COMPOSITIO MATHEMATICA

P. ALEXANDROFF
H. HOPF
L. PONTRJAGIN

Über den Brouwerschen Dimensionsbegriff

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 239-255
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__239_0>

Über den Brouwerschen Dimensionsbegriff

von

P. Alexandroff, H. Hopf und L. Pontrjagin

Moskau Zürich Moskau

Einleitung.

1. Es sei $\mathfrak{J}$ eine Abelsche Gruppe [1]).

Eine Linearform $c = \sum_i t^i x_i^r$, deren Unbestimmte x_i^r Simplexe der Dimensionszahl r, deren Koeffizienten Elemente von $\mathfrak{J}$ sind, heißt ein *r-dimensionaler algebraischer Komplex des Koeffizientenbereiches* $\mathfrak{J}$. [2]) Dabei wird vorausgesetzt, daß $t(-x^r) = -tx^r$ ist. Unter einem Simplex wird dabei entweder ein Simplex eines Euklidischen R^n oder aber eine endliche Punktmenge, ein „*Gerüst*", eines metrischen Raumes R verstanden; eine Menge von $r+1$ Punkten des metrischen Raumes heißt dabei ein r-dimensionales Simplex; ist der Durchmesser der Menge $< \delta$, so ist das Simplex ein δ-Simplex. Die Orientierung wird dabei wie gewöhnlich eingeführt. Sind in

$$c = \sum t^i x_i^r \tag{1}$$

alle x_i^r δ-Simplexe, so heißt c ein δ-Komplex.

Unter dem Rand des orientierten Simplex $x^r = (a_0 \ldots a_r)$, — die a_i sind die Eckpunkte von x^r — wird der Komplex (des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{G}$) [1])

$$\dot{x}^r = \sum_i (-1)^i (a_0 \ldots a_{i-1}\, a_{i+1} \ldots a_r),$$

unter dem Rande von tx^r der Komplex (des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$)

---

[1]) Im folgenden kommen nur folgende Gruppen $\mathfrak{J}$ vor: die additive Gruppe der ganzen Zahlen, $\mathfrak{G}$; die additive Gruppe der rationalen Zahlen, $\mathfrak{R}$; die Gruppe $\mathfrak{G}_m$ der Restklassen modulo m, $m = 2, 3, \ldots$ in infinitum; die (additive) Gruppe $\mathfrak{R}_1$ der modulo 1 reduzierten rationalen Zahlen.

[2]) Vgl. P. Alexandroff, Einfachste Grundbegriffe der Topologie [Berlin Springer 1932], sowie „Über die Urysohnschen Konstanten" [Fund. Math. **20** (1933), 140—150], wo der Begriff eines beliebigen Koeffizientenbereiches zum ersten Mal in voller Allgemeinheit eingeführt wurde.

$$t\dot{x}^r = \sum_i t(-1)^i (a_0 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_r),$$

unter dem Rande von (1) der Komplex

(2) $$\dot{c} = \sum t^i \dot{x}_i^r$$

verstanden.

2. Ein algebraischer δ-Komplex c des metrischen Raumes R heißt ein δ-Zyklus *bis auf* R' (wobei R' eine Teilmenge von R ist), wenn der Rand von c (d.h. jeder Eckpunkt dieses Randes) zu R' gehört [3]).

In analoger Weise definiert man einen Zyklus von K *bis auf* K', wobei K ein absoluter Komplex [4]) und K' ein absoluter Teilkomplex von K ist.

Verschwindet der Rand des algebraischen Komplexes, so heißt er ein Zyklus schlechtweg.

Ein δ-Zyklus c bis auf R' *ε-berandet bis auf* R' (ist ε-homolog Null bis auf R'), in Zeichen $c \underset{\varepsilon}{\sim} 0 \pmod{R'}$, falls es einen ε-Komplex c' gibt mit $\dot{c}' = c + q$, wobei q ein Komplex in R' ist.

Unter einem *wahren r-dimensionalen Komplex* des kompakten metrischen Raumes F und des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ verstehen wir eine Folge

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots),$$

wobei c_k ein δ_k-Komplex des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ in F und $\lim \delta_k = 0$ ist. Sind alle c_k Zyklen bis auf F', $F' \subset F$, so ist auch C definitionsgemäß ein *wahrer Zyklus bis auf* F'; er heißt homolog Null bis auf F', falls $c_k \underset{\varepsilon_k}{\sim} 0 \pmod{F'}$ und $\lim \varepsilon_k = 0$ ist. Sind alle c_k Zyklen schlechtweg, so heißt auch C schlechtweg ein wahrer Zyklus.

Jede abgeschlossene Teilmenge von F, in der die Eckpunkte fast aller c_k liegen, heißt ein *Träger* des wahren Komplexes C. Ein wahrer Zyklus heißt wesentlich, wenn er mindestens einen Träger besitzt, in dem er nicht berandet.

3. *Die Dimension von F in bezug auf $\mathfrak{J}$ ist definitionsgemäß die größte ganze Zahl r von der Eigenschaft, daß es in F einen wesentlichen berandenden $(r-1)$-dimensionalen wahren Zyklus in bezug auf den Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ gibt* [5]).

---

[3]) Dieser Begriff rührt von LEFSCHETZ her. Vgl. „Topology" und die dort angegebenen früheren Arbeiten.

[4]) Unter einem absoluten Komplex verstehen wir hier ein endliches System von Simplexen.

[5]) P. ALEXANDROFF, „Dimensionstheorie" [Math. Ann. **106** (1932), 161—238] (zitiert als Dimensionstheorie), sowie „Urysohnsche Konstanten".

Die Dimension von F in bezug auf $\mathfrak{J}$ wird bezeichnet durch $\Delta_{\mathfrak{J}}(F)$.

Ein wahrer Zyklus bis auf F', etwa (2), heißt *konvergent*, falls es zu jedem ε ein $k(\varepsilon)$ gibt, so daß für $k \geqq k(\varepsilon)$, $k' \geqq k(\varepsilon)$

$$c_k \underset{\varepsilon}{\sim} c_{k'}, \quad \text{mod } F'$$

ist. Gibt es einen Träger, in dem der Zyklus gleichzeitig wesentlich und konvergent ist, so heißt er *wesentlich konvergent.*

Wir bezeichnen mit $\Delta^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{J}}(F)$ die größte Zahl von der Eigenschaft, daß es in F einen $(r-1)$-dimensionalen berandenden wesentlich konvergenten Zyklus gibt. Offenbar ist stets $\Delta_{\mathfrak{J}}(F) \geqq \Delta^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{J}}(F)$.

