ERICH ROTHE

Über asymptotische Entwicklungen bei gewissen nichtlinearen Randwertaufgaben

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 310-327
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__310_0>

Über asymptotische Entwicklungen bei gewissen nichtlinearen Randwertaufgaben

von

Erich Rothe
Breslau

Einleitung.

Sei $\mathfrak{B}$ ein im Endlichen liegender ein, zwei- oder drei-dimensionaler Bereich. $a_{ik} = a_{ki}$ seien gegebene reelle Funktionen der Koordinaten x_i und die Form $\sum_{i,k}^{p} {}_1 a_{ik}\xi_i\xi_k$ ($p=1, 2$ oder 3) sei positiv definit in $\mathfrak{B}$. Es wird im folgenden stets die (unter gewissen Voraussetzungen über die a_{ik} und den Bereich $\mathfrak{B}$ bekanntlich erfüllte) Voraussetzung gemacht, daß die am Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ verschwindende Greensche Funktion von

$$(1) \qquad L(v) \equiv \sum_{i,k}^{p} {}_1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)$$

existiere. Wir betrachten Randwertaufgaben der Form

$$(2) \qquad \begin{aligned} L(v) + \lambda f(v) &= \lambda\varphi(s) \text{ in } \mathfrak{B}\,^{1)} \\ v &= 0 \text{ auf } \mathfrak{R}, \end{aligned}$$

wobei f und φ gegebene Funktionen und λ ein negativer Parameter ist, und suchen insbesondere eine asymptotische Entwicklung für die Lösung v für $\lambda \to -\infty$ aufzustellen. Unter Voraussetzung genügender Differenzierbarkeitseigenschaften für f kann man formal den Ansatz

$$(3) \qquad v(s) = a_0(s) + \frac{a_1(s)}{\lambda} + \frac{a_2(s)}{\lambda^2} + \dots$$

[1]) Die Variablen $s, t, \dots$ stehen für Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$. Entsprechend schreiben wir für Integrale über $\mathfrak{B}$ kurz $\int_{\mathfrak{B}} f(t)dt$. Differenzierbarkeit „nach s" bedeute Differenzierbarkeit nach den Koordinaten.

machen und erhält aus (2), indem man f an der Stelle a_0 entwickelt,

$$L\left(a_0+\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2}{\lambda^2}+\dots\right)+ \tag{4}$$

$$+\lambda\left\{f_0+\left(\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2}{\lambda^2}+\dots\right)\frac{f_0'}{1!}+\left(\frac{a_1}{\lambda}+\frac{a_2}{\lambda^2}+\dots\right)^2\frac{f_0''}{2!}+\dots\right\}=\lambda\varphi.$$

Der Index 0 an f und seinen Ableitungen bedeutet hierbei, daß $a_0(s)$ für das Argument v einzusetzen ist. Koeffizientenvergleichung liefert

$$\begin{aligned} &f_0=f(a_0(s))=\varphi(s)\\ &L(a_0)+a_1f_0'=0\\ &L(a_1)+a_2f_0'+\frac{1}{2!}a_1^2f_0''=0\\ &L(a_2)+a_3f_0'+a_1a_2f_0''+\frac{1}{3!}a_1^3f_0'''=0\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{5}$$

Besitzt f eine eindeutige Inverse und ist $f_0'\neq 0$, so erhält man aus diesen Formeln eindeutig die Koeffizienten a_ν von (3) durch Differentiationsprozesse [2]). Die so gebildete Reihe (3) konvergiert im allgemeinen nicht, wie schon im Falle $f(v)\equiv v$ leicht einzusehen ist [3]). Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist nun, zu zeigen, daß in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ die Entwicklung (3) semikonvergent für $\lambda\to-\infty$ ist, d.h., daß dort für die eindeutig bestimmte Lösung v von (2)

$$v(s)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\lambda^{-\nu}+O(\lambda^{-n-1}) \tag{6}$$

gilt, wobei O, wie im folgenden stets, das Landausche Symbol *bezüglich des Grenzüberganges* $\lambda\to-\infty$ bedeutet.

Ferner werden wir, wenn h eine auf $\mathfrak{R}$ gegebene Funktion ist, Randwertaufgaben der Form

$$\begin{aligned} L(v)+\lambda f(v)&=0 \text{ in } \mathfrak{B}\\ v&=h \text{ auf } \mathfrak{R} \end{aligned} \tag{2a}$$

---

[2]) Man beachte, daß bei Berechnung der a_ν von (2) nur die Differentialgleichung, nicht die Randbedingung benutzt wird.

[3]) Vgl. E. Rothe, Über asymptotische Entwicklungen bei Randwertaufgaben elliptischer partieller Differentialgleichungen [Math. Ann. 108 (1933)] (im folgenden zitiert mit A. E.), Anm. 4.

betrachten und zeigen, daß die Lösung v für $\lambda \to -\infty$ in jedem *inneren* Punkte von $\mathfrak{B}$ stärker als jede Potenz von λ^{-1} gegen 0 konvergiert, im Falle $L \equiv \Delta$ sogar stärker als $e^{-K\sqrt{-\lambda}}$ bei passendem, von λ unabhängigen $K > 0$.

Für die Lösung der Randwertaufgabe $L(v) + \lambda f(v) = \lambda\varphi$ in $\mathfrak{B}$; $v = h$ auf $\mathfrak{R}$, die man durch Addition der Lösungen von Aufgaben der Form (2) und (2a) erhält, folgt aus dem Vorstehenden, daß sie asymptotisch von der Randbedingung unabhängig ist (mit einem Fehler, der für jedes $l > 0$ gleich $O(\lambda^{-l})$ ist).

§ 1.

Genauer gesprochen werden wir den folgenden Satz beweisen:

Satz. Ist $\varphi(s)$ in $\mathfrak{B}$ einmal stetig differenzierbar und $f(v)$ in

$$-\alpha \leqq v \leqq \alpha \qquad (\alpha > 0) \tag{7}$$

zweimal stetig differenzierbar, und ist außerdem

$$f(0) = 0, \qquad f'(v) \geqq m > 0 \text{ in } (7), \tag{8}$$

so gilt:

A. Es gibt bei negativem λ zwei von λ unabhängige[4]) positive Zahlen β und γ, so daß, wenn

$$|\varphi| < \beta \tag{9}$$

ist, (2) eine und nur eine stetige Lösung v hat, die der Bedingung

$$|v| \leqq \gamma < \alpha \tag{10}$$

genügt.

