PAUL ALEXANDROFF

Zur Homologie. Theorie der Kompakten

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 256-270
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__256_0>

Zur Homologie-Theorie der Kompakten

von

Paul Alexandroff

Moskau

Der Inhalt der Polyedertopologie läßt sich im Prinzip zurückführen auf die Betrachtung eines endlichen diskreten Raumes[1]) — eines Komplexes, d.h. einer Simplizial- (oder Zellen-) zerlegung des gegebenen Polyeders — und einer stetigen (sogar offenen[2]) Abbildung des Polyeders (also eines unendlichen, ,,stetigen'') Raumes — auf diesen Komplex. Die auf Brouwer und Alexander zurückgehenden topologischen Invarianzsätze behaupten sodann im wesentlichen die Möglichkeit, die topologischen Eigenschaften des Polyeders (wie Dimension, Bettische Gruppen u. dgl.) durch Eigenschaften des Komplexes auszudrücken, und geben damit andererseits gewissen Eigenschaften des Komplexes einen ,,invarianten'' Inhalt: die Invarianz besteht darin, daß die betreffenden Eigenschaften des Komplexes dieselben bleiben, wenn man von einer Simplizialzerlegung des Polyeders zu einer anderen Simplizialzerlegung dieses oder eines mit ihm homoömorphen Polyeders übergeht.

Nachdem erkannt worden war, daß die Komplexe einen Spezialfall der endlichen diskreten Räume bilden, ist die Sonderstellung der Polyedertopologie insofern ins Schwanken geraten, als dieselben Fragestellungen und dieselbe Behandlungsweise, wie sie sich in der Polyedertopologie entwickelt haben, sich auf mengentheoretische Gebilde übertragen lassen, wodurch nicht

---

[1]) Vgl. ALEXANDROFF-HOPF, Topologie I [Berlin, Springer, 1935], S. 132. Im folgenden wird dieses Buch zitiert als ,,Alexandroff-Hopf''. Unter einem diskreten Raum wird im folgenden durchweg ein diskreter T_0-Raum verstanden, d.h. es wird vorausgesetzt, daß verschiedene Elemente des Raumes verschiedene abgeschlossene Hüllen haben. Vgl. auch die unter [13]) angegebene Literatur.

[2]) Ich nenne eine stetige Abbildung von X auf Y offen bzw. abgeschlossen, wenn das Bild einer in X offenen bzw. abgeschlossenen Menge in Y offen bzw. abgeschlossen ist.

nur eine größere Allgemeinheit und logische Durchsichtigkeit sondern auch eine *Natürlichkeit* der Voraussetzungen und ihre Unabhängigkeit von *zufälligen, nur durch die Mängel unseres Könnens bedingten Einschränkungen* erzielt wird.

Eine stetige (und sogar offene) Abbildung eines topologischen Raumes R auf einen endlichen diskreten Raum D, die der obigen Abbildung eines Polyeders auf einen Komplex durchaus analog ist, entsteht, sobald eine endliche multiplikative Überdeckung $\mathfrak{U}$ des Raumes R durch seine abgeschlossenen Mengen vorliegt. *Multiplikativ* bedeutet dabei, daß der Durchschnitt beliebig gewählter Elemente von $\mathfrak{U}$, soweit nicht leer, wiederum ein Element von $\mathfrak{U}$ ist.

Umgekehrt entspricht jeder stetigen Abbildung von R auf einen endlichen diskreten Raum D eine gewisse endliche Überdeckung von R, die aus abgeschlossenen Mengen besteht.

Es entstehen also auch innerhalb der mengentheoretischen Topologie die Fragen: *Wann lassen sich die topologischen Eigenschaften von R auf die Eigenschaften des diskreten Raumes D zurückführen? Welche Eigenschaften von D haben für R eine invariante Bedeutung?*

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Untersuchung dieser Fragestellung. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, daß R ein Kompaktum (d.h. ein kompakter metrischer Raum) F ist und untersuchen den Zusammenhang zwischen den Bettischen Gruppen von F und D. Diese Untersuchung, die als eine mengentheoretische Verallgemeinerung des Beweises der Invarianz der Bettischen Gruppen eines Komplexes bei Unterteilungen dieses Komplexes anzusprechen ist, führt zwangsmäßig zu einer Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel ebenfalls in der Richtung der Befreiung von polyedralen Voraussetzungen.

Diesem Gegenstand ist vor allem der § 2 der vorliegenden Arbeit gewidmet. Unerwarteterweise hat sich dabei gezeigt, daß in die gewählte Beweisführung eine Voraussetzung — nämlich die der Kompaktheit des zugrundegelegten Koeffizientenbereiches — ganz wesentlich hineinspielt. Dieser Umstand scheint nicht an der Beweismethode als solcher, sondern im Wesen der Dinge zu liegen; und zwar hängt er mit dem allgemeinen Berandungsbegriff der kombinatorischen Topologie kompakter Räume zusammen. Deshalb erweist sich eine diesem Begriff gewidmete Vorstudie am Platze: ihr ist der § 1 der Arbeit gewidmet. Dadurch daß die echten Projektionszyklen (wie ich sie in meiner Arbeit über „Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen" 1928 definiert habe [3])) und ihre natürliche Verallgemeinerung — die *echten Zyklen* (bzw. die *echten* Bettischen Gruppen) an die Spitze gestellt werden, wird übrigens der Zyklen- und Homologiebegriff in Kompakten näher an seinen historischen Ursprung — die Brouwersche Zyklosenarbeit aus dem Jahre 1913 — gebracht, als es bis jetzt üblich war. Die neuen Untersuchungen von Kolmogoroff [4]) bestätigen diesen Standpunkt vollauf.