Wir bezeichnen ferner mit $\varLambda_{\mathfrak{J}}(F)$ bzw. $\varLambda^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{J}}(F)$ die größte Zahl r von der Eigenschaft, daß es in F einen r-dimensionalen bzw. einen r-dimensionalen konvergenten Zyklus des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$ bis auf eine gewisse (passend zu wählende) abgeschlossene Teilmenge F' gibt, welcher bis auf F' nicht berandet.

Wir erinnern an noch eine bekannte Definition.[6]) Unter einem wahren Komplex (2) *nach variablem Modul* versteht man eine Folge (2), in der c_k ein Komplex des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{G}_{m_k}$ (und m_k eine sich im allgemeinen mit k ändernde ganze Zahl $\geqq 2$ ist). Man kann insbesondere von wahren Zyklen nach variablem Modul sprechen. Ein solcher ist dann homolog Null, falls jedes c_k in bezug auf den betreffenden Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}_{m_k}$ ε_k-berandet.

Die größte Zahl r von der Eigenschaft, daß es in F einen wesentlichen berandenden wahren Zyklus nach variablem Modul gibt, heißt die *Dimension von F nach variablem Modul,* $\Delta(F)$; die größte Zahl r von der Eigenschaft, daß es in F einen nicht berandenden r-dimensionalen Zyklus nach variablem Modul bis auf ein gewisses F' gibt, nennen wir für einen Augenblick $\varLambda(F)$.

Es ist nun folgendes bekannt [6]):

Es sei F eine beschränkte abgeschlossene Menge eines R^n, $\mathfrak{J}$ einer der Koeffizientenbereiche $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{G}_m$, $m = 2, 3, 4, \ldots$, dim F die Brouwersche Dimension von F; es gelten die Formeln:

$$\text{(3)} \qquad \dim F = \Delta(F) = \varLambda(F),$$

$$\text{(4)} \qquad \Delta_{\mathfrak{J}}(F) = \Delta^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{J}}(F) = \varLambda_{\mathfrak{J}}(F) = \varLambda^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{J}}(F).$$

4. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, zu beweisen, daß

[6]) Dimensionstheorie, § 2—3.

für jede beschränkte abgeschlossene Menge des R^n folgendes gilt:

(5) $$\dim F = \Delta_{\mathfrak{R}_1}(F) = \Delta^c_{\mathfrak{R}_1}(F) = \Lambda_{\mathfrak{R}_1}(F) = \Lambda^c_{\mathfrak{R}_1}(F).$$

Indem wir den gemeinsamen Wert von $\Delta_{\mathfrak{R}_1}(F)$, $\Delta^c_{\mathfrak{R}_1}(F)$, $\Lambda_{\mathfrak{R}_1}(F)$, $\Lambda^c_{\mathfrak{R}_1}(F)$ als die Dimension modulo 1 von F bezeichnen, drücken wir diesen Satz kurz so aus: *die Brouwersche Dimension ist mit der Dimension modulo* 1 *identisch.*

Bemerkung. Der Anteil der drei Autoren an diesem — im Winter 1933-34 bewiesenen — Satz ist der folgende. Nachdem Alexandroff durch die Formel (3) die Brouwersche Dimension in die Gestalt einer Homologie-Invariante gebracht hatte, hat Pontrjagin die *Variabilität* des Koeffizientenbereiches eliminiert, indem er aus seinem allgemeinen Dualitätssatz [7]) und dem Rechtfertigungssatz von Alexandroff (Dimensionstheorie, 3. Hauptsatz, S. 208) das Resultat erhalten hat, daß die Brouwersche Dimension mit der Dimension in bezug auf die Gruppe $\mathfrak{X}_1$ der modulo 1 reduzierten *reellen* Zahlen (und sogleich auch mit $\Delta^c_{\mathfrak{X}_1}(F)$) identisch ist. Daraufhin hat Hopf vermutungsweise den in der vorliegenden Arbeit zu beweisenden Satz ausgesprochen und unabhängig davon die Homologie-Eigenschaften der Komplexe in bezug auf den Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}_1$ untersucht. Hierdurch (s. u. § 2) wurden die Hilfsmittel zum Beweise der Formel (5) gegeben. Der Beweis selbst ist von Alexandroff; die Abschnitte 2—5 von § 1 haben durch Herrn H. Freudenthal ihre vereinfachte gegenwärtige [8]) Gestalt erhalten, wofür die Verff. Herrn Freudenthal ihren aufrichtigen Dank aussprechen.

§ 1.

Beweis der Formel $\dim F \geqq \Lambda_{\mathfrak{R}_1}(F) \geqq \Delta_{\mathfrak{R}_1}(F)$. *Zurückführung des übrigen Teils der Formel* (5) *auf einen Konvergenzsatz.*

1. Satz I. Für jeden Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ gilt

(6) $$\dim F \geqq \Lambda_{\mathfrak{J}}(F) \geqq \Delta_{\mathfrak{J}}(F).$$

Der Satz I ist in den folgenden beiden Sätzen enthalten:

Satz II. Eine (im Brouwerschen Sinne) r-dimensionale Menge enthält keinen nichtberandenden Relativzyklus von einer Dimensionszahl $> r$.

Satz III. Wenn $\Delta_{\mathfrak{J}}(F) = r$ ist, so enthält F einen nicht berandenden r-dimensionalen Relativzyklus (des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{J}$).

Beweis von Satz II. *Hilfssatz* I. Der Zyklus

(7) $$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots)$$

sei total-unhomolog Null in F bis auf $F' \subset F$ [9]).

---

[7]) Verh. Intern. Math. Kongr. Zürich 1932, 2, 195, sowie die ausführliche Darstellung in den Annals of Math. (2) 35 (1934), 904—914.

[8]) 28. November 1936.