B. Sind über die gemachten Voraussetzungen hinaus $\varphi(s)$ und $f(v)$ in $\mathfrak{B}$ $(2n+3)$-mal und die a_{ik} $(2n+2)$-mal nach ihren Argumenten stetig differenzierbar und besteht neben (9) noch

$$|\varphi| < \operatorname{Min}\left(f(\alpha),\ |f(-\alpha)|\right), \tag{9a}$$

so gilt in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ Gl. (6), in welcher die a_ν die durch die Rekursionsformeln (5) (wegen (8) und (9a) gewiß existierenden und durch $|a_0| < \alpha$ eindeutig) bestimmten Funktionen sind.

C. h sei eine auf $\mathfrak{R}$ gegebene stetige Funktion, die im

---

[4]) Daß bei festem λ Zahlen β, γ der angegebenen Eigenschaft existieren, ist bekannt. Vgl. z.B. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen [Berlin, 1931], Kap. 1, § 2.

Innern des Definitionsbereichs (7) von f liegt. Dann gibt es unter den für A über f gemachten Voraussetzungen zwei positive *von λ unabhängige* Zahlen β_1, γ_1, so daß (2a) eine und nur eine stetige Lösung v mit $|v| \leqq \gamma_1$ besitzt, wenn $|h| < \beta_1$ ist. Für diese Lösung gilt in jedem *inneren* Punkte s von $\mathfrak{B}$

$$v(s) = O(\lambda^{-l}) \qquad (\lambda \to -\infty)$$

für jede positive Zahl l. Ist insbesondere L der Laplacesche Operator Δ, so gilt darüber hinaus für negative λ von genügend großem Betrage

$$|v(s)| < e^{-d\sqrt{\frac{-\lambda m}{2}}}$$

für jede positive Zahl d, die kleiner ist als die Entfernung des Randes von s.

Zum Beweise der angeführten Behauptungen bedienen wir uns des folgenden

Hilfssatz I. $\Phi(s, \lambda)$ sei in

$$s \subset \mathfrak{B}, \qquad -\infty < \lambda \leqq \lambda_0 \leqq 0 \tag{11}$$

eine stetige beschränkte und einmal stetig nach s differenzierbare Funktion. $F(u, s, \lambda)$ sei in

$$s \subset \mathfrak{B}, \quad -\alpha' \leqq v \leqq \alpha', \quad -\infty < \lambda \leqq \lambda_0 \leqq 0 \tag{12}$$

stetig; $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial s}$ sollen existieren und ebenso wie F in (12) beschränkt sein.

Ferner sei

$$F(0, s, \lambda) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u} \geqq m' > 0 \text{ in (12).} \tag{13}$$

Dann gibt es zwei *von λ unabhängige*[4]) positive Zahlen β' und γ', so daß die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} L(u) + \lambda F(u, s, \lambda) &= \lambda \Phi(s, \lambda) \text{ in } \mathfrak{B} \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \mathfrak{R} \end{aligned} \tag{14}$$

eine und nur eine stetige der Ungleichung

$$|u| \leqq \gamma' < \alpha' \tag{15}$$

genügende Lösung besitzt, wenn

$$(16) \qquad |\Phi(s, \lambda)| < \beta'$$

ist.

Zusatz. Ist $M(\lambda) = \operatorname{Max} |\Phi|$ für $s \subset \mathfrak{B}$, so gilt für diese Lösung u

$$(17) \qquad |u(s)| < M(\lambda)\, C,$$

worin C eine von λ und Φ unabhängige Konstante ist.

Der Beweis von Hilfssatz I und des Zusatzes wird in § 2 erbracht werden.

Offenbar ist die Behauptung A in Hilfssatz I enthalten. Wir wollen jetzt zeigen, wie aus Hilfssatz I und seinem Zusatz auch die Behauptung B folgt, wenn man zunächst über die bei der Behauptung B angeführten Voraussetzungen hinaus noch die zusätzliche Voraussetzung

(18) „φ und alle Ableitungen bis zur Ordnung $2n$ verschwinden auf $\mathfrak{R}$"

macht. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$(19) \qquad v(s) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + R_n \lambda^{-n-1},$$

wobei v die nach A durch (10) eindeutig bestimmte Lösung von (2) ist. Einsetzen in die Differentialgleichung (2) unter Anwendung des Taylorschen Satzes mit der Lagrangeschen Restformel liefert

$$(20) \qquad \begin{aligned} &L\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + R_n \lambda^{-n-1}\right) + \\ &+ \lambda \left\{ f_0 + \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + R_n \lambda^{-n-1}\right) f_0' + \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + R_n \lambda^{-n-1}\right)^2 \frac{f_0''}{2!} + \ldots + \right. \\ &+ \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + R_n \lambda^{-n-1}\right)^{n-1} \frac{f_0^{(n-1)}}{(n-1)!} + \\ &\left. + \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + R_n \lambda^{-n-1}\right)^{n} \frac{f^{(n)}}{n!}\left(a_0 + \vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + R_n \lambda^{-n-1}\right)\right)\right\} = \\ &= \lambda\varphi \qquad (0 < \vartheta < 1). \end{aligned}$$

Die Definition (5) der a_ν ist nun so, daß die formale Gleichung (4) identisch in λ^{-1} erfüllt ist. Da nun die Koeffizienten von $\lambda^{-\nu}$ in (20) mit denen in (4) für $\nu = -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1$ übereinstimmen, so heben sich diese in (20) heraus und (20) liefert für $u = R_n \lambda^{-n-1}$ eine Differentialgleichung der Form (14) mit

$$
(21)\quad \begin{aligned}
F(u, s, \lambda) = u f_0' &+ \left\{u^2 + 2u \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu}\right\} \frac{f_0''}{2!} + \ldots + \\
&+ \left\{u^{n-1} + \binom{n-1}{1} u^{n-2} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + \ldots \binom{n-1}{n-2} u \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu}\right)^{n-2}\right\} \frac{f_0^{(n-1)}}{(n-1)!} + \\
&+ \left\{u^n + \binom{n}{1} u^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + \ldots + \right. \\
&\left. + \binom{n}{n-1} u \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu}\right)^{n-1}\right\} \frac{f^{(n)}\left(a_0 + \vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + u\right)\right)}{n!}
\end{aligned}
$$