Der § 3 ist den lokal-zusammenhängenden Kompakten gewidmet; hier gelten die Resultate des § 2 auch unabhängig von der Voraussetzung über die Kompaktheit des Koeffizientenbereiches bzw. von den Begriff der echten Bettischen Gruppe. Das beruht darauf, daß sich die Homologie-Theorie dieser Räume von vorneherein auf echte Zyklen und Homologien (nämlich auf die hierselbst eingeführten Modifikationszyklen und den entsprechen Berandungsbegriff) begründen läßt.

§ 1.

1. Falls in einem Komplex K ein r-dimensionaler Zyklus z zwei verschiedene algebraische Komplexe c_1 und c_2 berandet, so ist $c_1 - c_2$ offenbar ein $(r+1)$-dimensionaler Zyklus in K. Von dieser und ähnlichen Konstruktionen macht man in der Polyedertopologie häufig Gebrauch. Will man aber dieses ebenso natürliche wie nützliche Verfahren im mengentheoretischen Fall anwenden, so begegnet man folgender Schwierigkeit. Ist

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots) \tag{1}$$

ein berandender konvergenter Zyklus [5]) im Kompaktum F und sind die durch z_k berandeten ε_k-Komplexe, c'_k und c''_k, $\lim \varepsilon_k = 0$, gegeben, so braucht

$$(c'_1 - c''_1,\ c'_2 - c''_2,\ \ldots,\ c'_k - c''_k,\ \ldots)$$

noch kein konvergenter Zyklus zu sein. Dieser Mangel liegt daran,

---

[3]) Annals of math. (2) **30** (1929), 101—187, insbesondere 161—162 (zu berücksichtigen ist auch die Bemerkung II auf S. 162).

[4]) C.R. **202** (1936); 1144—1147, 1325—1327, 1558—1560, 1641—1643. Diese vier Noten werden im folgenden als Nr. 1, Nr. 2, Nr. 3, Nr. 4 bezeichnet.

[5]) Ein wahrer Zyklus des Koeffizientenbereiches J (im Kompaktum F) ist eine Folge (1), in der z_k ein d_k-Zyklus und $\lim d_k = 0$ ist. Der wahre Zyklus (1) heißt *konvergent* nach dem Koeffizientenbereich $J' \supset J$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, sodaß für $n \geqq n_\varepsilon$ die Homologie $z_n \underset{\varepsilon}{\sim} z_{n_\varepsilon}$ gilt. Im folgenden wird einfachheitshalber stets $J = J'$ vorausgesetzt. Vgl. Alexandroff, Dimensionstheorie [Math. Ann. **106** (1932), 161—238)] (im folgenden zitiert als „Dimensionstheorie"), § 2.

daß die Berandungsdefinition selbst für den Fall konvergenter Zyklen (1) keine Konvergenzvoraussetzung für die durch die z_k berandeten Komplexe c_k enthält. Wollte man ihn durch den Begriff einer *konvergenten Homologie*, d.h. durch die Forderung,

$$(2) \qquad C = (c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots)$$

sei ein konvergenter Relativzyklus [6]) bis auf den Träger [6]) von Z, zu beseitigen suchen, so wäre man in eine noch schwierigere Situation versetzt, denn die in diesem Sinne „konvergent-berandenden" Zyklen brauchen unter Umständen keine Gruppe, und somit keine Untergruppe der Gruppe aller konvergenten Zyklen zu bilden, führen also zu keiner Bettischen Gruppe [6a]).

Im Falle eines endlichen Koeffizientenbereiches (also insbesondere für die Topologie modulo m) treten die erwähnten Schwierigkeiten nicht auf, denn in diesem Falle enthält jeder (Relativ-)Zyklus einen konvergenten (Relativ-)Zyklus als Teilfolge, die Konvergenzbedingung sowohl für Zyklen als auch für Homologieen läßt sich also durch einen Übergang zu Teilfolgen erfüllen. Den Beweis dieses *Konvergenzsatzes* geben wir etwas später [7]), jetzt kehren wir aber zum allgemeinen Fall zurück.

2. In allgemeineren Voraussetzungen als die eines endlichen Koeffizentenbereiches wollen wir uns durch die folgende Definition helfen:

Definition. *Ein echter Komplex des Kompaktums F ist der Inbegriff einer Folge*

$$(2) \qquad C = (c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots)$$

von algebraischen σ_k-Komplexen c_k von F und einer Folge von simplizialen Abbildungen f_k von c_{k+1} auf c_k, wobei für $n > k$ die Abbildung $f_k^n = f_k(\ldots f_{n-1})$ eine ε_k-Verschiebung und $\lim \sigma_k = \lim \varepsilon_k = 0$ *ist.*

Falls alle Ränder $\dot{c}_k$ Null sind, ist der echte Komplex (2) *ein echter Zyklus.*

Zu dieser Zyklen-Definition gehört ein Homologie-Begriff: ein echter Zyklus heißt *echt-homolog Null* (oder *er berandet echt*), wenn er Rand eines echten Komplexes ist. Die Restklassengruppe der Gruppe der echten r-dimensionalen Zyklen nach der Untergruppe der echt-berandenden ist die r-dimensionale *echte Bettische Gruppe.*

---

[6]) Vgl. „Dimensionstheorie", a.a.O. [5]).

[6a]) Die obige Behauptung beruht darauf, daß der Träger der Summe zweier Zyklen nicht notwendig den Träger eines der beiden Summanden enthält.

[7]) Vgl. „Dimensionstheorie", 180 (1. Konvergenzsatz).

Wir werden beweisen:

Für den Fall eines kompakten Koeffizientenbereiches sind die echten Bettischen Gruppen den gewöhnlichen Bettischen Gruppen isomorph.

