(4)}\bar{b}_2^{(4)}. \end{cases}$$

Um eine für den Typus (V) charakteristische kanonische Fundamentalform [51]) zu erhalten, setzen wir

$$(94)\begin{cases} \bar{a}_1^{(3)} = \bar{a}_1^{(4)} = k_1, & \bar{b}_2^{(3)} = \bar{b}_2^{(4)} = k_2, \\ a_1^{(3)}\bar{a}_1^{(3)} + a_1^{(4)}\bar{a}_1^{(4)} = k_1, & b_2^{(3)}\bar{b}_2^{(3)} + b_2^{(4)}\bar{b}_2^{(4)} = k_2, \\ a_1^{(3)} - a_1^{(4)} = -2k_1, & b_2^{(3)} - b_2^{(4)} = -2k_2, \quad k_1 k_2 \neq 0 \end{cases}$$

oder

$$(95) \qquad a_1^{(3)} = \frac{1-2k_1}{2},\ a_1^{(4)} = \frac{1+2k_1}{2},\ b_2^{(3)} = \frac{1-2k_2}{2},\ b_2^{(4)} = \frac{1+2k_2}{2}.$$

Außerdem besteht noch die Bedingung (74) in der Form

$$(96) \qquad k_1 + k_2, = 0, \quad \text{z.B. } k_1 = +1,\ k_2 = -1.$$

Für das partikuläre Integral

$$(97)\begin{cases} A_3 = \frac{1}{2}y_1 + y_2,\ A_4 = \frac{3}{2}y_1 + y_2,\ \bar{A}_3 = y_1 + y_2,\ \bar{A}_4 = y_1 - y_2 \\ B_3 = y_1 + \frac{3}{2}y_2,\ B_4 = y_1 - \frac{y_2}{2},\ \bar{B}_3 = y_1 - y_2,\ \bar{B}_4 = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

des Cauchy-KowalewskischenNormalsystems (74), (75) ($\bar{b}_2^{(3)} = -1 \neq 0$) *reduzieren sich die Fundamentalkomponenten* (73) *auf die für den Typus* (V) *charakteristischen Werte* [52])

$$(98) \qquad g_{1111} = 1,\quad g_{1112} = g_{1122} = g_{1222} = 0,\quad g_{2222} = -1,$$

so daß man für die Invarianten Θ_1, Θ_2 *der kanonischen Fundamentalform*

$$(99) \qquad F \equiv dy_1^4 - dy_2^4$$

die Werte

$$(100) \qquad \Theta_1 = -2, \quad \Theta_2 = 0$$

erhält.

---

[51]) vgl. § 2 dieser Arbeit.

[52]) vgl. [51]).

Jetzt berechnen wir aus (70) die Koeffizienten $\overline{A}_1$, $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$ des Pfaffschen Systems (69) und erhalten mit Rücksicht auf (97)

$$\overline{A}_1 = -y_1^2,\quad \overline{B}_1 = -\overline{A}_2,\quad \overline{B}_2 = +y_2^2. \tag{101}$$

Die Integrabilitätsbedingungen verlangen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \overline{A}_1}{\partial y_2} = 0 = \dfrac{\partial \overline{B}_1}{\partial y_1} = -\dfrac{\partial \overline{A}_2}{\partial y_1},\quad \dfrac{\partial \overline{A}_2}{\partial y_2} = \dfrac{\partial \overline{B}_1}{\partial y_1} = 0 \\ \text{d.h. } \overline{A}_2 = \varrho,\ \overline{B}_1 = -\varrho. \end{array}\right. \tag{102}$$

