

COMPOSITIO MATHEMATICA

STEFAN COHN-VOSSEN

**Der approximative Sinussatz für kleine Dreiecke
auf krummen Flächen (Auszug aus einem
Brief an Prof. T. Levi-Civita)**

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 52-54

http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__52_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Der approximative Sinussatz für kleine Dreiecke auf krummen Flächen

(Auszug aus einem Brief an Prof. T. Levi-Civita)

von

Stefan Cohn-Vossen

Leningrad

..... Ihr Theorem ¹⁾ läßt sich ziemlich elementar für ein einzelnes krummliniges kleines Dreieck herleiten, ohne daß dieses Dreieck einer dreifachen Kurvenschar zu entspringen braucht. Man muß zu diesem Zweck vor allem das gegebene Dreieck mit dem geodätischen Dreieck vergleichen, daß dieselben Ecken hat. Man kann dann folgendermaßen schließen:

1. Vorläufig sei die betrachtete Fläche eine euklidische Ebene. Ist dann m die Sehne, l der Bogen zwischen zwei Punkten A, A' einer stetig gekrümmten Kurve, so gilt bekanntlich: $\lim_{A' \rightarrow A} \frac{l-m}{l^2} = 0$.

D.h., ein kleiner Bogen einer solchen Kurve unterscheidet sich von seiner Sehne erst in 3. Ordnung. Ich will dafür (und entsprechend im Folgenden) schreiben: $l \underset{3}{\sim} m$.

2. Ist γ die Krümmung dieser Kurve in A , und w der Winkel, den m in A mit der Kurventangente dieses Punkts bildet, so gilt bekanntlich: $w \underset{2}{\sim} \frac{1}{2}\gamma m$. Da man hier Glieder *erster* Ordnung in γ vernachlässigen darf, können wir in der Formel auch den Wert von γ in einem beliebigen Punkt von l einsetzen.

3. Nun seien A_i ($i = 1, 2, 3$) die Ecken eines kleinen ebenen krummlinigen Dreiecks mit den (stetig gekrümmten) Seiten l_i und den Winkeln α_i ; es sei γ_i die Krümmung von l_i in irgendeinem Punkt von l_i (Vorzeichenbestimmung wie in Ihrer Arbeit). Ferner seien m_i , bzw. β_i die Seiten, bzw. Winkel des *gradlinigen* Dreiecks mit denselben Ecken A_i . Setzen wir dann $\delta_i = \alpha_i - \beta_i$ und reduzieren, wenn nötig, die Indizes mod 3, so gilt wegen 2:

$$2\delta_i \underset{2}{\sim} \gamma_{i+1} m_{i+1} + \gamma_{i+2} m_{i+2}.$$

¹⁾ Compositio math. 1 (1934), 146—150; vgl. auch A. Tonolo: Il teorema dei seni . . . [Atti Acad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19 (1934)].

4. Nach dem elementaren Sinussatz ist die Zahl $m = \frac{m_i}{\sin \beta_i}$ unabhängig von i . Setzen wir nun $v_i = \frac{l_i}{\sin \alpha_i}$, so ist nach 1:

$$v_i \underset{3}{\sim} \frac{m_i}{\sin \alpha_i} = \frac{m_i}{\sin (\beta_i + \delta_i)}.$$

Nach 3 hat δ_i die Ordnung von l_i . Taylorentwicklung ergibt also

$$\frac{1}{\sin (\beta_i + \delta_i)} \underset{2}{\sim} \frac{1}{\sin \beta_i} - \delta_i \frac{\cos \beta_i}{\sin^2 \beta_i} \underset{2}{\sim} \frac{1}{\sin \beta_i} (1 - \delta_i \cotg \alpha_i),$$

mithin

$$(1) \quad v_i \underset{3}{\sim} m(1 - \delta_i \cotg \alpha_i).$$

5. Der Uebergang von (1) zu Ihrer Formel (vorläufig für den Fall ebener kleiner Dreiecke) ist bloße Umformung. Setzt man $\sum_{k=1}^3 \gamma_k \sin \alpha_k = 3\tau$, so ist nach 3: $2\delta_i \underset{2}{\sim} \sum_k \gamma_k m_k - \gamma_i m_i \underset{2}{\sim} m(3\tau - \gamma_i \sin \alpha_i)$. Das in (1) eingesetzt:

$$(2) \quad v_i \underset{3}{\sim} m(1 + mh_i); \quad h_i = -\frac{3}{2}\tau \cotg \alpha_i + \frac{1}{2}\gamma_i \cos \alpha_i.$$