3. Es sei ein Projektionsspektrum [8])

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad N_k = \pi_k(N_{k+1}) \tag{3}$$

des Kompaktums F gegeben. Unter einem *projektiven Komplex* verstehen wir eine Folge (2), mit

$$c_k = \pi_k c_{k+1}.$$

Sind alle $\dot{c}_k = 0$, so liegt ein *projektiver Zyklus* [8a]) *vor.* Offenbar bilden die projektiven Komplexe bzw. Zyklen einen Spezialfall der echten. Ein projektiver Zyklus heißt schließlich *projektiv-homolog Null,* wenn er einen projektiven Komplex berandet. Die Restklassengruppe der Gruppe der r-dimensionalen projektiven Zyklen nach der Untergruppe der projektiv-berandenden ist die r-dimensionale *projektive Bettische* Gruppe. *Diese ist im Falle eines kompakten Koeffizienten-bereiches ebenfalls mit der entsprechenden gewöhnlichen Bettischen Gruppe isomorph.*

Diese Isomorphieen folgen aus den folgenden Sätzen:

I. *Im Falle eines kompakten Koeffizientenbereiches ist jeder konvergente Zyklus des gegebenen Kompaktums einem projektiven Zyklus (eines beliebig aber fest gewählten Projektionsspektrums) homolog.*

II. *Unter denselben Voraussetzungen berandet jeder berandende projektive Zyklus einen projektiven Komplex und jeder berandende echte Zyklus einen echten Komplex* [9]).

Beweis von I. Es sei

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots) \tag{1}$$

ein konvergenter Zyklus des Kompaktums F. Durch eine unendlich-kleine Verschiebung [10]) geht Z in einen Projektionszyklus schlechtweg [11]) über. Wir können also voraussetzen, daß Z von vornherein ein Projektionszyklus ist, d.h. daß z_k ein algebraischer

---

[8]) Vgl. „Gestalt und Lage", 107—108.

[8a]) Nicht zu verwechseln mit den „Projektionszyklen" aus „Gestalt und Lage", 161. Die jetzigen projektiven Zyklen wurden im Falle mod 2 unter dem Namen *echter* Projektionszyklen in „Gestalt und Lage", 162 eingeführt.

[9]) Vgl. Kolmogoroff [a.a.O. [4]), Nr. 3].

[10]) Vgl. Dimensionstheorie", 180 (Nr. 24).

[11]) „Gestalt und Lage", 161.

Teilkomplex von N_k und $z_i \sim \pi_i^k z_k$ in N_i für $k > i$ ist. Sodann lassen sich der Reihe nach die Teilfolgen

$$(1_i) \qquad z_1^{(i)},\ z_2^{(i)},\ \ldots,\ z_k^{(i)},\ \ldots$$

der Folge (1) konstruieren und zwar so, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) die Folge (1_{i+1}) ist eine Teilfolge von (1_i),

(b) alle Elemente $z_k^{(i)}$ von (1_i) haben Ränge $r_{i,k}$ [12]), die größer als i sind,

(c) die algebraischen Komplexe [12′]) $\pi_i z_k^{(i)}$ bilden eine gegen den algebraischen Teilkomplex z_i' von N_i konvergierende Folge (man kann außerdem voraussetzen, daß die absoluten Komplexe $|\pi_i z_k^{(i)}|$ für $k = 1, 2, \ldots$ untereinander identisch sind).

Wie leicht ersichtlich, ist

$$(1') \qquad Z' = (z_1', z_2', \ldots z_k', \ldots)$$

ein projektiver Zyklus. Wir zeigen, daß $Z \sim Z'$ ist.

Da $z_i \sim \pi_i z_h^{(i)}$ in N_i ist, existiert in N_i für jedes h ein algebraischer Komplex $C_{i,h}$ mit

$$\dot{C}_{i,h} = z_i - \pi_i z_h^{(i)}.$$

Wenn man den Index h eine passend gewählte Folge natürlicher Zahlen durchlaufen läßt, konvergiert $C_{i,h}$ gegen einen Limes C_i und es gilt

$$C_i = z_i - z_i' \text{ in } N_i,$$

w.z.b.w.

Mit Hilfe derselben Konstruktion beweist man (sogar etwas einfacher als soeben), die erste Behauptung von II.

Die zweite Behauptung von II kann man dadurch beweisen, daß man zeigt: *Jeder echte Zyklus kann als projektiver Zyklus eines passend gewählten Projektionsspektrums aufgefaßt werden*; hierdurch wird der Beweis der zweiten Behauptung auf die erste zurückgeführt. Was das soeben erwähnte Projektionsspektrum betrifft, so konstruiert man es am einfachsten dadurch, daß man die zu ihm gehörende Folge sukzessiver Unterteilungen des gegebenen Kompaktums F aufbaut, was leicht zu machen ist.

4. Man kann auch etwas anders vorgehen und den expliziten Gebrauch der Projektionsspektra an dieser Stelle vermeiden.

---

[12]) Der Komplex $z_k^{(i)}$ ist ein gewisses z_h; h heißt der Rang von $z_k^{(i)}$.

[12′]) Aus typographischen Gründen schreiben wir in dieser Nummer π_i anstatt $\pi_i^{r_{i,k}}$.

Zuerst bemerkt man, daß wenn von zwei echten Zyklen der eine mittels einer unendlich-kleinen Verschiebung aus dem anderen hervorgeht, beide Zyklen miteinander echt homolog sind. Hieraus folgt insbesondere, daß *ein echter Zyklus jeder seiner unendlichen Teilfolgen echt homolog ist* — eine Tatsache, die an und für sich erwähnt werden soll, denn ohne sie könnten die echten Zyklen kaum von Nutzen sein.