und mit

$$
(22)\quad \Phi(s, \lambda) = P_1 + P_2 \cdot f^{(n)}\left(a_0 + \vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + R_n \lambda^{-n-1}\right)\right) - \lambda^{-n-1} L(a_n),
$$

wobei P_1, P_2 Polynome in $a_1\lambda^{-1}$, $a_2\lambda^{-2}, \ldots, a_n\lambda^{-n}$ sind, in denen keine niedrigere Potenz von λ^{-1} auftritt als die $(n+1)$-te, so daß

$$
(23)\qquad M(\lambda) = \operatorname{Max} |\Phi(s, \lambda)| = O(\lambda^{-n-1})
$$

ist; denn da a_0 und v im Intervall (7) liegen, gilt auf Grund von (19) das Gleiche von dem Argument von $f^{(n)}$ in (22), und $f^{(n)}$ ist daher nach Voraussetzung beschränkt für $\lambda \to -\infty$. Auf Grund der zusätzlichen Voraussetzung (18) in Verbindung mit (5) und (8) sieht man nun leicht ein, daß $a_0, a_1, \ldots, a_n$ auf $\mathfrak{R}$ verschwinden. Da nach (2) das Gleiche von v gilt, gilt es wegen (19) auch von R_n, so daß $u = R_n \lambda^{-n-1}$ nicht nur die Differentialgleichung, sondern auch die Randbedingung (14) befriedigt. Nun sind die Voraussetzungen von Hilfssatz I erfüllt: in der Tat sieht man leicht ein, daß die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen bezüglich F und Φ erfüllt sind. Nach (21) besteht auch die erste der Bedingungen (13). Was die zweite Bedingung (13) angeht, so beachte man, daß nach (21)

$$
(24)\quad \begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u} &= f_0' + \frac{u}{1!} f_0'' + \ldots + \frac{u^{n-2}}{(n-2)!} f_0^{(n-1)} + \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}\left(a_0 + \vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + u\right)\right) + \\
&+ \frac{u^n}{n!} \frac{d}{du} f^{(n)}\left(a_0 + \vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + u\right)\right) + \\
&\qquad + Q_1(u) + Q_2(u) f^{(n)}\left(a_0 + \vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + u\right)\right) + \\
&+ Q_3(u) \frac{d}{du} f^{(n)}\left(a_0 + \vartheta\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + u\right)\right)
\end{aligned}
$$

ist, wo $Q_1(u)$, $Q_2(u)$, $Q_3(u)$ Polynome in u sind, deren Koeffizienten $O(\lambda^{-1})$ sind. Da nun $|a_0| < \alpha$ ist, so ist nach (8) $f_0' \geqq m > 0$ und aus (24) folgt, daß man drei Konstanten m', α' und λ_0 mit $0 < \alpha' < \alpha$, $0 < m' < m$ und $\lambda_0 < 0$ so wählen kann, daß $\dfrac{\partial F}{\partial u} \geqq m'$ ist für $|u| \leqq \alpha'$ und $\lambda < \lambda_0$. Da somit alle Voraussetzungen von Hilfssatz I erfüllt sind, gibt es nach diesem nach passender Wahl der positiven Zahlen β', γ' eine und nur eine der Ungleichung (15) genügende stetige Lösung $u = u_0$ der Randwertaufgabe (14), denn — nach eventueller Vergrößerung von $|\lambda_0|$ — ist wegen (23) die Ungleichung (16) für $\lambda < \lambda_0$ gewiß erfüllt. Nach dem Zusatz in Verbindung mit (23) folgt für diese

$$u_0 = O(\lambda^{-n-1}). \tag{25}$$

Nach (19) ist also (6) bewiesen, wenn gezeigt ist, daß für negative λ von genügend großem Betrage $R\lambda^{-n-1} \equiv u_0$ ist. Um für solche λ die Identität dieser beiden Lösungen der Randwertaufgabe (14) zu beweisen, genügt es auf Grund der Eindeutigkeitsaussage des Hilfssatz I zu beweisen, daß gleichmäßig in s

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (R_n \lambda^{-n-1}) = 0 \tag{26}$$

ist, denn dann genügen sowohl u_0 wie $R_n \lambda^{-n-1}$ der Ungleichung (15) für negative λ genügend großen Betrages. Zum Beweise von (26) beachte man, daß nach (19) gleichmäßig in s

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (v - a_0 - R_n \lambda^{-n-1}) = 0$$

ist. Es genügt daher,

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (v - a_0) = 0 \quad \text{(gleichmäßig in } s) \tag{27}$$

zu beweisen. Zu diesem Zweck ziehen wir $L(a_0)$ von (2) ab. Beachtet man, daß nach (5) $\varphi = f(a_0)$ ist, und daß auf Grund der zusätzlichen Voraussetzung (18) φ und somit a_0 auf $\mathfrak{R}$ verschwindet, so ergibt sich

$$L(v - a_0) + \lambda\{f(v) - f(a_0)\} = -L(a_0) \text{ in } \mathfrak{B},$$
$$v - a_0 = 0 \text{ auf } \mathfrak{R}.$$

Setzt man

$$\frac{f(v(s)) - f(a_0(s))}{v(s) - a_0(s)} = f'(a_0 + \vartheta(v - a_0)) = \varrho(s, \lambda) \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

so ist wegen (8)

$$(28) \qquad 0 < m \leqq \varrho,$$

und wir können schreiben

$$L(v-a_0) + \lambda(v-a_0)\varrho = -L(a_0) \text{ in } \mathfrak{B},$$
$$v - a_0 = 0 \text{ auf } \mathfrak{R}.$$

Die Lösung dieser linearen Randwertaufgabe ist

$$(29) \qquad v(s) - a_0(s) = \int_{\mathfrak{B}} L(a_0(t))\, \mathfrak{G}(s, t, \lambda) dt,$$

wenn $\mathfrak{G}(s, t, \lambda)$ die zu dem Differentialausdruck $L(w) + \lambda\varrho w$ gehörige am Rande $\mathfrak{R}$ verschwindende Greensche Funktion ist. Für diese gilt nun [5])

$$(30) \qquad 0 \leqq -\lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho^{(t,\lambda)} \mathfrak{G}(s, t, \lambda) \leqq 1 \qquad \begin{matrix}(\lambda < 0)\\ (s \subset \mathfrak{B}).\end{matrix}$$

Daher folgt aus (29) im Verein mit (28): $|v - a_0| \leqq \operatorname{Max} |L(a_0)| / |\lambda| m$ für negative λ und somit (27).