[9]) D.h. es existiert ein solches ε, daß keiner von den Zyklen z_k in F bis auf

Es existiert ein solches $\sigma > 0$, daß bei jeder σ-Überführung f von F der Zyklus $f(Z)$ in $f(F)$ bis auf $f(F')$ total unhomolog Null ist. Der Beweis des Hilfssatzes I beruht auf folgender

Bemerkung. Ist z ein δ-Zyklus in F bis auf F' und $f(z)$ in $f(F)$ bis auf $f(F')$ ε-homolog Null, so ist z in F bis auf F' $(\varepsilon+5\sigma)$-homolog Null[10]). Denn zunächst ist $z \underset{3\sigma}{\sim} f(Z)$ in $F+f(F)$ bis auf $(F'+f(F'))$, also — da $f(z) \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ in $f(F)$ bis auf $f(F')$ —

$$z \underset{\varepsilon+3\sigma}{\sim} 0 \text{ in } \overline{U(F,\sigma)} \text{ bis auf } F'+f(F').$$

Es gibt mit anderen Worten einen in $\overline{U(F,\sigma)}$ gelegenen $(\varepsilon+3\sigma)$-Komplex C mit

$$\dot{C} = z + C', \quad C' \subset F' + f(F').$$

Dadurch, daß man C in F *projiziert* (d.h. jeden Eckpunkt von C durch einen zu diesem Eckpunkt möglichst nahe gelegenen Punkt von F ersetzt unter der zusätzlichen Bedingung, daß die zu $f(F')$ gehörenden Eckpunkte durch Punkte von F' ersetzt werden), geht C in einen $(\varepsilon+5\sigma)$-Komplex C_1 über, wobei

$$\dot{C}_1 = z + C'_1, \quad C'_1 \subset F'$$

ist. Hiermit ist die in unserer Bemerkung enthaltene Behauptung bewiesen.

Um jetzt den Hilfssatz I zu beweisen, wählen wir ein so kleines σ, daß keiner unter den Zyklen z_k 6σ-homolog Null in F bis auf F' ist. Nach der soeben bewiesenen Bemerkung kann keiner der Zyklen $f(z_k)$ der Homologie $f(z_k) \underset{\sigma}{\sim} 0$ in $f(F)$ bis auf $f(F')$ genügen, womit der Hilfssatz I bewiesen ist.

Vermöge des Hilfssatzes I und des dimensionstheoretischen Überführungssatzes[11]) brauchen wir den Satz II bloß unter der Voraussetzung, F sei ein r-dimensionales Polyeder, zu beweisen. Diesem Beweis schicken wir den folgenden Hilfssatz voran.

Hilfssatz II. Ist der Zyklus (7) in F bis auf F' total unhomolog Null, so gibt es ein $\sigma > 0$ derart, daß bei beliebiger Wahl der σ-Umgebung U von F' (in bezug auf F) der Zyklus (7) (als Zyklus bis auf $\overline{U}$ betrachtet) nicht berandet.

F' ε-homolog Null ist. Ist der Zyklus (7) unhomolog Null in F bis auf F', so existiert offenbar eine unendliche Teilfolge

$$Z' = (z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_h}, \ldots),$$

so daß Z' in F bis auf F' total-unhomolog Null ist. Für konvergente Zyklen stimmen die Begriffe nicht homolog Null und total unhomolog Null überein.

[10]) Dabei ist f eine σ-Überführung von F.

[11]) Dimensionstheorie, S. 169.

Wir führen den Beweis indirekt. Wäre der Hilfssatz II falsch, so gäbe es eine Folge von σ_i-Umgebungen U_i von F' in bezug auf F, $\lim \sigma_i = 0$, und eine Folge von σ_i-Komplexen C_i mit

$$\dot{C}_i = z_{k_i} + C'_i, \quad C'_i \subset \overline{U}_i .$$

Durch eine σ_i-Verschiebung der zu $\overline{U}_i$ aber nicht zu F' gehörenden Eckpunkte der C'_i könnte man Komplexe C''_i mit $\dot{C}^*_i = z_{k_i} + C''_i$, $C''_i \subset F'$ erhalten, was bedeuten würde, daß gegen Voraussetzung

$$(z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_i}, \ldots)$$

in F bis auf F' berandet.

Nachdem der Hilfssatz II bewiesen ist, brauchen wir zum Beweise des Satzes II nur wenige Worte. Es sei im r-dimensionalen Polyeder P ein Zyklus (7) bis auf $F' \subset P$ von einer Dimensionszahl $s > r$ gegeben. Wir nehmen an, daß er in P bis auf F' total unhomolog Null ist und wählen die aus Simplexen einer hinreichend feinen Simplizialzerlegung K von P zusammengesetzte Umgebung $\overline{U}$ von F' so, daß (7) auch bis auf $\overline{U}$ nicht berandet. Es gibt dann eine Teilfolge von (7), die total unhomolog Null ist; wir bezeichnen sie wiederum durch (7) und bestimmen $\sigma < \varrho(F', P-U)$ so, daß keiner der Zyklen z_k in P bis auf $\overline{U}$ σ-homolog Null ist. Sodann kann man eine Unterteilung K' von K so wählen, daß für alle hinreichend großen k die Zyklen z_k mittels einer $\frac{\sigma}{4}$-Verschiebung in Zyklen z'_k des Komplexes K' übergehen. Da bei dieser Verschiebung der Rand von z_k die Menge U nicht verläßt, ist z'_k ein Zyklus bis auf $\overline{U}$, der bis auf $\overline{U}$ mit z_k σ-homolog ist, folglich in P bis auf $\overline{U}$ nicht σ-beranden kann; dies ist jedoch unmöglich, denn z'_k ist als s-dimensionaler Teilkomplex des r-dimensionalen Komplexes K' Null.

Hiermit ist der Satz II vollständig bewiesen.

Beweis von Satz III. Da nach Voraussetzung $\Delta_{\mathfrak{J}}(F) = r$ ist, gibt es in F einen wesentlichen berandenden $(r-1)$-dimensionalen Zyklus

(8) $$Z^{r-1} = (z_1^{r-1}, z_2^{r-1}, \ldots, z_k^{r-1}, \ldots).$$

F' sei ein Träger, in dem Z^{r-1} total unhomolog Null ist. Ferner seien die durch z_k^{r-1} berandeten ε_k-Komplexe C_k, $\lim \varepsilon_k = 0$, gegeben. Dann ist

(9) $$(C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots)$$

ein r-dimensionaler Zyklus in F bis auf F'. Er ist total unhomolog

Null, denn aus der Existenz der σ_k-Komplexe C_k^{r+1}, $\lim \sigma_k = 0$, $\dot{C}_k^{r+1} = C_k + Q_k$, $Q_k \subset F'$, würde folgen — da C_k und Q_k denselben Rand z_k^{r-1} haben —, daß $z_k^{r-1} \underset{\sigma_k}{\sim} 0$ in F' ist, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Hiermit ist Satz III, folglich auch Satz I bewiesen.

