COMPOSITIO MATHEMATICA

STEFAN BERGMANN

Sur les fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes I

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 136-173
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__136_0>

Sur les fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes I

par

Stefan Bergmann

Tomsk

A la mémoire de Bronislaw Bergmann.

Le présent travail a pour but l'étude des fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes. Si l'on tente de généraliser les méthodes habituelles de la théorie des fonctions méromorphes d'une variable complexe, on rencontre déjà des difficultés résultant de l'impossibilité de décomposer un polynome de deux variables complexes en facteurs linéaires. On est donc obligé d'introduire des notions nouvelles.

On appelle variété-zéro dans $\mathfrak{B}$ d'une fonction f méromorphe dans $\mathfrak{B}$ la partie $\mathfrak{N}^2$ contenue dans $\mathfrak{B}$ d'une variété analytique $\varphi(z_1, z_2) = 0$ sur laquelle f s'annule (à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable de points où $f(z_1, z_2)$ possède des singularités non essentielles de deuxième espèce). Dans le cas où $\varphi(z_1, z_2)$ est régulière dans $\mathfrak{B}$ et où la fonction $\dfrac{f(z_1, z_2)}{\varphi(z_1, z_2)}$ est régulière en chaque point de $\mathfrak{N}^2$ sauf sur l'ensemble mentionné, on

[1]) On désigne dans ce qui suit par des lettres gothiques les variétés, l'indice n ($n < 4$) supérieur indiquant le nombre de dimensions de la variété considérée. Dans les opérations avec les variétés les symboles $+$, $-$, $\cdot$, $\times$ possèdent la signification habituelle. (Voir par exemple HAUSDORFF, Lehrbuch der Mengenlehre, 2. Aufl., 1928, § 1). Un trait au dessus d'une lettre, désignant une variété ouverte, indique la variété avec la frontière.

$E[\ ]$ désigne dans la suite l'ensemble des points $\{z_1, z_2\}$ satisfaisant à la propriété exprimée entre les crochets.

Pour abréger nous écrivons aussi dans le cas de fonctions réelles $\{z_1, z_2\}$ au lieu de: $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$.

Lorsque nous disons qu'une fonction $f(z_1, z_2)$ est régulière dans une variété $\mathfrak{L}^n$ ($n < 4$), nous entendons par là qu'il existe un domaine $\mathfrak{G}$, à quatre dimensions, $\mathfrak{L}^n \subset \mathfrak{G}$, où $f(z_1, z_2)$ est régulière.

appelle $\varphi(z_1, z_2)$ *une fonction-zéro* de $f(z_1, z_2)$ dans $\mathfrak{B}$ [2]). Les fonctions-zéros de $\dfrac{1}{f(z_1, z_2)}$ sont appelées des *fonctions-pôles* de $f(z_1, z_2)$.

Les problèmes qui se posent tout d'abord, sont les suivants:

I. Etant donnée une suite dénombrable de fonctions $n_s(z_1, z_2)$ régulières dans $\mathfrak{B}$, existe-t-il une fonction possédant les n_s et seulement les n_s [3]) comme fonctions-zéros et appartenant à une classe bien déterminée, par exemple par le mode de la croissance lorsqu'on s'approche de la frontière de $\mathfrak{B}$?

II. Etant donnée une fonction f méromorphe dans $\mathfrak{B}$, qu'est-ce qu'on peut dire de ses fonctions-zéros et variétés-zéros?

Le problème I consiste à chercher à former certains produits analogues à ceux de Weierstraß, quant au problème II on tentera en faisant les modifications nécessaires de généraliser les procédés de la théorie des fonctions méromorphes d'une variable, qui a comme point de départ les théorèmes classiques de Hadamard et Picard-Borel, théorie développée par MM. Nevanlinna, Valiron et autres.

Dans le § I on étudie le problème I en supposant tout d'abord que $\mathfrak{B}$ est un domaine univalent, situé tout entier à distance finie. On donne dans ce cas des conditions nécessaires et d'autres suffisantes pour l'existence d'une fonction $f(z_1, z_2)$, avec des fonctions-zéros données et $\int\limits_{\mathfrak{B}} (\log|f|)^2 \cdot \dfrac{dx_1 dy_1 dx_2 dy_2}{F^k}$ fini, où F est une fonction positive avec $\lim F = \infty$ quand on s'approche de la frontière. En donnant à k des valeurs différentes, on obtient des critères pour l'existence d'une fonction f intégrable au sens

---

[2]) $\mathfrak{N}^2$ n'est pas nécessairement connexe. Les notions de variété-zéro et de fonction-zéro pour une fonction régulière ont été introduites dans le travail a. Über die Nullstellen einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen [Proceedings Akad. Amsterdam **35** (1932), 1188—1194]. Voir à ce sujet aussi: b. Zwei Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas über die Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen [Math. Ann. **102** (1934), 324—348] et H. Behnke et P. Thullen, Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Über die Verallgemeinerung des Weierstraßschen Produktsatzes [Math. Ann. **109** (1934), 313—323].