Hiermit ist (6) unter der zusätzlichen Voraussetzung (18) bewiesen, und wir haben uns nunmehr von dieser zu befreien. Sei $s = s_0$ derjenige innere Punkt von $\mathfrak{B}$, für den wir (6) beweisen wollen, und k_η die Kugel (Kreis, Intervall) mit Mittelpunkt s_0 und Radius η, wobei η so klein ist, daß k_η noch ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt. Wir wollen nun eine Hilfsfunktion $\widetilde{\varphi}$ konstruieren, die in k_η mit φ übereinstimmt und in ganz $\mathfrak{B}$ die Voraussetzungen von B und die zusätzliche Voraussetzung (18) erfüllt. Eine solche Funktion können wir folgendermaßen herstellen: ist r der Abstand des Punktes s_0 von dem variablen Punkt s und $\delta > \eta$ so klein, daß k_δ noch ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegt, so sei $P(r)$ das durch die Bedingungen

$$(31) \qquad P(\eta) = 1 \qquad P(\delta) = 0$$
$$\frac{dP}{dr} = \frac{d^2P}{dr^2} = \ldots = \frac{d^{(2n+3)}P}{dr^{2n+3}} = 0 \quad \text{für } r = \eta \text{ und } r = \delta$$

eindeutig bestimmte Polynom höchstens vom Grade $4n + 6$. Dann erfüllt

---

[5]) Siehe E. Rothe, Über die Approximation stetiger Funktionen durch Eigenfunktionen elliptischer Differentialgleichungen [Sitzungsberichte Berl. Math. Ges. 28 (1929)], Gl. (10). (Um Übereinstimmung mit der in der vorliegenden Arbeit benutzten Bezeichnungsweise zu erzielen, ist dort λ durch $-\lambda$ zu ersetzen.) ϱ hängt dort nicht von λ ab, doch sieht man daß unter der Voraussetzung (28) der dort gegebene Beweis auch bei Abhängigkeit von λ seine Gültigkeit behält.

$$
(32) \qquad \tilde{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi(s) & r \leqq \eta \\ \varphi(s)P(r) & \eta < r \leqq \delta \\ 0 & \delta < r \end{cases}
$$

offenbar alle gestellten Forderungen[6]). Überdies genügt $\tilde{\varphi}$ der sogleich zu benutzenden Ungleichung

$$
(33) \qquad |\tilde{\varphi}| \leqq \varphi.
$$

Wäre in der Tat (33) nicht richtig, so müßte auf Grund der Definition von $\tilde{\varphi}$ in mindestens einem inneren Punkte des Intervalles $J: \eta \leqq r \leqq \delta$ die Ungleichung $|P(r)| > 1$ gelten. Wegen $P(\eta) = 1$, $P(\delta) = 0$ hätte daher $P(r)$ in mindestens einem inneren Punkte r_0 von J ein positives Maximum oder negatives Minimum, es müßte also $P'(r_0) = 0$ sein. Da nach (31) $P'(\eta) = P'(\delta) = 0$ ist, so hätte $P'(r)$ in dem abgeschlossenen Intervall J mindestens drei Nullstellen und daher $P''(r)$ mindestens zwei Nullstellen im Innern von J, also, da nach (29) $P''(\eta) = P''(\delta) = 0$ ist, mindestens vier im abgeschlossenen Intervall J. So weiterschließend erkennt man, daß $P^{(2n+3)}$ mindestens $2n + 5$ Nullstellen haben müßte. Also müßte $P^{(2n+3)}$ identisch verschwinden, da es ein Polynom höchstens vom Grade $4n + 6 - (2n+3) = 2n + 3$ ist, und P wäre höchstens vom Grade $2n + 2$. Hieraus wieder würde $P \equiv 0$ folgen, da ja nach (29) P und seine Ableitungen bis zur $(2n + 3)$-ten für $r = \delta$ verschwinden. $P \equiv 0$ steht aber im Widerspruch dazu, daß nach (31) $P(\eta) = 1$ ist[7]).

Haben nun die Konstanten α, β, γ die in Behauptung A angegebene Bedeutung bezüglich der Randwertaufgabe (2), so haben sie wegen (33) die gleiche Bedeutung bezüglich der Randwertaufgabe

$$
(34) \qquad L(\tilde{v}) + \lambda f(\tilde{v}) = \lambda \tilde{\varphi} \quad \text{in } \mathfrak{B}, \qquad \tilde{v} = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{R}.
$$

v, $\tilde{v}$ seien also die eindeutig bestimmten Lösungen von (2) bzw. (34), die dem Betrage nach $\leqq \gamma$ sind. Nun genügt $\tilde{\varphi}$ der zusätzlichen Voraussetzung (18). Erfüllt daher φ, also auch $\tilde{\varphi}$ neben (9)

---

[6]) Die gleiche Hilfsfunktion wurde bereits in A. E., 587 benutzt, jedoch ohne Ungl. (33).

[7]) Es ist bewiesen $|P(r)| \leqq 1$ in J. Ebenso sieht man $P(r) \geqq 0$ in J ein: andernfalls müßte nämlich wegen $P(\eta) = 1$, $P(\delta) = 0$ das Polynom $P(r)$ im Innern von J ein negatives Minimum haben, und es müßte P' in mindestens einem inneren Punkte r_0 von J verschwinden, was, wie im Text gezeigt ist, zu einem Widerspruch führt. Es gilt also in J die später zu benutzende Ungleichung $0 \leqq P(r) \leqq 1$.

noch (9a), so gilt nach dem schon Bewiesenen:

$$\tilde{v} = \sum_{\nu=0}^{n} \tilde{a}_\nu \lambda^{-\nu} + O(\lambda^{-n-1}),$$

wobei $\tilde{a}_\nu$ die durch die Rekursion (5) definierten Funktionen sind, wenn man in dieser φ durch $\tilde{\varphi}$ ersetzt. In k_η ist aber $\varphi = \tilde{\varphi}$ also auch $a_\nu = \tilde{a}_\nu$. Daher gilt

$$\tilde{v} = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \lambda^{-\nu} + O(\lambda^{-n-1}) \quad \text{in } k_\eta.$$