2. In 3 und 4 soll $\Lambda^c_{\mathfrak{R}_1}(F) \geqq \dim F$ und $\Delta^c_{\mathfrak{R}_1}(F) \geqq \dim F$ bewiesen werden; a fortiori ist dann $\Lambda_{\mathfrak{R}_1}(F) \geqq \dim F$ und $\Delta_{\mathfrak{R}_1}(F) \geqq \dim F$, also gilt dann (5). Erst treffen wir einige Vorbereitungen:

a. Zu dem Simplex T, das im Folgenden auftreten wird, sei die Zahl α so bestimmt, daß

1. ein im Abstand $< \alpha$ zu T paralleles gleichdimensionales echtes Teilsimplex $T_0 \subset T$ existiert,

2. ein α-Grundzyklus von T bis auf $\overline{T-T_0}$ (der auch wieder T genannt wird) in T bis auf $\overline{T-T_0}$ nicht α-homolog 0 ist,

3. sein Randzyklus in $\overline{T-T_0}$ nicht α-homolog 0 ist. (Siehe hierzu den Beweis von Hilfssatz II.)

b. Die Abbildung $f(R)$ des kompakten R in das Simplex T heißt bekanntlich unwesentlich, wenn sich f unter Festhaltung auf dem Urbild des Randes S von T ersetzen läßt durch ein g, das R auf eine echte Teilmenge von T (oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf S) abbildet; andernfalls heißt f wesentlich. Wegen 2a, 1 darf man statt „Festhaltung auf $f^{-1}(S)$ auch sagen: „Veränderung um weniger als α auf $f^{-1}(S)$".

c. Nach einem Satz von H. Hopf [12]) gibt es zu einer wesentlichen Abbildung f des höchstens r-dimensionalen Polyeders P [13]) in das r-dimensionale Simplex T einen r-dimensionalen Zyklus z bis auf $f^{-1}(S)$ (Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}_1$), der durch f vom Grade $\neq 0$ abgebildet wird: $f(z) = \varkappa T$ bis auf S, $\varkappa \neq 0$. (Eigentlich liefert der Hopfsche Satz einen Zyklus mod ganzzahligem m $(\neq 0)$; um unsere Behauptung zu erhalten, braucht man aber nur $\varkappa$ und die Koeffizienten von z durch m zu dividieren.)

d. Zu jedem F mit $\dim F = r$ läßt sich ein abgeschlossenes $F_0 \subset F$ und eine Abbildung f finden, die F_0 wesentlich auf ein r-dimensionales Simplex T abbildet [13a]). Denn sei $\beta > 0$ so klein, daß keine 2β-Überführung des (im Hilbertschen Raum gedachten)

---

[12]) Recueil Moscou **37** (1930), 53—62, Folg. II aus Satz II.

[13]) Auf beliebige kompakte Räume hat H. Freudenthal [Compositio Mathematica **4** (1937), 234—237] im Wesentlichen diesen Satz ausgedehnt; wir machen aber davon hier keinen Gebrauch.

[13a]) Dimensionstheorie, 170, Hauptsatz I. Man kann übrigens $F_0 = F$ nehmen.

F dim F herabsetzt [14]), sei f eine β-Überführung von F in ein r-dimensionales Polyeder Q, dessen Simplexe $< \beta$ seien; dann kann sicher nicht für *alle* r-dimensionalen T von Q die Abbildung f von $f^{-1}(T)$ in T unwesentlich sein, weil sonst eine Abbildung g existierte, die (auf den Simplexen kleinerer Dimension mit f übereinstimmte und) F in die Menge der Simplexe kleinerer Dimension abbildete, gleichzeitig aber eine 2β-Überführung wäre. Wir können $F_0 = f^{-1}(T)$ wählen.

e. $f(F_0) \subset T$ sei also wesentlich. Wir setzen f auf eine γ-Umgebung U von F_0 im Hilbertschen Raum fort und wählen $\varepsilon > 0$ so, daß das Bild jeder ε-Menge (aus U) $< \alpha$ wird. Es sei $3\delta < \varepsilon$, $\delta < \gamma$ und g eine δ-Überführung von F_0 in ein höchstens r-dimensionales Polyeder P. Auf P heiße die angegebene Fortsetzung von f auch h. Dann ist $hg(f^{-1}(S))$ fremd zu T_0 (wegen 2a, 1).

h muß $h^{-1}(T_0)$ wesentlich auf T_0 abbilden. Denn wäre etwa h_0 auf $h^{-1}(\overline{T-T_0})$ mit h identisch und $h_0(h^{-1}(T_0)) \subset \overline{T-T_0}$, so wäre $h_0 g$ auf $g^{-1}h^{-1}(\overline{T-T_0})$ mit hg identisch und $h_0 g(g^{-1}h^{-1}(\overline{T-T_0})) \subset \overline{T-T_0}$; dann unterschiede sich aber $h_0 g$ auf $f^{-1}(\overline{T-T_0})$ von f um weniger als α, und f wäre nach 2b unwesentlich.

3. Unter diesen Umständen gibt es (nach 2c für T_0 statt T) in P einen r-dimensionalen δ-Zyklus z' bis auf $h^{-1}(\overline{T-T_0})$ (Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}_1$) mit $h(z') = \varkappa T$ bis auf $\overline{T-T_0}$ $(\varkappa \neq 0)$. z in F_0 entstehe aus z', indem man jeden Eckpunkt durch eines seiner h-Urbilder ersetze; z ist ein 3δ-Zyklus bis auf $g^{-1}h^{-1}(\overline{T-T_0}) = F_0'$ in F_0, und man hat $hg(z) = \varkappa T$ bis auf $\overline{T-T_0}$. Dieselbe Gleichung gilt für jeden mit z ε-homologen Zyklus; nach 2a, 2 kann die rechte Seite nicht α-homolog 0 sein, also auch z nicht ε-homolog 0 (in F_0) sein.

Wir wenden nun den folgenden *Konvergenzsatz* an, dessen Beweis der Inhalt von § 3 ist:

Zu gegebenen F, $F' \subset F$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\sigma_\varepsilon > 0$, so daß (für den Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}_1$) jeder σ_ε-Zyklus in F bis auf F' einem bis auf F' in F konvergenten Zyklus bis auf F' ε-homolog ist.