So ergibt sich das vollständig integrable Pfaffsche System

$$\left\{\begin{array}{l} dy_3 = \left(-\dfrac{1}{2}y_1 + y_2\right)dy_1 + \left(y_1 + \dfrac{3}{2}y_2\right)dy_2, \\ d\bar{y}_1 = -y_1^2 dy_1 - \varrho dy_2,\quad d\bar{y}_3 = (y_1 + y_2)\,dy_1 + (y_1 - y_2)\,dy_2, \\ dy_4 = \left(\dfrac{3}{2}y_1 + y_2\right)dy_1 + \left(y_1 - \dfrac{y_2}{2}\right)dy_2, \\ d\bar{y}_2 = \varrho dy_1 + y_2^2 dy_2,\quad d\bar{y}_4 = (y_1 - y_2)dy_1 + (-y_1 - y_2)dy_2. \end{array}\right. \tag{103}$$

Durch Integration erhalten wir abgesehen von additiven Konstanten

$$\left\{\begin{array}{lll} y_3 = -\dfrac{y_1^2}{4} + y_1 y_2 + \dfrac{3y_2^2}{4}, & \bar{y}_1 = -\dfrac{y_1^3}{3} - \varrho y_2, & \bar{y}_3 = \dfrac{y_1^2}{2} + y_1 y_2 - \dfrac{y_2^2}{2}, \\ y_4 = \dfrac{3}{4}y_1^2 + y_1 y_2 - \dfrac{y_2^2}{4}, & \bar{y}_2 = \varrho y_1 + \dfrac{y_2^3}{3}, & \bar{y}_4 = \dfrac{y_1^2}{2} - y_1 y_2 - \dfrac{y^2}{2}, \end{array}\right. \tag{104}$$

oder zufolge (72) für den Ortsvektor $\mathfrak{x}(y_1, y_2)$ der Integralfläche die Komponenten

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1 = \dfrac{1}{2}\left(y_1 - \dfrac{y_1^3}{3} - \varrho y_2\right), & x_3 = \dfrac{1}{2}\left(y_2 + \varrho y_1 + \dfrac{y_2^3}{3}\right), \\ x_5 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_1^2}{4} + 2y_1 y_2 + \dfrac{y_2^2}{4}\right), & x_7 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5y_1^2}{4} - \dfrac{3y_2^2}{4}\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{2i}\left(y_1 + \dfrac{y_1^3}{3} + \varrho y_2\right), & x_4 = \dfrac{1}{2i}\left(y_2 - \varrho y_1 - \dfrac{y_2^3}{3}\right), \\ x_6 = \dfrac{1}{2i}\left(-\dfrac{3y_1^2}{4} + \dfrac{5y_2^2}{4}\right), & x_8 = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{y_1^2}{4} + 2y_1 y_2 + \dfrac{y_2^2}{4}\right). \end{array}} \tag{105}$$

Für die ersten und zweiten Ableitungen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_{11}$, $\mathfrak{x}_{12}$, $\mathfrak{x}_{22}$ des Vektors (105) ergibt sich die Komponentenmatrix

$$(106)\quad \left\|\begin{array}{c}\mathfrak{x}_1\\ \mathfrak{x}_2\\ \mathfrak{x}_{11}\\ \mathfrak{x}_{12}\\ \mathfrak{x}_{22}\end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{llllllll}
\frac{1}{2}(1-y_1^2), & \frac{1}{2i}(1+y_1^2), & \frac{\varrho}{2}, & \frac{i\varrho}{2}, & \frac{y_1}{4}+y_2, & \frac{3i}{4}y_1, & \frac{5}{4}y_1, & \frac{-iy_1}{4}- \\
-\frac{\varrho}{2}, & \frac{\varrho}{2i}, & \frac{1}{2}(1+y_2^2), & \frac{1}{2i}(1-y_2^2), & y_1+\frac{y_2}{4}, & -\frac{5i}{4}y_2, & -\frac{3}{4}y_2, & -iy_1- \\
-y_1, & -iy_1, & 0, & 0, & \frac{1}{4}, & +\frac{3i}{4}, & \frac{5}{4}, & -\frac{i}{4} \\
0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & -i \\
0, & 0, & y_2, & iy_2, & \frac{1}{4}, & -\frac{5i}{4}, & -\frac{3}{4}, & -\frac{i}{4}
\end{array}\right.$$