Für den Mittelpunkt s_0 von k_η ist also (6) gewiß bewiesen, wenn wir

$$v(s_0) - \tilde{v}(s_0) = O(\lambda^{-n-1}) \tag{35}$$

zeigen können. Zu diesem Zweck ziehen wir (34) von (2) ab:

$$L(v-\tilde{v}) + \lambda(f(v)-f(\tilde{v})) = \lambda(\varphi-\tilde{\varphi}) \quad \text{in } \mathfrak{B},$$
$$v - \tilde{v} = 0 \qquad \text{auf } \mathfrak{R}.$$

Da nun nach Voraussetzung f gewiß 2-mal stetig in (7) differenzierbar ist, und v und $\tilde{v}$ in diesem Intervalle liegen, so ist die Funktion $(f(v)-f(\tilde{v}))\,/\,(v-\tilde{v})$ gewiß einmal stetig nach v und $\tilde{v}$ differenzierbar; außerdem ist sie wegen (8) $\geqq m$. Da ferner v und $\tilde{v}$ stetige erste Ableitungen nach s haben, so gilt das Gleiche von der Funktion

$$\varrho(s, \lambda) = \frac{f(v(s)) - f(\tilde{v}(s))}{v(s) - \tilde{v}(s)}.$$

Außerdem ist

$$M \geqq \varrho(s, \lambda) \geqq m > 0, \tag{36}$$

worin M eine von λ unabhängige Konstante bedeutet, und $w = v - \tilde{v}$ genügt der linearen Randwertaufgabe

$$L(w) + \lambda\varrho(s, \lambda) w = \lambda(\varphi-\tilde{\varphi}) \quad \text{in } \mathfrak{B},$$
$$w = 0 \qquad \text{auf } \mathfrak{R},$$

deren Lösung unter Beachtung von $\varphi = \tilde{\varphi}$ in k_η lautet:

$$w = -\lambda \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(s, t, \lambda)(\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t))\,dt =$$
$$= -\lambda \int_{\mathfrak{B}-k_\eta} \varrho(t, \lambda)\, \mathfrak{G}(s, t, \lambda) \frac{\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)}{\varrho(t, \lambda)}\, dt.$$

Da ϱ und $\mathfrak{G}$ nicht negativ sind, folgt hieraus wegen (9), (33) und (36)

$$|v-\bar{v}| = |w| < \frac{2\beta}{m}(-\lambda)\int\limits_{\mathfrak{B}-k_\eta} \varrho(t,\lambda)\, \mathfrak{G}(s,t,\lambda)dt.$$

Hieraus ergibt sich (35) und damit die Behauptung (6) auf Grund des folgenden Hilfssatzes, den wir nebst seinem Zusatz in § 2 beweisen werden:

Hilfssatz II. Ist $\varrho(s,\lambda)$ eine einmal stetig nach s differenzierbare der Ungleichung (36) genügende Funktion und $\mathfrak{G}$ die zu $L(w)+\lambda\varrho w$ gehörige am Rande von $\mathfrak{B}$ verschwindende Greensche Funktion, ist ferner $\mathfrak{B}'$ ein Teilbereich von $\mathfrak{B}$ und s_0 ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}'$, so gilt für jede positive Zahl l

$$\int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'} \varrho(t,\lambda)\, \mathfrak{G}(s_0,t,\lambda)dt = O(\lambda^{-l}).$$

Zusatz. Ist $L \equiv \Delta$, so gilt für negative λ genügend großen Betrages

$$0 \leqq \int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'} \varrho(t,\lambda)\, \mathfrak{G}(s_0,t,\lambda)dt \leqq C''|\lambda|^{\frac{1+p}{4}} e^{-\eta\sqrt{\frac{-\lambda m}{2}}},$$

worin C'' eine von λ unabhängige positive Konstante, p die Dimensionszahl (1, 2 oder 3) des Bereiches $\mathfrak{B}$ und η die Minimalentfernung des im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}'$ gelegenen Punktes s_0 von dessen Rand ist.

Wir gehen nunmehr zum Beweis der Behauptung C über. Die Existenz zweier Zahlen β_1, γ_1 von der behaupteten Eigenschaft folgt sofort aus A, wenn man beachtet, daß $w = v - \psi$ der Randwertaufgabe $L(w) + \lambda\{f(w+\psi) - f(\psi)\} = -\lambda f(\psi)$ in $\mathfrak{B}$, $w = 0$ auf $\mathfrak{R}$ genügt, wenn ψ die Lösung von $L(\psi) = 0$ mit den Randwerten h ist. Man hat nur neben $f(0) = 0$ zu beachten, daß $|\psi|$ sein Maximum nicht im Innern von $\mathfrak{B}$ annehmen kann und daher jede Schranke für $|h|$ eine Schranke für $|\psi|$ ist. Ist weiter s_0 derjenige innere von $\mathfrak{R}$ um mindestens $\delta > d$ entfernte Punkt von $\mathfrak{B}$, für den der übrige Teil von C bewiesen werden soll, so sei k_η die noch ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ liegende Kugel (Kreis, Intervall) mit Mittelpunkt s_0 und Radius η mit $d < \eta < \delta$. Sei $\bar{\psi}$ eine zweimal stetig differenzierbare am Rande verschwindende Funktion, die in k_η mit ψ übereinstimmt, und für die außerdem $|\psi - \bar{\psi}| \leqq |\psi|$ gilt [8]). Da nun die Randwerte h nach Vor-

[8]) Die Konstruktion einer solchen Funktion kann wie auf S. [8], 317 f. geleistet werden. Daß dabei auch $|\psi - \bar{\psi}| \leqq \psi$ erfüllt ist, folgt aus der in Anm. [7]) bewiesenen Ungleichung $0 \leqq P(r) \leqq 1$.