Haben wir oben $3\delta < \sigma_\varepsilon$ gewählt, so erzeugt (mit F_0, F_0' statt F, F') der Konvergenzsatz aus unserm z einen konvergenten r-dimensionalen Zyklus in F_0 bis auf F_0', der in F_0 nicht berandet,

---

[14]) P. Alexandroff [Annals of Math. (2) 30 (1929), 101—187], 120.

also auch einen solchen, der in F bis auf $F' = F'_0 + (F - F_0)$ nicht berandet. Also ist $\Delta^c_{\mathfrak{N}_1}(F) \geqq r$.

4. Wir haben nun einen r-dimensionalen konvergenten r-dimensionalen Zyklus

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots)$$

in F_0 bis auf F'_0; dabei ist

$$hg(z_k) = \varkappa T \text{ bis auf } \overline{T - T_0} \quad (\varkappa \neq 0).$$

Nach 2a, 3 ist $hg(\dot{z}_k) = hg(z_k)$ für fast alle k in $\overline{T - T_0}$ α-unhomolog 0, also

$$\dot{Z} = (\dot{z}_1, \dot{z}_2, \ldots, \dot{z}_k, \ldots)$$

total unhomolog in F'_0.

Dagegen ist $\dot{Z}$ in F_0, also auch in F, nullhomolog. Schließlich konvergiert $\dot{Z}$ in F'_0; denn Z konvergiert bis auf F'_0, d.h.

$z_k \underset{\eta}{\sim} z_l$ bis auf F'_0 für jedes $\eta > 0$ und fast alle k, l,
$z_k - z_l = \dot{c}_{k,l} + q_{k,l}$ (wobei der η-Komplex $q_{k,l} \subset F'_0$ ist), also
$\dot{z}_k - \dot{z}_l = \dot{q}_{k,l} \subset F'_0$, also
$\dot{z}_k \underset{\eta}{\sim} \dot{z}_l$ in F'_0 für jedes $\eta > 0$ und fast alle k, l.

Damit ist $\Delta^c_{\mathfrak{N}_1}(F) \geqq r$ bewiesen.

5. Das einzige, was noch übrig bleibt, ist der Nachweis des Konvergenzsatzes. Um diesen zu erbringen, werden wir im nächsten § die Grundtatsachen der Homologie-Theorie gewöhnlicher Komplexe auseinandersetzen.

Man könnte aber auch ganz anders verfahren. Für den Koeffizientenbereich der reellen Zahlen mod 1 sind die Bettischen Gruppen von Polyedern abgeschlossene Untergruppen von Torusgruppen. In der Sprechweise von H. Freudenthal [15]) läßt sich die Bettische Gruppe von F mod F' als G_n-adischer Limes der Folge

$$\mathfrak{B}_{\varepsilon_1\eta_1}(F) \bmod F' \leftarrow \mathfrak{B}_{\varepsilon_2\eta_2}(F) \bmod F' \leftarrow \ldots.$$

darstellen. Da jede absteigende Folge abgeschlossener Untergruppen einer Torusgruppe abbricht, ist das eine auf-G_n-adische Folge; man darf daher [16]) annehmen, daß alle Abbildungen in

---

[15]) Compositio Mathematica 4 (1937), Kap. V.

[16]) H. FREUDENTHAL, a.a.O. [15]), 161.

der Folge „Abbildungen auf" sind. Daraus ergibt sich leicht der Konvergenzsatz.

§ 2.

Über die Zyklen des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{R}_1$ *in einem Komplex.*

1. K sei ein absoluter endlicher Komplex, also ein System von endlich vielen Simplexen (mit der Eigenschaft: jede Seite eines Simplexes von K ist selbst Simplex von K). Die algebraischen Komplexe C in K in bezug auf einen Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ und ihre Ränder $\dot{C}$ sind wie in Nr. 1 der „Einleitung" definiert. Es sei ferner ein Teilkomplex K' von K fest gegeben (d.h. ein absoluter Komplex, dessen Simplexe zugleich Simplexe von K sind). Ein algebraischer Komplex in K heißt „Relativzyklus bis auf K'" wenn sein Rand ein algebraischer Komplex in K ist. Der Relativzyklus C bis auf K' heißt „homolog 0 bis auf K'", wenn es einen algebraischen Komplex D in K und einen algebraischen Komplex Q' in K' so gibt, daß $C = \dot{D} + Q'$ ist.

Dieser Homologiebegriff führt für jeden Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ in bekannter Weise zur Einteilung der Gesamtheit aller r-dimensionalen Relativzyklen bis auf K' in „Homologieklassen bis auf K'"; diese bilden bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe — die r-dimensionale Bettische Gruppe von K bis auf K'" (in bezug auf $\mathfrak{J}$).

Die Elemente endlicher Ordnung in der „ganzzahligen" Bettischen Gruppe, d.h. der Bettischen Gruppe in bezug auf die additive Gruppe der ganzen Zahlen, bilden selbst eine Gruppe — die „Torsionsgruppe". Aus der bekannten Tatsache, daß die ganzzahlige Bettische Gruppe eines endlichen Komplexes durch endlich viele ihrer Elemente erzeugt werden kann, folgt bekanntlich leicht die folgende Tatsache, die für uns von Bedeutung sein wird: *die Torsionsgruppe ist eine endliche Gruppe.*

Im folgenden sind K und K' fest gegeben. Da es sich in diesem Paragraphen niemals um andere Zyklen und Homologien handeln wird als um solche „bis auf K'", lassen wir den Zusatz „bis auf K'" ein für alle Mal weg.

2. Zum Zweck der Untersuchung der Zyklen des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{R}_1$ — also der additiven Gruppe der modulo 1 reduzierten rationalen Zahlen — betrachten wir gleichzeitig den Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ — also die additive Gruppe der rationalen

Zahlen. Ist s eine rationale Zahl, so verstehen wir unter $\mathfrak{r}(s)$ die Restklasse modulo 1, der s angehört, also ein Element von $\mathfrak{R}_1$; ist umgekehrt t ein Element von $\mathfrak{R}_1$, so gibt es immer rationale Zahlen s mit $\mathfrak{r}(s) = t$. Ist $C = \sum_i s^i x_i$ ein rationaler Komplex (d.h. ein algebraischer Komplex in bezug auf $\mathfrak{R}$), so verstehen wir unter $\mathfrak{r}(C)$ den Komplex $\sum_i \mathfrak{r}(s^i)x_i$, also einen Komplex in bezug auf $\mathfrak{R}_1$; ist umgekehrt $\gamma = \sum_i t^i x_i$ ein Komplex in bezug auf $\mathfrak{R}_1$, so gibt es rationale Komplexe C mit $\gamma = \mathfrak{r}(C)$, nämlich die Komplexe $\sum_i s^i x_i$, wobei $\mathfrak{r}(s^i) = t^i$ ist.