[3]) Dans ce qui suit on considérera les suites n_s ayant la propriété que dans chaque domaine partiel $\mathfrak{B}_m$ de $\mathfrak{B}$ complètement intérieur à $\mathfrak{B}$ il n'y a qu'un nombre fini de n_s, à savoir pour $s = 1, 2, \ldots, \varkappa(m)$, qui s'annulent dans $\mathfrak{B}_m$. En disant que f possède seulement les n_s comme fonctions-zéros nous sous-entendons que dans chaque $\mathfrak{B}_m$ la fonction $\dfrac{f}{\prod\limits_{s=1}^{\varkappa(m)} n_s}$ *ne s'annule pas* dans $\mathfrak{B}_m$.

plus large, d'ordre k. Les méthodes et les résultats de la théorie des fonctions orthogonales (complexes), que nous employons pour obtenir les critères indiqués, permettent aussi d'étudier la croissance de $\log|f|$ quand on s'approche de la frontière.

Ensuite nous considérons le cas où $\mathfrak{B}$ est l'espace $\mathfrak{R} = E[|z_k| < \infty]$, $k = 1, 2$. Alors on peut former sous les conditions indiquées le produit $f = \prod_{s=1}^{\infty} n_s e^{-b_s}$, où les b_s sont des polynomes en n_s, et par conséquent on peut trouver un lien entre la croissance des facteurs particuliers n_s et celle de f.

La plupart des recherches relatives au problème II dans le cas d'une variable trouvent leur origine dans quelques théorèmes connus (lemme de Schwarz, inégalité de Poisson-Jensen-Nevanlinna etc.) qui utilisent les propriétés suivantes des fonctions harmoniques:

1. Une fonction harmonique dans un domaine atteint son maximum et son minimum sur le contour.
2. Pour des fonctions analytiques d'une variable complexe on a l'intégrale de Cauchy (d'où en particulier celle de Poisson).
3. Le problème de Dirichlet admet en général une solution.
4. A chaque fonction harmonique correspond une conjuguée.

Comme il a été indiqué ailleurs, la généralisation immédiate des théorèmes rappelés ci-dessus n'est pas possible, puisque les fonctions biharmoniques (la partie réelle ou imaginaire d'une fonction de deux variables) ne possèdent pas les propriétés nécessaires: c'est pourquoi il *est utile de considérer une classe spéciale de domaines* à savoir ceux possédant une „surface frontière remarquable" (ausgezeichnete Randfläche) (voir. b) et d'y étudier une classe de fonctions plus large que celle des fonctions biharmoniques. On entend par domaine [$\mathfrak{M}$] à surface frontière remarquable un domaine tel que sur son hypersurface frontière à trois dimensions [$\mathfrak{m}^3$] se trouve une surface (à deux dimensions) [$\mathfrak{F}^2$] qui du point de vue de la théorie des fonctions joue un rôle analogue à celui de la courbe frontière dans le cas d'une variable. On peut montrer que le principe du maximum ainsi qu'une formule intégrale analogue à celle de Cauchy sont valables pour une classe étendue de tels domaines, de telle façon que le maximum d'une fonction f régulière dans $\overline{\mathfrak{M}}$ (fermé) est atteint sur $\mathfrak{F}^2$, l'intégration dans la formule citée étant faite sur $\mathfrak{F}^2$ [4]). Quant à 3 on sait que même dans le cas le plus simple,

[4]) Voir c. Über eine in gewissen Bereichen mit Maximumfläche gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler [Math. Zeitschr. **39** (1934); 76—94, 605—608].