aussetzung im Definitionsbereich (7) von f liegen, so gilt das Gleiche von ψ und daher auch von $\psi - \widetilde{\psi}$ und wir können $f(\psi-\widetilde{\psi})$ bilden. Ziehen wir nun $L(\psi-\widetilde{\psi})+\lambda f(\psi-\widetilde{\psi})$ von (2a) ab, so erhalten wir wegen $L(\psi)=0$

$$L(v+\widetilde{\psi}-\psi)+\lambda\{f(v)-f(\psi-\widetilde{\psi})\}=L(\widetilde{\psi})-\lambda f(\psi-\widetilde{\psi}) \text{ in } \mathfrak{B},$$
$$v+\widetilde{\psi}-\psi=0 \qquad \text{auf } \mathfrak{R},$$

oder

$$L(v+\widetilde{\psi}-\psi)+\lambda\varrho(s,\lambda)(v+\widetilde{\psi}-\psi)=L(\widetilde{\psi})-\lambda f(\psi-\widetilde{\psi}) \text{ in } \mathfrak{B}, \tag{37}$$
$$v+\widetilde{\psi}-\psi=0 \qquad \text{auf } \mathfrak{R},$$

wenn wir unter $\varrho(s,\lambda)$ diejenige Funktion verstehen, die aus $\dfrac{f(v)-f(\psi-\widetilde{\psi})}{v-(\psi-\widetilde{\psi})}=f'\{\psi-\widetilde{\psi}+\vartheta(v+\widetilde{\psi}-\psi)\}$ $[0<\vartheta<1]$ entsteht, wenn für v, ψ, $\widetilde{\psi}$ die betreffenden Funktionen von s und λ eingesetzt werden. Da hierbei das Argument von f' in (7) liegt, so erfüllt ϱ nach (8) die Voraussetzung (36) für Hilfssatz II. Aus (37) folgt nun

$$v+\widetilde{\psi}-\psi=-\int_{\mathfrak{B}}\{L(\widetilde{\psi})-\lambda f(\psi-\widetilde{\psi})\}\,\mathfrak{G}(s,t,\lambda)dt,$$

also, da in k_η $\widetilde{\psi}=\psi$ und daher auch $L(\widetilde{\psi})=L(\psi)=0$ ist, insbesondere für $s=s_0$

$$|v(s_0)|=\left|\int_{\mathfrak{B}-k\eta}\{L(\widetilde{\psi})-\lambda f(\psi-\widetilde{\psi})\}\,\mathfrak{G}(s,t,\lambda)\,dt\right|\leqq$$
$$\leqq\frac{|L(\widetilde{\psi})|+|\lambda|\operatorname*{Max}_{|v|\leqq\alpha}|f(v)|}{m}\int_{\mathfrak{B}-k\eta}\varrho(t,\lambda)\,\mathfrak{G}(s_0,t,\lambda)\,dt$$

Anwendung von Hilfssatz II bzw. unter Beachtung von $d<\eta$ seines Zusatzes liefert die Behauptung C.

§ 2.

Beweis von Hilfssatz I. Es ist wegen $F(0,s,\lambda)=0$

$$F(u,s,\lambda)=\varrho(s,\lambda)\{u+u^2F_2(u,s,\lambda)\}, \tag{38}$$

wenn

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{u=0}=\varrho(s,\lambda),$$
$$\frac{1}{2!\varrho}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(\vartheta u,s,\lambda)=F_2(u,s,\lambda)\quad(0<\vartheta<1) \tag{39}$$

gesetzt ist. Ist wieder $\mathfrak{G}$ die am Rande von $\mathfrak{B}$ verschwindende Greensche Funktion von $L(u)+\lambda\varrho u$, so genügt bekanntlich jede stetige Lösung von (14) wegen (38) der Integralgleichung

$$(40)\qquad u(s) = -\lambda\int\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(s,t,\lambda)\,\Phi(t,\lambda)dt + \\ +\lambda\int\limits_{\mathfrak{B}} \varrho(t,\lambda)\,\mathfrak{G}(s,t,\lambda)u^2(t)\,F_2\big(u(t),t,\lambda\big)dt,$$

und umgekehrt ist jede einmal stetig differenzierbare Lösung von (40) eine Lösung von (14). Setzen wir der Abkürzung halber

$$(41)\qquad \begin{aligned} -\lambda\int\limits_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(s,t,\lambda)\,\Phi(t,\lambda)dt &= u_1 \\ \lambda\int\limits_{\mathfrak{B}} \varrho(t,\lambda)\,\mathfrak{G}(s,t,\lambda)u^2(t)\,F_2\big(u(t),t,\lambda\big)dt &= \mathfrak{U}(u), \end{aligned}$$

so lautet (40)

$$(42)\qquad u = u_1 + \mathfrak{U}(u).$$

$\mathfrak{U}(u)$ ist definiert in

$$(43)\qquad -\alpha' \leqq u \leqq \alpha'.$$

Um nun (42) durch sukzessive Approximationen zu lösen, behaupten wir zunächst, daß wir Funktionen $u_2, u_3, \ldots$, die alle der Ungleichung (43) genügen, durch die Rekursion

$$(44)\qquad u_k = u_1 + \mathfrak{U}(u_{k-1}) \qquad (k=2,3,\ldots)$$

erhalten, wenn (16) erfüllt ist, wobei die in dieser Ungleichung auftretende von λ unabhängige positive Zahl β' folgendermaßen bestimmt ist: auf Grund der über F gemachten Voraussetzungen ist F_2 in (12) beschränkt. A sei eine obere Schranke für $|F_2|$. Dann sei B eine der Ungleichung

$$(45)\qquad 0 < B < \frac{1}{4A}$$

genügende Zahl. Die beiden Wurzeln $\gamma' = (1\pm\sqrt{1-4BA})/2A$ der Gleichung [9])

$$(46)\qquad \gamma' = A\gamma'^2 + B$$

sind dann positiv, und die kleinere von ihnen konvergiert mit B gegen Null. Wir können daher B so klein wählen, daß außer (45) auch

---

[9]) Vgl. die in Anm. [4]) angegebene Stelle des Buches von Lichtenstein.

$$(47) \qquad 0 < \gamma' < \alpha'$$

gilt, wobei γ' wie auch stets im folgenden die kleinere der beiden Wurzeln von (46) bezeichnet. Ist ferner A_2 eine obere Schranke für den Betrag der zweiten Ableitung von F nach u, so können wir B so wählen, daß außerdem noch

$$(48) \qquad q = \frac{\gamma' A_2}{m} < 1.$$

ist. β' sei dann eine der Ungleichung

$$(49) \qquad 0 < \beta' < Bm$$

genügende Zahl.