Es ist klar, daß für die Ränder die Beziehung gilt:

$$(\mathfrak{r}(C))^{\cdot} = \mathfrak{r}(\dot{C}).$$

Daraus folgt insbesondere: Ist C ein (rationaler) Zyklus, so ist $\mathfrak{r}(C)$ ein Zyklus in bezug auf $\mathfrak{R}_1$. Die auf diese Weise gebildeten Zyklen in bezug auf $\mathfrak{R}_1$ nennen wir die „*Zyklen 1. Art*" in bezug auf $\mathfrak{R}_1$. Daß es im allgemeinen auch „Zyklen 2. Art" gibt, d.h. Zyklen, die nicht von der 1. Art sind, wird sich aus Nr. 4 dieses Paragraphen ergeben.

Die r-dimensionalen Zyklen 1. Art bilden offenbar eine Gruppe; sie heiße $\overset{*}{Z}{}^r$; sie ist eine Untergruppe der Gruppe Z^r aller r-dimensionalen Zyklen in bezug auf $\mathfrak{R}_1$. Wir interessieren uns hier besonders für die *Restklassen*, in welche die Gruppe Z^r modulo ihrer Untergruppe $\overset{*}{Z}{}^r$ zerfällt.

3. Zunächst stellen wir fest: *Zwei r-dimensionale Zyklen in bezug auf $\mathfrak{R}_1$, die einander homolog sind, befinden sich in derselben Restklasse modulo $\overset{*}{Z}{}^r$.*

Um dies zu beweisen, hat man zu zeigen: *jeder Rand* (in bezug auf $\mathfrak{R}_1$) *ist ein Zyklus* 1. *Art.* Aber in der Tat: ist ζ der Rand des Komplexes γ in bezug auf $\mathfrak{R}_1$, so gibt es einen solchen rationalen Komplex C, daß $\gamma = \mathfrak{r}(C)$, also $\zeta = \mathfrak{r}(\dot{C})$ ist; da $\dot{C}$ ein rationaler Zyklus ist, ist daher ζ von der 1. Art.

4. Die für uns wichtigste Tatsache ist die folgende:

Die Anzahl der Restklassen, in welche die Zyklengruppe Z^r modulo der Gruppe $\overset{*}{Z}{}^r$ der Zyklen 1. Art zerfällt, ist endlich.

Dieser Satz ist, infolge der Endlichkeit der Torsionsgruppen (vgl. Nr. 1), in dem folgenden schärferen Satz enthalten:

Die Restklassengruppe („*Faktorgruppe*") *von Z^r modulo $\overset{*}{Z}{}^r$ ist der* $(r-1)$*-dimensionalen Torsionsgruppe T^{r-1} von K isomorph.*

Den Beweis [17]) dieses Satzes führen wir dadurch, daß wir eine homomorphe Abbildung h der Zyklengruppe Z^r auf die Torsionsgruppe T^{r-1} angeben, bei welcher den Zyklen 1. Art, und nur diesen, das Nullelement von T^{r-1} entspricht.

Es sei ζ ein r-dimensionaler Zyklus in bezug auf $\mathfrak{R}_1$; dann ist $\zeta = \mathfrak{r}(B)$, wobei B ein rationaler Komplex ist; indem man die Koeffizienten der Simplexe in B auf ihren Hauptnenner bringt, kann man $B = \frac{1}{m} C$ setzen, wobei m eine ganze Zahl und C ein ganzzahliger Komplex ist. Es ist also

$$\zeta = \mathfrak{r}\left(\frac{1}{m} C\right). \tag{1}$$

Die Tatsache, daß ζ Zyklus ist, bedeutet: in $\mathfrak{r}\left(\frac{1}{m} \dot{C}\right)$ sind die Koeffizienten aller Simplexe gleich dem Nullelement von $\mathfrak{R}_1$, in $\frac{1}{m} \dot{C}$ sind also die Koeffizienten aller Simplexe ganzzahlig, mit anderen Worten:

$$\dot{C} = mz, \tag{2}$$

wobei z ein *ganzzahliger* Komplex, und zwar, da $\dot{C}$ Zyklus ist, ein *ganzzahliger Zyklus* ist.

Bestehen neben (1) und (2) für denselben Zyklus ζ analoge Gleichungen

$$\zeta = \mathfrak{r}\left(\frac{1}{m'} C'\right), \tag{1'}$$

$$\dot{C}' = m'z', \tag{2'}$$

so folgt aus (1) und (1′) die Existenz eines ganzzahligen Komplexes A mit

$$\frac{1}{m'} C' = \frac{1}{m} C + A,$$

also nach (2) und (2′)

$$z' = z + \dot{A},$$

$$z' \sim z.$$

Somit ist die Homologieklasse der $(r-1)$-dimensionalen Zyklen z und z' in (2) bzw. (2′) eindeutig durch ζ bestimmt, und wir dürfen diese Klasse daher mit $h(\zeta)$ bezeichnen.

---

[17]) Dieser Beweis ist inzwischen — d.h. zwischen der inhaltlichen Beendigung und der endgültigen Redaktion der vorliegenden Arbeit — in den 1. Band der „Topologie" von ALEXANDROFF und HOPF (Berlin, Springer, 1935), 223—224, aufgenommen worden.

Da nach (2) $mz \sim 0$ ist, ist $h(\zeta)$ Element der Torsionsgruppe T^{r-1}. Ist umgekehrt z ein beliebiger $(r-1)$-dimensionaler Zyklus von endlicher Ordnung, d.h. ein solcher Zyklus, daß seine Homologieklasse Element von T^{r-1} ist, so gibt es eine ganze Zahl m und einen ganzzahligen Komplex C so, daß (2) gilt; der durch (1) bestimmte Komplex ζ in bezug auf $\mathfrak{R}_1$ ist infolge (2) ein Zyklus, und für ihn ist gemäß Definition $h(\zeta)$ die Homologieklasse von z. Somit ist h eine eindeutige Abbildung der Gruppe Z^r *auf* die Gruppe T^{r-1}.