celui du bicylindre, le problème de Dirichlet n'a pas de solution si les valeurs (même continues) ne satisfont pas à certaines conditions [5]). Cependant pour pouvoir construire la fonction de Green (et reprendre les procédés habituels) il convient de *considérer à la place des fonctions biharmoniques une classe plus vaste* telle que d'une part les fonctions de cette classe atteignent encore leur maximum et minimum sur $\mathfrak{F}^2$ et qu'elles admettent une représentation par une intégrale à la Poisson, et que d'autre part le problème de Dirichlet (avec des valeurs données sur $\mathfrak{F}^2$) possède une solution (l'unicité étant réalisée dans des conditions analogues au cas d'une variable). Ayant obtenu par cette voie la possibilité de généraliser les théorèmes utilisant les propriétés 1—3 nous revenons au problème II, en considérant ce problème pour un domaine possédant des domaines d'approximation avec des surfaces maxima. Dans le cas d'une variable on peut toujours se borner à la considération des fonctions-zéros linéaires $z-a$, et elles sont entièrement déterminées par la donnée de la valeur de a; de plus il suffit (poui la plupart des problèmes) de considérer une suite de domaines d'approximation quelconques, car l'ensemble des courbes frontières des domaines d'approximation forme le domaine considéré. Dans le cas de deux variables interviennent des *fonctions-zéros beaucoup plus générales*, qu'il est plus difficile de caractériser. De plus *l'ensemble des surfaces maxima des domaines d'approximation, forme une variété à trois dimensions*, qui dépend du choix des domaines d'approximation. La théorie développée ici conduit à certaines expressions, dépendant de la position des variétés-zéros et de la suite des surfaces maxima.

Dans le § 2 nous considérons un cas spécial, à savoir $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} = E[|z_k| < \infty,\ k = 1, 2]$, et comme suite de domaines d'approximation nous choisissons les bicylindres

---

[5]) Pour ces conditions voir: Über ausgezeichnete Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen [Math. Annalen **104** (1931), 611—636]; L. Nikliborc, Sur les fonctions hyperharmoniques [Comptes Rendus **180** (1925), 1008, et **182** (1926), 110]. F. Severi, Les fonctions biharmoniques et la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes [C. R. **192** (1931), 1514—1518]; F. Severi, Il problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche [Memoria R. Accad. d'Italia **2** (1931), Mat. N. 5, 1—59]; F. Severi, Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche [Atti Accad. naz. Lincei (6) **13** (1931), 795—804]; Caïus Jacob, Sur le problème de Dirichlet pour les fonctions de plusieurs variables complexes [Bulletin sc. Math. (2) **58** (1934), 108—212] et Caïus Jacob, Sur un problème de Dirichlet-Neumann pour les fonctions de deux variables complexes [C. R. du 67ième Congrès des Sociétés savantes **1934**].

$$\mathfrak{C}(r) = E[|z_1| < r,\ |z_2| < Ar^\alpha]$$

(A, α constantes, $0 < r < \infty$) possédant les variétés maxima $\mathfrak{Z}^2(r) = E[|z_1| = r,\ |z_2| = Ar^\alpha]$. Par conséquent nos considérations ultérieures se rapportent à la croissance des fonctions dans la variété (*à trois dimensions*) $\mathfrak{z}^3 \equiv \mathfrak{z}^3(A, \alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{Z}^2(r)$. En accord avec ce qui a été dit plus haut, nous introduisons des quantités $\mathbf{N}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{E}_\lambda$ données pour $f = \frac{n_1}{n_2}$ (n_1, n_2 étant premiers entre eux) méromorphe dans $\mathfrak{R}$ par

$$\mathbf{N}[\mathfrak{Z}^2(r), f^{-1}] = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|n_1(re^{i\varphi_1}, Ar^\alpha e^{i\varphi_2})|\, d\varphi_1 d\varphi_2 - \log|n_1(0,0)|$$

$$\mathbf{n}[\mathfrak{Z}^2(r), f^{-1}] = \frac{d\mathbf{N}[\mathfrak{Z}^2(r), f^{-1}]}{d\log r},$$

$$\mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{Z}^2(r), f^{-1}] = \int_0^r \frac{d\mathbf{n}[\mathfrak{Z}^2(r), f^{-1}]}{r^\lambda}, \quad \mathbf{E}_\lambda[f^{-1}] = \lim_{r\to\infty} \mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{Z}^2(r), f^{-1}],$$

$\mathbf{n}$ est étroitement lié aux variétés-zéros de f. Soit $g(z, \varrho)$ une fonction d'une variable complexe z régulière dans un cercle $|z| \leqq r$ dépendant d'une façon continue du paramètre réel ϱ: Soient $a_s(\varrho)$, $s = 1, 2, \ldots, k(\varrho)$ les points-zéros de $g(z, \varrho)$ dans ce cercle. Nous désignerons leur nombre $k(\varrho)$ par $\nu(r; g^{-1}(z, \varrho))$, la somme $\sum_{s=1}^{k(\varrho)} \log|a_s(\varrho)|$ par $\mathcal{L}(r; g^{-1}(z, \varrho))$ et $\frac{d\mathcal{L}(r; g^{-1}(z, \varrho))}{d\log\varrho}$ par $\mathcal{E}(\varrho; r; g^{-1}(z, \varrho))$. Pour $\mathbf{n}$ on a donc:

$$\mathbf{n}[\mathfrak{Z}^2(r), f^{-1}] =$$
$$= M_{\varphi_2}[\nu(r; n_1^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2})) - \alpha\mathcal{E}(r_2; r; n_1^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2}))] - \alpha\nu(r_2; n_1^{-1}(0, z)),$$

où on a posé $r_2 = Ar^\alpha$ et $M_\varphi[\quad]$ désigne la valeur moyenne $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\quad]\,d\varphi$.