Setzen wir $v_1 + v_2 + v_3 = 3l$, $h_1 + h_2 + h_3 = 3h$, so folgt aus (2): $l \underset{3}{\sim} m(1 + mh)$. Also $m^2 \underset{3}{\sim} l^2$, $m \underset{3}{\sim} l(1 - lh)$. Schließlich durch Einsetzen in (2):

$$(3) \quad v_i \underset{3}{\sim} l(1 + lg_i); \quad g_i = h_i - h = \frac{1}{2}\tau \sum \cotg \alpha_k - \frac{1}{6} \sum \gamma_k \cos \alpha_k - \frac{3}{2}\tau \cotg \alpha_i + \frac{1}{2}\gamma_i \cos \alpha_i.$$

(3) deckt sich mit Ihrer Formel, wenn man zu den Außenwinkeln $\psi_i = \pi - \alpha_i$ übergeht. Dann bleibt τ ungeändert, während \cos und \cotg das Zeichen wechselt.

6. Wir übertragen nun die Betrachtung auf krumme Flächen. Dabei muß nur vorausgesetzt werden, daß die Gaußsche Krümmung an der Stelle O , an der wir operieren, stetig ist. $A_i, l_i, \alpha_i, \beta_i$ mögen jetzt die Ecken, Seiten, Winkel und (geodätischen) Krümmungen des kleinen Dreiecks D bedeuten, das an der betrachteten Stelle der Fläche gegeben ist. Um die Ausdrücke v_i bis (einschließlich) zur 2. Ordnung (in l_i) zu berechnen, haben wir die l_i bis zur 2. Ordnung, die α_i dagegen nur bis zur 1. Ordnung zu berechnen. Da der Integrationsweg des Integrals l_i selbst klein ist, genügt es, den Integranden in l_i bloß bis zur ersten Ordnung zu kennen. Der Fundamentaltensor der Fläche ist also für unsern Zweck hinreichend genau bestimmt durch seine Werte

in O und die Werte seiner *ersten* Ableitungen in O . Das Entsprechende gilt für die Berechnung der geodätischen Krümmungen in nullter Ordnung. Die Gaußsche Krümmung in O hängt aber von den *zweiten* Ableitungen des Fundamentaltensors in O ab. Offenbar können wir also in der Umgebung eines Punktes O' einer euklidischen Ebene solche krummlinige Parameter einführen, daß in diesen Parametern der Fundamentaltensor der Ebene in O' bis zu seinen ersten Ableitungen mit dem uns vorgegebenen Fundamentaltensor in O übereinstimmt. Die Ausdrücke v_i für das Dreieck D stimmen daher überein mit den entsprechenden Ausdrücken für dasjenige *ebene* Dreieck D' an der Stelle O' , das die gleiche Parameterdarstellung wie D hat. Die Krümmungen der Seiten von D' stimmen in nullter Ordnung mit den geodätischen Krümmungen γ_i überein. Somit gilt (3) auf jedem stetig gekrümmten Flächenstück.

7. Nach den in 6 skizzierten Abschätzungen dürfen wir dem in 3–5 herangezogenen gradlinigen Dreieck ein geodätisches Dreieck auf der Fläche entsprechen lassen. Somit besitzt die Formel (2) eine gewisse selbständige Bedeutung: Der Mittelwert m , der dort die analoge Rolle spielt, wie der Mittelwert l in Ihrer Formel (3), bezieht sich auf ein geodätisches Dreieck, d. h. er hängt nur von den *Ecken* des gegebenen kleinen Dreiecks ab, nicht (wie l) auch von den Krümmungen der Seiten.

8. Will man die Berechnung um eine Größenordnung verfeinern, so kann die Methode beibehalten werden, daß man das gegebene Dreieck mit dem zugehörigen geodätischen vergleicht. Eine zu 6 analoge Betrachtung lehrt: Man kann nun nicht mehr vom Wert der Gaußschen Krümmung absehen, aber von der Veränderlichkeit dieser Krümmung; es genügt also, kleine Dreiecke in einer nichteuklidischen (bzw. euklidischen) Ebene passender Krümmung zu betrachten, und hierbei die Längen bis (einschließlich) zur 3. Ordnung, die Winkel bis zur 2. Ordnung und die geodätischen Krümmungen der Seiten bis zur ersten Ordnung zu berechnen.

(Eingegangen den 10. September 1934.)