Um nun unsere Behauptung bezüglich der u_k zu beweisen, beachten wir, daß aus (41,) (30) im Verein mit (39), (13), (16) und (49)

$$(50\text{a}) \qquad |u_1| < \frac{M(\lambda)}{\operatorname{Min} \varrho} < \frac{\beta'}{m} < B \qquad (M(\lambda) = \operatorname{Max} |\Phi|)$$

$$(50\text{b}) \qquad |\mathfrak{U}(u)| < \operatorname{Max} |u^2 F_2| < A \operatorname{Max} u^2$$

folgt, und daß es wegen (47) genügt

$$(51) \qquad |u_k| < \gamma'$$

zu beweisen. Nun ist nach (50a) und (46)

$$|u_1| < B < B + A\gamma'^2 = \gamma',$$

so daß (51) richtig ist für $k = 1$. Unter Annahme der Gültigkeit von (51) für $k - 1$ erhalten wir nach (44) und (50a, b)

$$|u_k| \leqq |u_1| + |\mathfrak{U}(u_{k-1})| < B + A \operatorname{Max} u_{k-1}^2 < B + A\gamma'^2 = \gamma',$$

womit (51) allgemein bewiesen ist.

Um nunmehr zu zeigen, daß die Folge der u_k gleichmäßig in (11) konvergiert, bilden wir $u_{k+1} - u_k$ und erhalten nach (44), (41), (38) und (39)

$$\begin{aligned}
(52) \quad u_{k+1} - u_k &= \mathfrak{U}(u_k) - \mathfrak{U}(u_{k-1}) = \\
&= \lambda \int_{\mathfrak{B}} \varrho(t, \lambda) \mathfrak{G}(s, t, \lambda) [u_k^2(t) F_2(u_k(t), t, \lambda) - \\
&\qquad\qquad - u_{k-1}^2(t) F_2(u_{k-1}(t), t, \lambda)]\, dt = \\
&= \lambda \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(s, t, \lambda) [F(u_k(t), t, \lambda) - F(u_{k-1}(t), t, \lambda) - \\
&\qquad\qquad - \varrho(t, \lambda)\,(u_k(t) - u_{k-1}(t))]\, dt = \\
&= \lambda \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(s, t, \lambda) [u_k(t) - u_{k-1}(t)] \left[\frac{\partial F(u^*, t, \lambda)}{\partial u} - \varrho(t, \lambda)\right] dt \\
&\qquad\qquad (u^* = u_{k-1} + \vartheta^*(u_k - u_{k-1});\ 0 < \vartheta^* < 1),
\end{aligned}$$

also wegen (39)

$$u_{k+1} - u_k = \lambda \int_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}(s, t, \lambda) \, [u_k(t) - u_{k-1}(t)] \, u^*(t) \frac{\partial^2 F(u^{**}, t, \lambda)}{\partial u^2} dt$$

$$(u^{**} = \vartheta^{**} u^*; \; 0 < \vartheta^{**} < 1);$$

daher ist nach (30), da A_2 eine obere Schranke für $\left|\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right|$ ist, und da wegen (51) $u^* < \gamma'$ ist,

$$|u_{k+1} - u_k| < \frac{\gamma' A_2}{m} \operatorname{Max} |u_k - u_{k-1}|,$$

also nach (48)

(53) $\operatorname{Max} |u_{k+1} - u_k| < q \operatorname{Max} |u_k - u_{k-1}| < q^{k-1} \operatorname{Max} |u_2 - u_1|$.

Hieraus folgt nach (44) und (50)

$$\operatorname{Max} |u_{k+1} - u_k| < q^{k-1} \operatorname{Max} |\mathfrak{U}(u_1)| < A q^{k-1} \operatorname{Max} u_1^2 < A B^2 q^{k-1}.$$

Hiermit ist wegen $0 < q < 1$ die gleichmäßige Konvergenz der u_k bewiesen. Die Grenzfunktion u ist offenbar eine stetige Lösung von (40). Um zu zeigen, daß u auch Lösung von (14) ist, genügt es, die stetige Differenzierbarkeit nach s des Faktors von $\mathfrak{G}$ in (40) zu erweisen. Aus (40) folgt zunächst, daß u nach s differenzierbar ist. Daher ist auch

$$\varrho F_2 u^2 = F - \varrho u$$

nach s differenzierbar, wenn $u(s)$ für das Argument u eingesetzt wird. Da Φ ebenfalls nach s differenzierbar ist, ist der Beweis erbracht. Wegen (51) und (47) gilt für die gefundene Lösung u die behauptete Ungleichung (15).

Nunmehr ist der Eindeutigkeitsbeweis zu erbringen. Sei $\bar{u}$ eine stetige der Ungl. (15) genügende Lösung von (14). Es ist $\bar{u} \equiv u$ zu beweisen. $\bar{u}$ genügt auch der Integralgleichung (42). Auf Grund von (44) ist daher

$$\bar{u} - u_k = \mathfrak{U}(\bar{u}) - \mathfrak{U}(u_{k-1}).$$

Aus dieser Gleichung folgt nun $\operatorname{Max} |\bar{u} - u_k| < q^{k-1} \operatorname{Max} |\bar{u} - u_1|$ genau so, wie (53) aus (52) folgt. Also ist wegen $|\bar{u} - u_1| < |\bar{u}| + |u_1| \leqq 2\gamma'$ und $0 < q < 1$, wie behauptet, $u = \lim_{k \to \infty} u_k \equiv \bar{u}$.