Sie ist vom Rang 5, wie man etwa in einer gewissen Umgebung der Parameterwerte $y_1 = y_2 = 0$ mit Hilfe der aus der ersten, dritten, siebenten, sechsten und achten Kolonne gebildeten Determinante

$$(107)\quad \left|\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{2}, & \frac{\varrho}{2}, & 0, & 0, & 0 \\
-\frac{\varrho}{2}, & \frac{1}{2}, & 0, & 0, & 0 \\
0, & 0, & \frac{3i}{4}, & \frac{5}{4}, & -\frac{i}{4} \\
0, & 0, & 0, & 0, & -i \\
0, & 0, & -\frac{5i}{4}, & -\frac{3}{4}, & -\frac{i}{4}
\end{array}\right| = -\frac{1+\varrho^2}{4}$$

für beliebige Konstante $\varrho \neq \pm i$ erkennt. Somit sind die Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$ für einen gewissen Parameterbereich sicherlich linear unabhängig, der Schmiegraum der Fläche $\mathfrak{x}$ [53]) in den diesen Bereichpunkten entsprechenden Flächenpunkten also fünfdimensional. Ferner verschwinden die Quadratsummen der Elemente der ersten, zweiten und vierten Zeile der Matrix (106) identisch in y_1 und y_2, während diejenigen der dritten und fünften die Werte $+ 1$, $- 1$ annehmen. Desgleichen verschwinden die inneren Produkte sämtlicher Zeilenpaare identisch in y_1 und y_2. Somit ist die Fläche (105) totalisotrop und erfüllt alle Voraussetzungen für ein Beispiel der Klasse (V, S_5, R_8).

Durch die Ergebnisse der §§ 8 und 9 erscheinen sämtliche Behauptungen von Satz 4 aus § 2 bewiesen. Wir wenden uns daher jetzt zum Beweis von Satz 5 aus § 2. Es handelt sich nur noch um die Flächenklasse (I, S_5, R_9).

---

[53]) vgl. [50]).

§ 10. *Beispiel für die Flächenklasse* (I, S_5, R_9).

Hier empfielt sich wiederum die Methode von § 3. Wir betrachten die vierfach [54]) isotrope Kurve des R_9

$$\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{z}=\mathfrak{z}(u_1),\ \mathfrak{z}_1^2\equiv\mathfrak{z}_{11}^2\equiv\mathfrak{z}_{111}^2\equiv\mathfrak{z}_{1111}^2\equiv 0,\ \mathfrak{z}_{11111}^2\not\equiv 0,\\ (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_{11}, \mathfrak{z}_{111}, \mathfrak{z}_{1111}, \ldots, \mathfrak{z}_{111\,111\,111})\not\equiv 0 \qquad \{u_1\}.\end{array}\right. \tag{108}$$

Sie erzeugt die vierdimensionale totalisotrope Hypertorse (Tangentenhyperfläche)

$$\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{y}(u_1, u_2, u_3, u_4)=\mathfrak{z}(u_1)+u_2\mathfrak{z}_1(u_1)+u_3\mathfrak{z}_{11}(u_1)+u_4\mathfrak{z}_{111}(u_1),\\ \mathfrak{y}_\alpha\mathfrak{y}_\beta\equiv 0 \qquad \{u_1, u_2, u_3, u_4\}\ \ (\alpha, \beta=1, 2, 3, 4).\end{array}\right. \tag{109}$$

Auf (109) betrachten wir die zweidimensionale totalisotrope Fläche

$$\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{x}(u_1, u_2)=\mathfrak{z}(u_1)+u_2\mathfrak{z}_1(u_1)+\\ \qquad\qquad +\varphi(u_1, u_2)\,\mathfrak{z}_{11}(u_1)+\psi(u_1, u_2)\,\mathfrak{z}_{111}(u_1),\end{array}\right. \tag{110}$$

die wir also aus (109) erhalten, indem wir u_3 und u_4 durch geeignete analytische Funktionen $\varphi(u_1, u_2)$ und $\psi(u_1, u_2)$ der Parameter u_1, u_2 ersetzen.