5. Es sei A irgendein $\frac{\varepsilon}{3}$-Netz [12a]) in F. Jede Teilmenge der Menge A, die einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat, erkläre man als Eckpunktgerüst eines Simplexes. Auf diese Weise wird A zu einem endlichen Eckpunktbereich [12b]). Ist ein $\frac{\varepsilon}{3}$-Komplex c in F gegeben, so läßt er sich *in A projizieren,* d.h. auf einen algebraischen Teilkomplex von A dadurch simplizial $\frac{\varepsilon}{3}$-abbilden, daß man jedem Eckpunkt von c etwa einen unter den von ihm am wenigsten entfernten Punkten von A entsprechen läßt.

6. Es sei nun

$$Z = (z_i, z_2, \ldots, z_k, \ldots) \tag{1}$$

ein echter berandender Zyklus in F; nach einem evtl. Übergang zu einer Teilfolge darf man von den ε_k-Komplexen c_k, $\dot{c}_k = z_k$, annehmen, daß $h = \sum\limits_{k+1}^{\infty} \varepsilon_h < \frac{\varepsilon_k}{3}$ ist. Sodann läßt sich die Menge aller Eckpunkte von c_k zu einem $\frac{\varepsilon_k}{3}$-Netz A_k ergänzen. Es läßt sich c_h für $h > k$ in A_k projizieren; diese Projektion, *die in den zu z_h gehörenden Eckpunkten von c_h durch die gegebene Abbildung von z_h auf z_k vorgeschrieben sei,* führt c_h in einen algebraischen Teilkomplex $c_{k,h}$ von A_k über, wobei $\dot{c}_{k,h} = z_k$ ist.

Jetzt verfährt man wie in Nr. 3. Man betrachtet die Folgen natürlicher Zahlen

$$h_1^i, h_2^i, \ldots, h_k^i, \ldots,$$

von denen die $(i+1)^{\text{te}}$ eine Teilfolge der i-ten ist, und die so beschaffen sind, daß $\lim c_{i,h_k^i} = c_i'$ existiert. Wie leicht ersichtlich ist

$$(c_1', c_2', \ldots, c_i', \ldots)$$

ein echter Komplex. Da $\dot{c}_i' = z_i$ ist, sind wir fertig.

7. Ist der Koeffizientenbereich endlich, so ist die Anzahl

12a) Alexandroff-Hopf, 87.

12b) Alexandroff-Hopf, 155.

der algebraischen Komplexe im Eckpunktbereich A (Nr. 5) ebenfalls endlich, und jeder $\frac{\varepsilon}{3}$-Komplex ist einem unter diesen Komplexen ε-homolog. Hieraus folgt: Im Falle eines endlichen Koeffizientenbereiches gibt es in einem Kompaktum F bei jedem gegebenen ε nur endlichviele voneinander im Sinne der ε-Homologie verschiedene $\frac{\varepsilon}{3}$-Zyklen. Man schließt hieraus mühelos: In jedem Zyklus ist ein konvergenter Zyklus als Teilfolge enthalten. Derselbe Schluß gilt auch für Relativzyklen, folglich auch für Homologieen.

§ 2.

1. Es sei F ein Kompaktum, D ein endlicher n-dimensionaler diskreter Raum [13]), f eine stetige Abbildung von F auf D. Die Elemente von D seien x_i^r (wobei r die Dimension bedeutet). Ihre abgeschlossenen Hüllen werden wie üblich mit $\bar{x}_i^r$ bezeichnet. Die Urbilder $f^{-1}(\bar{x}_i^r) = \overline{X}_i^r$ bilden eine Überdeckung von F. Die Vereinigungsmenge derjenigen $\overline{X}_h^u$, die den Randelementen x_h^u von x_i^r entsprechen, soll als der Rand $\dot{\overline{X}}_i^r$ von $\overline{X}_i^r$ bezeichnet werden.

Wir nehmen jetzt an, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Es sei J ein fester Koeffizientenbereich. Es existiert in jedem $\overline{X}_i^r$ ein ganzzahliger echter Relativzyklus X_i^r* mod $\dot{\overline{X}}_i^r$ *von der Eigenschaft, daß tX_i^r bei $0 \neq t \subset J$ in $\overline{X}_i^r$ nicht berandet, während jeder echte Relativzyklus Z^r von J in $\overline{X}_i^r$* mod $\dot{\overline{X}}_i^r$ *einer echten Homologie $Z^r \backsim tX_i^r$* mod $\dot{\overline{X}}_i^r$ *genügt und für $u \neq r$ jeder u-dimensionale Relativzyklus in $\overline{X}_i^r$* mod $\dot{\overline{X}}_i^r$ *berandet.*

2. *Der Rand von X_i^r ist eine (ganzzahlige) Linearkombination der X_h^{r-1}*

$$\dot{X}_i^r = \sum c^h X_h^{r-1}$$

Unter diesen Umständen ist D ein orientierter Zellenraum im Sinne von Tucker-Kolmogoroff [14]). Der Zweck dieses Paragraphen ist zu beweisen, daß *die echten Bettischen Gruppen von F, also*

---

[13]) Wir verstehen hier die Dimension so: jedem Element x von D sei eine nicht negative Zahl $d(x)$ derart zugeordnet, daß aus $x' \subset \bar{x}$, $x' \neq x$, folgt: $d(x') < d(x)$. Vgl. TUCKER, Cell Spaces, [Ann. of math. (2) **37** (1936), 92—100], sowie ALEXANDROFF, Sur les espaces discrets [C. R. **200** (1935), 1649—1651] (wo die Dimensionierung spezieller ist). Tucker besaß seinen Dimensionierungsbegriff bereits 1933 (vgl. seine Dissertation „An abstract approach to manifolds" [Annals of math. (2) **34** (1933), 191—243]). Die Höchstdimension eines Elementes des endlichen diskreten Raumes D heißt die Dimension von D.