Beweis des Zusatzes zu Hilfssatz I. Wir setzen $\frac{M(\lambda)}{\operatorname{Min} \varrho} = \widetilde{B}$ und betrachten die quadratische Gleichung

(54) $$\widetilde{\gamma} = A \widetilde{\gamma}^2 + \widetilde{B},$$

deren Wurzeln wegen (50a) und (45) reell und positiv sind, und behaupten $|u_k| < \bar{\gamma}$. Das ist nach (50a) richtig für $k=1$. Denn

$$|u_1| < \bar{B} < \bar{B} + A\bar{\gamma}^2 = \bar{\gamma}.$$

Unter Annahme der Richtigkeit für $k-1$ folgt unter Benutzung von (50b)

$$|u_k| \leqq |u_1| + |\mathfrak{U}(u_{k-1})| \leqq \bar{B} + A \operatorname{Max} u_{k-1}^2 < \bar{B} + A\bar{\gamma}^2 = \bar{\gamma}.$$

Also ist in der Tat $|u_k| < \bar{\gamma}$ und daher

$$|u| = \lim_{k\to\infty} |u_k| \leqq \bar{\gamma}. \tag{55}$$

Für die kleinere der beiden Wurzeln von (54) gilt

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2A}\left(1-\sqrt{1-4\bar{B}A}\right) = \frac{\bar{B}}{\sqrt{1-\vartheta 4\bar{B}A}} \qquad (0<\vartheta<1).$$

Wegen $\bar{B} < B$ folgt

$$0 < \bar{\gamma} < \frac{\bar{B}}{\sqrt{1-4BA}} \leqq M(\lambda)\frac{1}{m\sqrt{1-4BA}}.$$

Wegen (55) ist hiermit (17) mit $C = 1 / \left(m\sqrt{1-4BA}\right)$ bewiesen.

Beweis von Hilfssatz II. Ist $U(s)$ die Lösung der Randwertaufgabe

$$L(U) + \lambda\varrho(s,\lambda)\,U = \begin{cases} 0 \text{ in } \mathfrak{B}' \\ \lambda\varrho(s,\lambda) \text{ in } \mathfrak{B}-\mathfrak{B}', \end{cases} \tag{56}$$
$$U = 0 \text{ auf } \mathfrak{R},$$

so ist

$$U(s) = -\lambda \int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'} \varrho(t,\lambda)\,\mathfrak{G}(s,t,\lambda)\,dt, \tag{57}$$

und es ist also $U(s_0) = O(\lambda^{-l+1})$ zu beweisen. Wir vergleichen zu diesem Zweck $U(s)$ mit der Lösung $V(s)$ der Randwertaufgabe

$$L(V) + \lambda m V = \begin{cases} 0 \text{ in } \mathfrak{B}' \\ \lambda m \text{ in } \mathfrak{B}-\mathfrak{B}', \end{cases} \tag{58}$$
$$V = 0 \text{ auf } \mathfrak{R},$$

welche in der Form

$$V(s) = -\lambda m \int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'} \bar{\mathfrak{G}}(s,t,m\lambda)\,dt \tag{59}$$

geschrieben werden kann, wenn $\bar{\mathfrak{G}}(s,t,\mu)$ die am Rande von $\mathfrak{B}$

verschwindende zu $L(w)+\mu w$ gehörige Greensche Funktion bedeutet. Subtraktion von (56) von (58) liefert

$$L(V-U)+\lambda m(V-U)=\begin{cases}\lambda U(\varrho-m) \text{ in } \mathfrak{B}' \\ \lambda(m-\varrho)(1-U) \text{ in } \mathfrak{B}-\mathfrak{B}',\end{cases}$$

$$V-U=0 \qquad \text{auf } \mathfrak{R}.$$

Daraus folgt

$$(60)\quad \begin{aligned} V-U= & -\lambda\int\limits_{\mathfrak{B}'}\breve{\mathfrak{G}}(s,t,m\lambda)\,U(t)\{\varrho(t,\lambda)-m\}\,dt \\ & -\lambda\int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'}\breve{\mathfrak{G}}(s,t,m\lambda)\,\{m-\varrho(t,\lambda)\}\{1-U(t)\}\,dt. \end{aligned}$$

Bei negativem λ ist nun der erste Summand auf der rechten Seite von (60) nicht negativ, wie aus (36) und (57) im Verein mit $\breve{\mathfrak{G}}\geqq 0$ und folgt. Der zweite Summand ist aber $O(\lambda^{-l+1})$ für $s=s_0$. Denn nach (36), (57) und (30) ist $(m-\varrho)(1-U)$ gewiß beschränkt für $\lambda\to-\infty$ und anderseits gilt nach A. E., 591, Hilfssatz VII

$$(61)\qquad \int\limits_{\mathfrak{B}-\mathfrak{B}'}\breve{\mathfrak{G}}(s_0,t,m\lambda)dt=O((m\lambda)^{-l})=O(\lambda^{-l}).$$

Daher folgt aus (60)

$$U(s_0)\leqq V(s_0)+O(\lambda^{-l+1}).$$

Da aber nach (59) und (61) auch $V(s_0)=O(\lambda^{-l+1})$ ist, so folgt unter Berücksichtigung von $U\geqq 0$, wie behauptet, das Gleiche von $U(s_0)$.

Beweis des Zusatzes zu Hilfssatz II. Ist $\mathrm{L}\equiv\Delta$, so gilt, wenn $\mathfrak{B}$ p-dimensional ($p=1$, 2 oder 3) ist, für negative λ von genügend großem Betrage

$$(62)\qquad |\breve{\mathfrak{G}}(s,t,m\lambda)|<C'\,|\lambda|^{\frac{1+p}{4}}\,e^{-\eta\sqrt{\frac{-m\lambda}{2}}}\ \text{[10]},$$

wenn s sowohl von t als auch vom Rande $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{B}$ um mindestens η entfernt ist. C' ist eine von λ unabhängige Konstante. Für den Betrag des zweiten auf der rechten Seite von (60) stehenden Summanden ergibt sich daher für $s=s_0$ unter Berücksichtigung von (36), (57) und (30) die obere Schranke

[10]) A. E., 588, Hilfssatz VI mit $\varepsilon=\frac{\pi}{2}$.

$$(63) \qquad |\lambda|^{\frac{5+p}{4}} M C' e^{-\eta\sqrt{\frac{-m\lambda}{2}}} \cdot \text{Inhalt von } \mathfrak{B}$$

und, da der erste in (60) rechts stehende Summand bereits oben als nicht negativ erkannt ist, folgt aus (60)

$$U(s_0) \leqq V(s_0) + |\lambda|^{\frac{5+p}{4}} MC'e^{-\eta\sqrt{\frac{-m\lambda}{2}}}.$$

Nach (62), (36) und (59) hat $|V(s_0)|$ ebenfalls die Schranke (63), so daß wegen $U \geqq 0$ die Behauptung folgt.

(Eingegangen den 11. November 1935.)