Für die ersten und zweiten Ableitungen des Flächenortsvektors $\mathfrak{x}$ ergibt sich: [55])

$$\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{x}_1\ \ =\mathfrak{z}_1+\alpha_{11}\mathfrak{z}_{11}+\alpha_{111}\mathfrak{z}_{111}+\alpha_{1111}\mathfrak{z}_{1111},\\ \mathfrak{x}_{11}=\gamma_{11}\mathfrak{z}_{11}+\gamma_{111}\mathfrak{z}_{111}+\gamma_{1111}\mathfrak{z}_{1111}+\gamma_{11111}\mathfrak{z}_{11111},\\ \mathfrak{x}_2\ \ =\mathfrak{z}_1+\beta_{11}\mathfrak{z}_{11}+\beta_{111}\mathfrak{z}_{111},\\ \mathfrak{x}_{22}=\varepsilon_{11}\mathfrak{z}_{11}+\varepsilon_{111}\mathfrak{z}_{111},\\ \mathfrak{x}_{12}=\delta_{11}\mathfrak{z}_{11}+\delta_{111}\mathfrak{z}_{111}+\delta_{1111}\mathfrak{z}_{1111}.\end{array}\right. \tag{111}$$

Demnach verschwinden sämtliche Quadrate und Skalarprodukte der Vektoren (111) identisch in u_1, u_2, ψ, φ ausgenommen $\mathfrak{x}_{11}^2\equiv\gamma_{11111}^2\mathfrak{z}_{11111}^2\equiv g_{1111}\not\equiv 0\ \ \{u_1, u_2, \varphi, \psi\}$.

Gleichwohl ergibt die Laplacesche Entwicklung [56]) des Determinantenquadrates

$$\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4)^2\equiv\\ \qquad\begin{vmatrix}\mathfrak{v}_1\mathfrak{x}_1, & \mathfrak{v}_2\mathfrak{x}_1, & \mathfrak{v}_3\mathfrak{x}_1, & \mathfrak{v}_4\mathfrak{x}_1\\ \mathfrak{v}_1\mathfrak{x}_2, & \mathfrak{v}_2\mathfrak{x}_2, & \mathfrak{v}_3\mathfrak{x}_2, & \mathfrak{v}_4\mathfrak{x}_2\\ \mathfrak{v}_1\mathfrak{x}_{12}, & \mathfrak{v}_2\mathfrak{x}_{12}, & \mathfrak{v}_3\mathfrak{x}_{12}, & \mathfrak{v}_4\mathfrak{x}_{12}\\ \mathfrak{v}_1\mathfrak{x}_{22}, & \mathfrak{v}_2\mathfrak{x}_{22}, & \mathfrak{v}_3\mathfrak{x}_{22}, & \mathfrak{v}_4\mathfrak{x}_{22}\end{vmatrix}^2 g_{1111}\not\equiv 0\ \ \{u_1, u_2, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4\},\end{array}\right. \tag*{)}$$

---

[54]) vgl. [3]) (c), insbes. § 5.

[55]) Die Bedeutung der Koeffizienten $\alpha_{\ldots}, \beta_{\ldots}, \gamma_{\ldots}, \ldots$ ergibt sich natürlich aus (110).

[56]) Entwicklung nach den Determinanten vierter Ordnung der Kolonnen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$ in $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, *, *, *, *, *)^2$!

so daß man für passende Wahl der Vektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_4$ die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}$ erkennt. Andererseits gehört die totalisotrope Fläche (110) wegen

$$(113) \qquad g_{1112} = g_{1122} = g_{1222} = g_{2222} = 0$$

zum Typus (I) und erfüllt also alle Voraussetzungen für ein Beispiel der Klasse (I, S_5, R_9).