[14]) TUCKER [a.a.O. [13])] und KOLMOGOROFF [Recueil math. Moscou **1** (43) (1936), 97—102].

im Falle eines kompakten Koeffizientenbereiches J auch die gewöhnlichen Bettischen Gruppen von E, den Bettischen Gruppen von D isomorph sind.

2. Es handelt sich mit anderen Worten um den Beweis des folgenden Satzes:

Jeder echte Zyklus Z^r, $r \leqq n$, in F ist einem Zyklus von der Gestalt $\sum t^i X_i^r$ homolog; ist ein Zyklus dieser Gestalt homolog Null in F, so berandet er einen echten Komplex von der Gestalt $\sum u^h X_h^{r+1}$.

Beweis der 1. *Behauptung.* Wir beweisen zuerst folgenden

Hilfssatz I. Nur dann ist ein Zyklus Z^r von der Form $Z^r = \sum t^i X_i^r$ in $F^r = \sum \overline{X}_i^r$ homolog Null, wenn alle $t^i = 0$ sind.

Denn ist $\dot{C}^{r+1} = \sum t^i X_i^r$, $C^{r+1} \subset F^r$, und (in einem naheliegenden Sinne) $C_i^{r+1} = C^{r+1} \cdot \overline{X}_i^r$, so ist $\dot{C}_i^{r+1} = t^i X_i^r \pmod{\dot{\overline{X}}_i^r}$, woraus nach der Definition von X_i^r folgt: $t^i = 0$.

Es sei jetzt Z^r irgendein echter Zyklus in F und $u > r$. Es ist $Z^r = Z_i^r + Z_*^r$, wobei $Z_i^r = Z^r \cdot \overline{X}_i^u$ ist. Dann existiert in $\overline{X}_i^u$ ein C_i^{r+1} mit

$$\dot{C}_i^{r+1} = Z_i^r - q^r, \quad q^r \subset \dot{\overline{X}}^u.$$

Die echten Komplexe Z_i^r, $-Z_*^r$, q^r haben alle denselben Rand, so daß insbesondere $Z_*^r + q^r$ ein Zyklus ist, und mit diesem Zyklus ist wegen

$$(Z_i^r + Z_*^r) - (Z_*^r + q^r) = Z_i^r - q^r \sim 0$$

der Zyklus Z^r homolog.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens beweist man, daß Z^r einem Zyklus $Z_0^r \subset F^r$ homolog ist. Man kann also von vornherein voraussetzen, daß $Z^r \subset F^r$ ist.

Unter dieser Voraussetzung ist $Z^r = \sum Z_i^r$ mit $Z_i^r = Z^r \cdot \overline{X}_i^r$ und

$$\dot{C}_i^{r+1} = Z_i^r - t^i X_i^r - q_i^r, \quad q_i^r \subset \dot{\overline{X}}_i^r, \quad C_i^{r+1} \subset \overline{X}_i^r,$$

folglich

$$Z^r \sim \sum t^i X_i^r + Q^r, \quad Q^r = \sum q_i^r \subset F^{r-1}.$$

Nun ist

$$\dot{Q}^r = -\left(\sum t^i X_i^r\right)^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum u^h X_h^{r-1} \sim 0 \text{ in } F^{r-1},$$

nach dem Hilfssatz I ist also $u^h = 0$ (für alle h) und somit $\sum t^i X_i^r$ (ebenso wie Q^r) ein Zyklus. Bleibt übrig zu zeigen, daß $Q^r \sim 0$ in F ist. Das macht man sehr einfach wie folgt. Es ist $Q^r = \sum Q_h^r$, $Q_h^r = Q^r \cdot \overline{X}_h^{r-1}$, $Q_h^r \sim 0$ in $\overline{X}_h^{r-1}$ mod $\dot{\overline{X}}^{r-1}$, woraus folgt, daß

$Q^r \sim q^r_{r-2}$, $q^r_{r-2} \subset F^{r-2}$ ist. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens beweist man schließlich, daß $Q^r \sim q^r_0$, $q^r_0 \subset F^0$, also $Q^r \sim 0$ ist.

3. *Beweis der 2. Behauptung.*

Es sei

$$\dot{C}^{r+1} = Z^r = \sum t^i X^r \text{ in } F.$$

Da C^{r+1} ein echter Relativzyklus mod F^r ist, ist $C^{r+1} \cdot \overline{X}^u_i$ für $u \geqq r+1$ ein echter Relativzyklus mod $\dot{\overline{X}}^u_i$, also für $u > r+1$ homolog Null in $\overline{X}^u_i$ mod $\dot{\overline{X}}^u_i$. Dies erlaubt nach endlich vielen Schritten, C^{r+1} durch einen $C^{r+1}_1 \subset F^{r+1} \cdot \dot{C}^{r+1}_1 = Z^r$, zu ersetzen.

Es sei also von vornherein $C^{r+1} \subset F^{r+1}$.

Es ist $C^{r+1} = \sum C^{r+1}_h$, $C^{r+1}_h = C^{r+1}$, $\overline{X}^{r+1}_h$, $Z^r = \sum \dot{C}^{r+1}_h$. Es existiert in $\overline{X}^{r+1}_h$ ein C^{r+2}_h mit

$$\dot{C}^{r+2}_h = C^{r+1}_h - u^h X^{r+1}_h - q^{r+1}_h, \quad q^{r+1}_h \subset \dot{\overline{X}}^{r+1}_h,$$

also

$$\dot{C}^{r+1}_h = u^h \dot{X}^{r+1}_h + \dot{q}^{r+1}_h$$

$$Z^r = \sum \dot{C}^{r+1}_h = \sum u^h \dot{X}^{r+1}_h + \sum \dot{q}^{r+1}_h \tag{7}$$

und

$$\sum \dot{q}^{r+1}_h = Z^r - \sum u^h \dot{X}^{r+1}_h = \sum v^i X^r_i \sim 0 \text{ in } F^r,$$

woraus folgt, daß alle v^i verschwinden, so daß nach (7)

$$Z^r = \sum \dot{C}^{r+1}_h = \left(\sum u^h X^{r+1}_h\right)^{\cdot},$$

ist, w.z.b.w.