Diese Abbildung h ist ein Homomorphismus. Sind nämlich ζ, ζ_1 Zyklen, für welche Gleichungen (1), (2) bzw.

$$(1_1) \qquad \zeta_1 = \mathfrak{r}\left(\frac{1}{m_1} C_1\right),$$

$$(2_1) \qquad \dot{C}_1 = m_1 z_1$$

gelten, so ist

$$(3) \qquad \zeta + \zeta_1 = \mathfrak{r}\left(\frac{1}{mm_1}(m_1 C + m C_1)\right),$$

$$(4) \qquad (m_1 C + m C_1)^{\cdot} = mm_1(z + z_1).$$

Nach (3) und (4) ist $h(\zeta+\zeta_1)$ die Homologieklasse des Zyklus $z + z_1$, also $h(\zeta+\zeta_1) = h(\zeta) + h(\zeta_1)$. Dies bedeutet, daß h ein Homomorphismus ist.

Zu zeigen bleibt: dann und nur dann ist $h(\zeta) = 0$, wenn ζ von der 1. Art ist.

Erstens: ζ sei Zyklus 1. Art. Dann dürfen wir den rationalen Komplex $\frac{1}{m} C$ in (1) als rationalen Zyklus, also auch den ganzzahligen Komplex C als Zyklus annehmen; dann ist in (2) $z = 0$, also $h(\zeta) = 0$.

Zweitens: es sei $h(\zeta) = 0$. Dann dürfen wir z in (2) als Rand, also $z = \dot{A}$ annehmen, wobei A ein ganzzahliger Komplex ist; dann ist $\dot{C} - m\dot{A} = 0$, also $C - mA = Z$ ein ganzzahliger Zyklus und $\zeta = \mathfrak{r}\left(\frac{1}{m} C\right) = \mathfrak{r}\left(\frac{1}{m} Z + A\right) = \mathfrak{r}\left(\frac{1}{m} Z\right)$; da $\frac{1}{m} Z$ ein rationaler Zyklus ist, ist somit ζ von der 1. Art.

Damit ist alles bewiesen.

§ 3.

Beweis des Konvergenzsatzes.

1. F sei kompakter metrischer Raum, F' eine feste abgeschlossene Teilmenge von F. *Unter* σ-, δ-, *usw. Zyklen* bzw. *unter*

ε- usw. Homologien sind in diesem Paragraphen durchweg Zyklen bzw. Homologien bis auf F' zu verstehen.

Wir beginnen mit folgendem

VERFEINERUNGSSATZ. *Zu jedem ε gibt es ein σ_ε von der Eigenschaft, daß jeder σ_ε-Zyklus (in bezug auf $\mathfrak{R}_1$ als Koeffizientenbereich) bei beliebiger Wahl von σ einem σ-Zyklus ε-homolog ist.*

Beweis. Wir betrachten zuerst irgendeine positive Zahl η und ein $\frac{\eta}{3}$-Netz von F (d.h. eine endliche Teilmenge A von F, die die Eigenschaft hat, daß jeder Punkt von F von mindestens einem Punkte von A eine Entfernung $< \frac{\eta}{3}$ hat). Wir nehmen an, daß dieses Netz A die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Die zu F' gehörenden Punkte von A bilden ein $\frac{\eta}{3}$-Netz A' von F';

2. Die in $F-F'$ gelegenen Punkte von A (d.h. die Punkte von $A-A'$) bilden ein $\frac{\eta}{3}$-Netz von $\overline{F-F'}$.

Jede Teilmenge der Menge A fassen wir dann und nur dann als Eckpunktgerüst eines Simplexes auf, wenn diese Teilmenge einen Durchmesser $< \eta$ hat. Auf diese Weise entsteht ein Komplex $K(A)$, dessen Simplexe kleiner als η sind. Da es uns auf die eine oder andere Wahl des Netzes A nicht ankommt, sondern nur auf das betreffende η, schreiben wir K_η anstatt $K(A)$. Die Simplexe von K_η mit zu F' gehörenden Eckpunkten bilden einen Teilkomplex K'_η von K_η; K'_η ist ein η-Komplex in F'.

Jeden $\frac{\eta}{3}$-Zyklus z (irgendeines Koeffizientenbereiches) bilden wir simplizial auf einen Zyklus von K *bis auf* K' dadurch ab, daß wir jedem Eckpunkt von z einen von ihm weniger als um $\frac{\eta}{3}$ entfernten Punkt von A als Bildpunkt entsprechen lassen, und dabei dafür sorgen, daß Eckpunkte von z, die zu $F-F'$ bzw. zu F' gehören, auf Punkte von $A-A'$ bzw. von A' abgebildet werden. Solch eine Abbildung soll eine *Projektion von z in K* heißen.

Hilfssatz I. Die Aussage des Verfeinerungssatzes ist richtig, wenn man in ihr den Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}_1$ durch $\mathfrak{R}$ ersetzt.

Beweis des Hilfssatzes I. Wir setzen jetzt $\eta = \varepsilon$ und sprechen dementsprechend von K_ε bzw. K'_ε. Für $\delta < \frac{\eta}{3}$ ist jeder δ-Zyklus (des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{R}$) einem Zyklus von K_ε *bis auf* K'_ε ε-homolog. Daraus folgt, daß die Maximalanzahl $p(\delta, \varepsilon)$ der in bezug auf ε-Homologie unabhängigen δ-Zyklen endlich ist. Da

$p(\delta, \varepsilon)$ mit abnehmenden δ nur abnehmen kann, gibt es ein σ_ε derart, daß $p(\delta, \varepsilon) = p(\sigma_\varepsilon, \varepsilon)$ für jedes $\delta < \sigma_\varepsilon$ ist. Es sei jetzt irgendein σ_ε-Zyklus z und ein beliebiges $\sigma < \sigma_\varepsilon$ gegeben. Man wähle die im Sinne der ε-Homologie unabhängigen σ-Zyklen $z_1, \ldots, z_p$, wobei $p = p(\sigma, \varepsilon) = p(\sigma_\varepsilon, \varepsilon)$ ist. Da die z_i erst recht σ_ε-Zyklen sind und es keine $p+1$ im Sinne der ε-Homologie unabhängigen σ_ε-Zyklen gibt, muß z einer Linearkombination der z_i, also einem σ-Zyklus ε-homolog sein, womit Hilfssatz I bewiesen ist [18]).

2. Analog dem im § 2 für den Komplex K eingeführten Begriff nennen wir jetzt einen δ-Zyklus z_1 des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{R}_1$ einen δ-Zyklus 1. Art, wenn er aus einem Zyklus z des Koeffizientenbereiches $\mathfrak{R}$ dadurch entsteht, daß man die Koeffizienten der Simplexe von z durch ihre Restklassen modulo 1 ersetzt. Wir schreiben dann: $z_1 = \mathfrak{r}(z)$.