§ 11. *Die leeren Felder der Klassifikationstabelle.*

Wir haben noch die Nichtexistenz der den leeren Feldern der Klassifikationstabelle aus § 2 entsprechenden Flächenklassen zu beweisen.

Ist $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor in R_5, so gilt für jede totalisotrope Fläche $\mathfrak{x}$ des R_5

$$(114) \qquad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}, \mathfrak{v})^2 \equiv 0 \quad \{u_1, u_2, \mathfrak{v}\}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2.$$

Somit existieren für solche Flächen im R_5 höchstens dreidimensionale Schmiegräume. Die geometrische Gestalt dieser Flächen ist bekannt (totalisotrope Torsen [57])), der einzige nichtlineare Typus ist (I).

Ist $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor in R_6, so gilt für jede totalisotrope Fläche $\mathfrak{x}$ des R_6

$$(115) \qquad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{v})^2 \equiv 0 \qquad \{u_1, u_2, \mathfrak{v}\}.$$

Somit existieren für solche Flächen höchstens vierdimensionale Schmiegräume. Außer (I) kommen nur die Typen (III) und (V) vor, deren geometrischen Charakterisierung bekannt ist [58]). Insbesondere sind die Typen (II), (IV), (VI) und (VII) im R_6 wegen (115) unmöglich. Aber auch die Flächenklasse (I, S_4, R_6) existiert nicht, da für zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ die Relation

$$(116) \quad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}, \mathfrak{x}_{\gamma\delta}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2)^2 \equiv 0 \quad \{u_1, u_2, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2\}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2,$$

besteht, sobald man dem Typus (I) entsprechend $g_{1112} = g_{1122} = g_{1222} = g_{2222} = 0$ oder $g_{1111} = g_{1112} = g_{1122} = g_{1222} = 0$ voraussetzt.

Sind $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$ beliebige Vektoren in R_7, so gilt wiederum

$$(117) \qquad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2)^2 \equiv 0 \qquad \{u_1, u_2, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2\},$$

---

[57]) vgl. [8]), insbes. § 3.

[58]) vgl. [8]), § 4 und 5, [14]) (b) insbes. S. 555—556; auch die Charakterisierung der totalisotropen Flächen mit allgemeiner harmonischer Grundform ist Herrn J. Lense nach einer Mitteilung an den Verf. inzwischen gelungen: es handelt sich um Flächen, deren kanonische Parameterkurven ein konjugiertes Netz bilden.

sobald die biquadratischen Fundamentalgrößen den kanonischen Typen (I), (III), (V) entsprechend gewählt werden. Man erhält daher stets höchstens vierdimensionale Schmiegräume, so daß die Flächenklassen (I, S_5, R_7), (III, S_5, R_7), (V, S_5, R_7) nicht existieren können.

Sind schließlich $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ beliebige Vektoren des R_8, so besteht

$$(118)\quad (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{11}, \mathfrak{x}_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3)^2 \equiv 0 \quad \{u_1, u_2, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3\},$$

sobald für die totalisotrope Fläche $\mathfrak{x}$ der Typus (I) vorausgesetzt wird, so daß also auch die Flächenklasse (I, S_5, R_8) nicht existiert[59]).

§ 12. *Mehrfach totalisotrope Flächen.*

Zum Abschluß dieser Untersuchung behandeln wir noch kurz die in den komplexen euklidischen Räumen R_4 bis R_9 liegenden mehrfach totalisotropen Flächen. Die einzigen totalisotropen Flächen des R_4 sind bekanntlich die totalisotropen Ebenen

$$(119)\quad \mathfrak{x}=\mathfrak{x}(u_1, u_2),\ \mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{x}_\beta\equiv 0,\ (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}, \mathfrak{v})^2\equiv 0\ \{u_1, u_2, \mathfrak{v}\},\ \alpha, \beta = 1, 2.$$

Im Sinne unserer Terminologie gehören sie bereits zu den unbeschränkt totalisotropen Flächen (Fall (c_∞)).