4. Es sei F ein Kompaktum, D eine endliche abgeschlossene Überdeckung von F, d.h. ein endliches System von abgeschlossenen Teilmengen $F_1, F_2, \ldots, F_i$ mit $\sum F_i = F$. Wir nehmen an, daß die Überdeckung D *dimensioniert* ist, d.h. daß jedem ihrer Elemente F_i eine nichtnegative ganze Zahl $d(F_i)$ — die Dimensionszahl von F_i — so zugeordnet ist, daß aus $F_i \subset F_h$ stets $d(F_i) < d(F_h)$ folgt.

Ein wichtiges wenn auch spezielles Beispiel dimensionierter Überdeckungen ist das folgende. Es sei $D = (F_1, F_2, \ldots, F_s)$ eine abgeschlossene multiplikative Überdeckung von F. Wir nennen eine mit einem festen F_{i_1} beginnende Folge von paarweise verschiedenen abnehmenden Elementen von D, etwa

$$F_{i_1} \supset F_{i_2} \supset \ldots \supset F_{i_k}, \tag{8}$$

eine *Kompositionsreihe* von F_{i_1}, wenn (8) nicht eine echte Teilfolge einer (mit F_{i_1} beginnenden) Folge von derselben Gestalt ist. Wie nehmen jetzt an, daß alle Kompositionsreihen eines Elementes F_i von U dieselbe Gliederzahl $d_i + 1$ haben, und bezeichnen d_i als die *Dimensionszahl* von F_i in D.

Jetzt bezeichnen wir die in diesem Sinne r-dimensionalen unter den Elementen von D durch $\overline{X}_1^r, \overline{X}_2^r, \ldots, \overline{X}_{a_r}^r$ und setzen voraus, daß in bezug auf diese $\overline{X}_i^r$ die Bedingungen 1. und 2. von Nr. 1 erfüllt sind. *Unter diesen Umständen hängen die Bettischen Gruppen von F* (nach einem kompakten Koeffizientenbereich) *nur von der kombinatorischen Struktur der Überdeckung D ab*, denn diese Überdeckung bildet in naheliegender Weise einen diskreten Raum, der den in Nr. 1 aufgestellten Bedingungen genügt, und F ist auf D dadurch stetig abgebildet, daß man jedem Punkt p von F dasjenige Element $\overline{X}_i^r$ von D zuordnet, welches unter allen, den Punkt p enthaltenden Elementen von D die kleinste Dimensionszahl hat. *Insbesondere ist die Eulersche Charakteristik von D* — d.h. die Zahl $\Sigma(-1)^r \alpha_r$, wobei α_r die Anzahl der r-dimensionalen Elemente von D bedeutet — *eine topologische* Invariante von F, denn sie läßt sich in der üblichen Weise (im Falle, wenn der Koeffizientenbereich etwa eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung ist) durch die Bettischen Zahlen von F ausdrücken

$$\Sigma(-1)^r \alpha_r = \Sigma(-1)^r p_r, \tag{9}$$

wobei p_r die r-te Bettische Zahl von F nach einem Primzahlmodul m ist. Die Formel (9) ist eine von allen polyedralen Voraussetzungen befreite Form des Euler-Poincaréschen Satzes.

Ein Beispiel. F sei ein krummes Polyeder, und zwar die Vereinigungsmenge der folgenden drei Kugelflächen: den beiden konzentrischen Sphären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2+y^2+z^2=(\frac{1}{2})^2$, die wir bzw. mit S und s bezeichnen und einer dritten Kugelfläche, s', die S und s berührt und zwischen ihnen beiden liegt; s' sei etwa die Sphäre $(x-\frac{3}{4})^2 + y^2 + z^2 = (\frac{1}{4})^2$. Wir betrachten eine dimensionierte Überdeckung D von F, bestehend aus den beiden Kugelflächen S und s, sowie den 4 Viertelkugelflächen, 4 Halbgroßkreisen und 2 Punkten, definiert durch

$$(x-\tfrac{3}{4})^2 + y^2 + z^2 = (\tfrac{1}{4})^2,\ y \gtreqqless 0,\ z \gtreqqless 0.$$

Es ist also $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 6$, was wegen $p^0 = 1$, $p^1 = 0$, $p^2 = 3$ ergibt: $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = p^0 - p^1 + p^2 = 4$.

Dieses Beispiel zeigt, daß die obigen Überlegungen selbst für Polyeder zu neuen Fällen der Euler-Poincaréschen Formel führen [14a]).

Beispiele mengentheoretischer Verallgemeinerungen der Euler-Poincaréschen Formel liegen auf der Hand.

[14a]) Vgl. wegen der Verallgemeinerungen der Euler-Poincaréschen Formel im polyedralen Falle: Alexandroff-Hopf, Kap. VI, § 1.

§ 3.

1. Wir betrachten in diesem Paragraphen den Fall eines lokal-zusammenhängenden Kompaktums F, wobei wir den lokalen Zusammenhang im folgenden Sinne verstehen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es sein $\sigma > 0$ derart, daß jeder (nicht notwendig konvergente) ganzzahlige Zyklus von einem Durchmesser $< \sigma$ in einer abgeschlossenen Punktmenge von einem Durchmesser $< \varepsilon$ des gegebenen Kompaktums F (ganzzahlig) berandet [15]). Wie leicht ersichtlich, ist diese Definition der folgenden äquivalent:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\sigma(\varepsilon) > 0$ derart, daß zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $\sigma(\varepsilon', \varepsilon) > 0$ solcherweise existiert, daß jeder $\sigma(\varepsilon', \varepsilon)$-Zyklus von einem Durchmesser $< \sigma(\varepsilon)$ einen ε'-Komplex von einem Durchmesser $< \varepsilon$ berandet.