Aus dem Hilfssatz I folgt unmittelbar der

Hilfssatz II. Zu jedem ε gibt es ein σ_ε von der Eigenschaft, daß jeder σ_ε-Zyklus erster Art bei jedem σ einem σ-Zyklus (ebenfalls erster Art) ε-homolog ist.

Denn ist $z_1 = \mathfrak{r}(z)$ und σ_ε-Zyklus (wobei σ_ε wie im Hilfssatz I definiert ist) und

$$z \underset{\varepsilon}{\sim} z' \quad \text{(in bezug auf } \mathfrak{R}\text{)},$$

so ist auch $z_1 = \mathfrak{r}(z) \underset{\varepsilon}{\sim} \mathfrak{r}(z')$, was — wenn man für z' einen σ-Zyklus wählt — die Behauptung des Hilfssatzes II enthält.

3. Wir können jetzt den Beweis des Verfeinerungssatzes schnell zu Ende führen.

Die Zahl ε sei gegeben. Wir wählen $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon)$ so, daß jeder σ_1-Zyklus erster Art bei jedem $\sigma > \sigma_1$ einem σ-Zyklus ε-homolog ist [19]). Sodann betrachten wir irgendein $\frac{\sigma_1}{3}$-Netz und konstruieren die dazugehörigen Komplexe $K = K_{\sigma_1}$ und $K' = K'_{\sigma_1} \subset K$. Da jeder $\frac{\sigma_1}{3}$-Zyklus z von F mittels Projektion in einen Zyklus von K übergeht, gilt eine Homologie

$$z \underset{\sigma_1}{\sim} z_0, \tag{1}$$

wobei z_0 ein Zyklus in K ist [20]). Er gehört einer der — gemäß

[18]) Vgl. Vietoris [Math. Ann. **97** (1927), 454—472], 464; Lefschetz a.a.O.

[19]) Der Koeffizientenbereich ist jetzt immer $\mathfrak{R}_1$.

[20]) Zyklen und Homologien in K sind *bis auf* K' zu verstehen. Man beachte, daß $K' \subset F'$ ist.

§ 2, Nr. 4, in *endlicher* Anzahl vorhandenen — Klassen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_s$ an, in welche die Gruppe aller Zyklen von K modulo der Untergruppe der Zyklen 1. Art zerfällt. Dabei ist diese Klasse offenbar eindeutig durch z bestimmt; die Menge aller Zyklen z, für welche $z_0 \subset \mathfrak{B}_h$ ist, heiße $\mathfrak{U}_h$, $h = 1, 2, \ldots, s$.

Für jedes $\delta \leqq \frac{\sigma_1}{3}$ bezeichne $\mathfrak{U}_h^\delta$ die — evtl. leere — Menge der in $\mathfrak{U}_h$ enthaltenen δ-Zyklen. Bei abnehmendem δ kann die Menge $\mathfrak{U}_h^\delta$ nie zunehmen; daher gibt es, falls — bei festem h — eine gewisse Menge $\mathfrak{U}_h^\delta$ leer ist, eine solche Zahl δ_h, daß die Mengen $\mathfrak{U}_h^\delta$ für alle $\delta < \delta_h$ leer sind; und da h nur endlich viele Indices durchläuft, gibt es eine Zahl $\sigma_\varepsilon \leqq \frac{\sigma_1}{3}$ mit folgender Eigenschaft: Es seien $1, 2, \ldots, s'$ diejenigen unter den Indices $1, 2, \ldots, s$, für welche die Mengen $\mathfrak{U}_1^{\sigma_\varepsilon}, \ldots, \mathfrak{U}_{s'}^{\sigma_\varepsilon}$ nicht leer sind; dann enthält jede der Mengen $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_{s'}$ σ-Zyklen für jedes beliebig kleine σ.

Jetzt sei z ein σ_ε-Zyklus; er gehöre etwa zu der Menge $\mathfrak{U}_1$. Zu der beliebig kleinen Zahl σ, $\sigma \leqq \sigma_\varepsilon$, gibt es dann in $\mathfrak{U}_1$ einen σ-Zyklus z'; er erfüllt eine Homologie

$$(1') \qquad z' \underset{\sigma_1}{\sim} z_0',$$

und dabei ist z_0' in derselben Klasse $\mathfrak{B}_1$ enthalten wie z_0, es ist also $z_0 - z_0'$ ein Zyklus 1. Art, und zwar ein σ_1-Zyklus. Nach dem Hilfssatz II gibt es daher einen σ-Zyklus z'', so daß

$$(2) \qquad z_0 - z_0' \underset{\varepsilon}{\sim} z''$$

ist. Aus (1), (1'), (2) folgt

$$z - z' \underset{\varepsilon}{\sim} z'',$$

also

$$z \underset{\varepsilon}{\sim} z' + z''.$$

Da z' und z'' beide σ-Zyklen sind, ist damit der Verfeinerungssatz bewiesen.

4. Jetzt kommen wir endlich zu dem Beweis des Konvergenzsatzes.

Beweis. Wir setzen $\delta_0 = \varepsilon$, $\delta_1 = \sigma_\varepsilon$ (dabei ist σ_ε im Sinne des Verfeinerungssatzes definiert) und wählen die positiven Zahlen $\delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_k, \ldots$ so, daß für jedes k die Ungleichungen

$$\delta_{k+1} < \frac{\delta_k}{2}, \qquad \delta_{k+1} < \sigma_{\delta_k}$$

gelten (σ immer im Sinne des Verfeinerungssatzes). Man bezeichne den willkürlich gegebenen σ_ε-Zyklus mit z_1 und nehmen an, daß ein δ_k-Zyklus z_k bereits konstruiert ist. Nach dem Verfeinerungssatz gibt es einen δ_{k+1}-Zyklus z_{k+1}, welcher dem Zyklus z_k δ_{k-1}-homolog ist. Auf diese Weise fortfahrend erhalten wir die Folge

$$z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, \tag{3}$$

wobei z_k ein δ_k-Zyklus und $z_k \underset{\delta_{k-1}}{\sim} z_{k+1}$ ist. Da $\lim \delta_k = 0$ ist, ist (3) ein konvergenter wahrer Zyklus, der dem gegebenen σ_ε-Zyklus z_1 ε-homolog ist.

Moskau und Zürich, Februar 1934.

(Eingegangen den 19. März 1936.)