Ein Beispiel für eine beschränkt, nämlich zweifach, totalisotrope nichtlineare Fläche in R_7 (Fall (c_2)) bietet die Tangentenfläche

$$(120)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{z}(u_1) + u_2\mathfrak{z}_1(u_1), \\ \mathfrak{x}_1^2 \equiv \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 \equiv \mathfrak{x}_2^2 \equiv \mathfrak{x}_{11}^2 \equiv \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{12} \equiv \mathfrak{x}_{12}^2 \equiv \mathfrak{x}_{11}\mathfrak{x}_{22} \equiv \mathfrak{x}_{12}\mathfrak{x}_{22} \equiv \mathfrak{x}_{22}^2 \equiv 0, \\ \mathfrak{x}_{111}^2 \equiv g_{111111}^2 \quad \not\equiv 0\{u_1, u_2\} \end{cases}$$

der dreifach isotropen Kurve (4) aus § 3, auf welcher sowohl die quadratischen als auch die biquadratischen Fundamentalkomponenten identisch verschwinden. Ebenso bietet die Tangentenfläche

$$(121)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{z}(u_1) + u_2\mathfrak{z}_1(u_1), \\ \mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{x}_\beta \equiv \mathfrak{x}_{\alpha\beta}\mathfrak{x}_{\gamma\delta} \equiv \mathfrak{x}_{\alpha\beta\gamma}\mathfrak{x}_{\delta\varepsilon\zeta} \equiv 0 \quad \{u_1\, u_2\},\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta = 1, 2, \\ \mathfrak{x}_{1111}^2 \equiv g_{11111111} \not\equiv 0 \end{cases}$$

der vierfach isotropen Kurve (108) aus § 10 ein Beispiel für eine dreifach totalisotrope nichtlineare Fläche in R_9 (Fall (c_3)).

---

[59]) Ein Beispiel für (I, S_4, R_8) findet man in [14]) (b), Fußnote 6, S. 551.

Für die Geometrie der Flächen (120), (121) hätte man die tri-bzw. quadri-quadratischen Fundamentaltensoren

$$(122) \qquad g_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \mathfrak{x}_{\delta\varepsilon\zeta}, \quad g_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \mathfrak{x}_{\varepsilon\zeta\eta\vartheta}$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta = 1, 2$$

heranzuziehen und ihre Klassifikation nach den Fallunterscheidungen durchzuführen, die das Verhalten der Komitantensysteme binärer Formen sechsten bzw. achten Grades in algebraischer und differentieller Hinsicht bietet.

Indessen stößt man auf höher mehrfach totalisotrope, ja sogar unbeschränkt totalisotrope *nichtlineare* Flächen bereits in Räumen *beschränkter endlicher Dimensionszahl n*, wenn man Flächen untersucht, die selbst wiederum in k-fach isotropen oder in totalisotropen Untermannigfaltigkeiten [60]) des betreffenden R_n liegen. So sind z.B. alle nichtlinearen Flächen, die in einem totalisotropen dreidimensionalen linearen Raum des komplexen euklidischen R_6 liegen, Beispiele für nichtlineare unbeschränkte totalisotrope Flächen. Eine invariantentheoretische Behandlung und Klassifikation aller dieser Gebilde ist natürlich nur bei beschränkt totalisotropem Verhalten möglich [61]).

Oberrahmede (Sauerland) im Juni 1937.

(Eingegangen den 12. Juli 1937.)

---

[60]) vgl. J. Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante [Jahresber. D.M.V. **35** (1926), S. 280—294], insbes. S. 285.

[61]) Schon mit den isotropen Geraden ist ja in dieser Hinsicht nichts anzufangen, vgl. E. Study [Trans. A. M. S. **10** (1909), 1—49], insbes. § 2 S. 15.