Wir beweisen zunächst folgenden

Satz I. *Für jedes lokal-zusammenhängende Kompaktum F und zu jedem $n \geqq 0$ läßt sich eine Zahl α mit folgender Eigenschaft bestimmen: jeder höchstens n-dimensionale wahre Zyklus (eines beliebigen Koeffizientenbereiches), welcher α-berandet in F, berandet dortselbst auch schlechthin.*

Beweis. Wir setzen $\sigma_0(\varepsilon) = \frac{1}{2}\sigma(\varepsilon)$ und sodann $\sigma_{r+1}(\varepsilon) = \sigma_0(\sigma_r(\varepsilon))$. Schließlich sei $\alpha = \sigma_n(1)$.

Es sei jetzt

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots) \tag{1}$$

ein α-berandender höchstens n-dimensionaler Zyklus in F. Wir wählen ein beliebiges positives ε' und beweisen, daß für alle hinreichend großen k

$$z_k \underset{\varepsilon'}{\sim} 0 \quad \text{in } F$$

ist.

Nachdem ε' fixiert ist, setzen wir $d_0 = \alpha$, $d'_0 = \sigma_0(\varepsilon')$, sodann allgemein $d_{r+1} = \sigma_0(d_r)$, $d'_{r+1} = \sigma(d'_r, d_r)$ und schließlich $d = d_n$.

Wir beweisen, daß $z_k \underset{\varepsilon'}{\sim} 0$ in F, wenn nur k so groß ist, daß z_k ein d-Zyklus ist.

Zu diesem Zweck betrachten wir einen (nach Voraussetzung des Satzes I existierenden) α-Komplex $c_k = \sum u^i y_i^{r+1}$ mit

$$\dot{c}_k = z_k = \sum t^i x_i^r.$$

---

[15]) Vgl. „Gestalt und Lage", 181, Fußnote [63]). Im Falle modulo 2 (sowie im Falle eines beliebigen endlichen Koeffizientenbereiches) ist die (dem Koeffizientenbereich entsprechend abgeänderte) hiesige Definition wegen der schon erwähnten Konvergenzsätze mit der dortigen gleichwertig.

Wir benennen jetzt die nulldimensionalen Elemente (die Eckpunkte) y_h^0 von c_k in Y_i^0 um und nehmen an, daß jedem orientierten h-dimensionalen Element y_i^h von c_k, $h \leqq s \leqq r-1$, ein ganzzahliger Komplex Y_i^h, und zwar unter der Geltung der folgenden Bedingungen zugeordnet ist:

1. Y_i^h ist ein d'_{r-h}-Komplex von einem Durchmesser $< d_{r-h}$;
2. Ist y_i^h ein Nebenelement von z_k, so ist $Y_i^h = y_i^h$;
3. Ist $\dot{y}_i^h = \sum e_i^{h,j} y_j^{h-1}$, so ist $\dot{Y}^h = \sum e_i^{h,j}\, Y_j^{h-1}$.

Sodann betrachten wir y_i^{h+1}. Ist dies ein Element von z_k, so setzen wir $Y_i^{h+1} = y_i^{h+1}$; sonst nehmen wir den ganzzahligen Zyklus $\sum e_i^{h+1,j}\, Y_j^h$ ins Auge, wobei die Koeffizienten $e_i^{h+1,j} = \pm 1$ durch $\dot{y}_i^{h+1} = \sum e_i^{h+1,j}\, y_j^h$ definiert sind. Dieser Zyklus hat einen Durchmesser $< 2d_{r-h}$ und ist ein d'_{r-h}-Zyklus. Demzufolge berandet er einen ganzzahligen d'_{r-h-1}-Komplex Y_i^{h+1} von einem Durchmesser $< d_{r-h-1}$.

Durch diesen Induktionsprozeß gelangen wir schließlich zu den d'_0-Komplexen Y_i^r von einem Durchmesser $< d_0$, und diese genügen den Bedingungen 1—3 mit $h = r$. Wir betrachten jetzt den ganzzahligen α'_0-Zyklus $\sum e_i^{r+1,j}\, Y_j^r$; er hat einen Durchmesser $< 2d_0$ und berandet infolgedessen einen ganzzahligen ε'-Komplex Y_i^{r+1}. Setzt man $C^{r+1} = \sum u^i Y_i^{r+1}$, so gilt für den ε'-Komplex C^{r+1}

$$\dot{C}^{r+1} = \sum t^i Y_i^r = \sum t^i y_i^r = \sum t^i x_i^r = z_k,$$

w.z.b.w.

2. Der Prozeß, dessen wir uns soeben bedient haben, ist nichts anderes als das Verfahren der ε-Modifikation, die ich früher eingeführt habe [16]). Er legt — zumindest in lokal-zusammenhängenden Räumen — die Betrachtung einer besonderen Art von echten Zyklen nahe, nämlich der *Modifikationszyklen.* Unter einem Modifikationszyklus verstehen wir eine Folge von σ_k-Zyklen,

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots),$$

wobei z_{k+1} eine ε_k-Modifikation von z_k mit $\sum \varepsilon_k < \infty$ und $\lim \sigma_k = 0$ ist (d.h. es ist $z_{k+1} = \sum t^i X_i^r$ eine solche Fortsetzung [17]) von $z_k = \sum t^i x_i^r$, daß die Vereinigungsmenge aller Eckpunkte von x_i^r und aller Eckpunkte von X_i^r bei jedem i einen Durchmesser $< \varepsilon_k$ hat) [17a]).

---

[16]) „Dimensionstheorie", 204.

[17]) Alexandroff-Hopf, 261.

[17a]) Die Voraussetzung der Konvergenz von $\sum \varepsilon_k$ ist einfachheitshalber gemacht: wesentlich ist nur, daß der Übergang von z_k zu einem beliebigen z_h, $h > k$, eine ε_k-Modifikation mit $\lim \varepsilon_k = 0$ ist.

In analoger Weise definiert man auch einen *Modifikationskomplex* als eine Folge von σ_k-Komplexen, $\lim \sigma_k = 0$,

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots),$$

wobei x_{k+1} eine ε_k-Modifikation von c_k ist ($\sum \varepsilon_k < \infty$)[17a]). Wenn man beginnend mit den X_i^0 und nach wachsender Dimensionszahl fortschreitend jedem Eckpunkt von X_i^r irgendeinen Eckpunkt von x_i^r entsprechen läßt, so entsteht (nach dem 3. Erhaltungssatz der Theorie der simplizialen Abbildungen) eine simpliziale ε_k-Abbildung von c_{k+1} auf c_k. *Somit bilden die Modifikationskomplexe einen Spezialfall der echten Komplexe und die Modifikationszyklen einen Spezialfall der echten Zyklen.*

Nun beweist man mit denselben Methoden wie in Nr. 1 folgende Tatsachen, die sich beide auf ein lokal-zusammenhängendes Kompaktum F beziehen:

1. Jeder konvergente Zyklus in F ist bei jedem ε einem Modifikationszyklus ε-homolog;

2. Ein in F berandender Modifikationszyklus berandet dortselbst einen Modifikationskomplex.

Aus dem Satz I und der Behauptung 1. folgt ohne weiteres:

Satz II. *Jeder konvergente Zyklus des lokal-zusammenhängenden Kompaktums F ist einem Modifikationszyklus homolog.*

Übrigens läßt sich Satz II sogar etwas verschärfen: *in F ist jeder konvergente Zyklus in einer beliebigen Umgebung eine seines Träger einem Modifikationszyklus homolog.*

Da alles soeben Bewiesene natürlich auch für Relativzyklen inkraft bleibt und die Modifikationszyklen echte Zyklen sind, *gelten die Resultate des* § 2 *dieser Arbeit für lokal-zusammenhängende Kompakten auch ohne die Voraussetzung der Kompaktheit des Koeffizientenbereiches für die gewöhnlichen Bettischen Gruppen.*

3. Die Modifikationszyklen eines (sogar lokal-zusammenhängenden) Kompaktums bilden im allgemeinen keine Gruppe[18]). Wohl aber bilden eine Gruppe diejenigen Zyklen, die endliche Linearkombinationen von Modifikationszyklen sind. Diese Zyklen nennen wir *innere Zyklen.* Die Restklassengruppe der Gruppe der r-dimensionalen inneren Zyklen eines Kompaktums F nach der Untergruppe der (schlechtweg) berandenden Zyklen dürfte die r-dimensionale *innere Bettische Gruppe* von F genannt werden. *Falls F lokal-zusammenhängend ist, sind seine inneren Bettischen Gruppen mit den gewöhnlichen Bettischen Gruppen isomorph.*

---

[18]) Auf diese Tatsache hat mich Herr Freudenthal aufmerksam gemacht.

Die (entsprechend lokalisierten) inneren Bettischen Gruppen dürften insbesondere bei der Untersuchung der Eigenschaften von Kompakten in der Nähe ihrer einzelnen Punkte Anwendung finden.

4. Zum Schluß beweisen wir noch folgenden

SATZ III. *Die Bettischen Gruppen eines lokal-zusammenhängenden Kompaktums F sind Untergruppen der entsprechenden Bettischen Gruppen eines endlichen Komplexes isomorph.*

Beweis. Es sei $\alpha > 0$ wie in Nr. 1 definiert. Mittels einer $\frac{\alpha}{3}$-Überführung sei F auf ein simplizialzerlegtes Polyeder $\overline{K}$ abgebildet. Mittels dieser Überführung geht jeder konvergente Zyklus Z von F in einen wahren Zyklus $f(Z)$ in $\overline{K}$ über, so daß eine homomorphe Abbildung der Bettischen Gruppen von F in die Bettischen Gruppen von K entsteht. Dieser Homomorphismus ist ein Isomorphismus. Denn entspricht dem Zyklus Z ein in $\overline{K}$ berandender Zyklus $f(Z)$, so ist wie leicht ersichtlich $Z \underset{\alpha}{\sim} 0$ in F, also nach Satz I $Z \sim 0$ in F, w.z.b.w.[19])

Nachträgliche Bemerkung[20]).

Setzt man voraus, daß es sich im Hauptsatz des § 2 um einen Koeffizienten*ring* J handelt, so bleibt der Satz gültig, auch wenn die X_i^r Relativzyklen dieses Koeffizientenringes (und also nicht notwendig ganzzahlige Relativzyklen) sind. Dann dürfen auch die Koeffizienten c^h in den Berandungsrelationen $\dot{X}_i^r = \sum c^h X_h^{r-1}$ Elemente von J sein.

Bolschewo-Komarovka (bei Moskau), 2. April 1936.

(Eingegangen den 11. Mai 1936.)

[19]) Herr Wilder kommt in seiner neuerdings erschienen Abhandlung „On locally connected spaces" [Duke Math. Journ. 1 (1935), 543—555], von der ich erst nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit Kenntnis genommen habe, zu Betrachtungen, die mit den Überlegungen des vorliegenden § 3 manche Berührung aufweist. Insbesondere beweist Herr Wilder, daß lokal-zusammenhängende Räume endliche Bettische Zahlen haben. Die Methode kommt dabei im wesentlichen ebenfalls auf ε-Modifikationen hinaus.

[20]) Gemacht am 15. I. 1937.