Dans le cas d'une seule variable complexe, on associe certaines grandeurs à l'ensemble des points du domaine $\mathfrak{C}^2 = E[|z| \leqq r]$, dans lesquels une fonction méromorphe $f(z)$ prend une valeur constante a, par exemple le nombre (fini) des points de cet ensemble, ou la somme des λ-ièmes puissances des affixes de ces points etc. De même, en développant notre méthode, nous allons associer à la variété $\mathfrak{N}^2$ (à deux dimensions) des points de $\mathfrak{C}(r)$ dans lesquels $f(z_1, z_2)$ prend une valeur constante a, des grandeurs qui en un certain sens peuvent être regardées comme généralisation de celles dont on vient de parler: ensuite nous verrons, tout comme dans le cas d'une seule variable complexe, que certaines relations existent entre l'allure de ces grandeurs quand r croît et la croissance de la fonction $f(z_1, z_2)$.

L'hypersurface $\mathfrak{S}^3$ divise l'espace $\mathfrak{R}$ en deux parties dont l'une contient le domaine $\mathfrak{T}_\Delta = E[|z_2 < A|z_1|^\alpha, \ |z_2| < \Delta]$, $E[\ldots]$ désignant de manière générale l'ensemble des points $\{z_1, z_2\}$ dont les affixes satisfont aux égalités ou inégalités indiquées entre les crochets et $\Delta = A\sigma^\alpha$.

Posons $\mathfrak{S}^3_\Delta = E[|z_2| = A|z_1|^\alpha < \Delta]$ (c'est la partie de $\mathfrak{S}^3$ appartenant à la frontière de $\mathfrak{T}_\Delta$ et $\mathfrak{r}^3 = E[\arg z_2 = \varphi_2 = \text{const.}]$ et désignons par $\mathfrak{t}^3_\Delta$ et $\mathfrak{S}^2_\Delta$ le produit (au sens de la théorie des ensembles) de $\mathfrak{r}^3$ respectivement avec $\mathfrak{T}_\Delta$ et $\mathfrak{S}^3_\Delta$. La frontière de $\mathfrak{T}_\Delta$ est composée de deux parties: 1⁰ la variété $\mathfrak{S}^3_\Delta$, 2⁰ l'hypersurface $\mathfrak{b}^3_\Delta = E[|z_2| = \Delta, \ |z_1| \leqq \sigma]$. La variété $\mathfrak{b}^3_\Delta$ est de structure lamellaire, c'est-à-dire qu'elle est la somme (au sens de la théorie des ensembles) des surfaces analytiques

$$\mathfrak{b}^2(\varphi_2) = E[|z_1| \leqq \sigma, z_2 = \Delta e^{i\varphi_2}], \ 0 \leqq \varphi_2 \leqq 2\pi, \quad \Delta = A\sigma^\alpha,$$

$\nu\{\sigma, [f(z_1, \Delta e^{i\varphi_2}) - a]^{-1}\}$ étant le nombre des points du domaine $|z_1| \leqq \sigma$ en lesquels $f(z_1, \Delta e^{i\varphi_2})$ prend la valeur a; la grandeur

$$\mathbf{A}[\mathfrak{b}^3_\Delta, (f-a)^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nu\{\sigma, [f(z, \Delta e^{i\varphi_2}) - a]^{-1}\}\, d\varphi_2$$

sera appelée

„nombre de feuilles de $\mathfrak{N}^2$ dans lesquels l'hypersurface $\mathfrak{b}^3_\Delta$ est coupée par $\mathfrak{N}^2$".

Nous désignons par $r_1^{(s)}(\varphi_2)$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ $(r_1^{(1)} < r_1^{(2)} < r_2^{(3)} < \ldots)$ les valeurs de r pour lesquels la fonction de r

„nombre des racines de l'équation $f(z, Ar^\alpha e^{i\varphi_2}) = a$, φ_2 const., contenues dans le domaine $|z| \leqq r$"

subit une variation; $\delta_s(\varphi_2)$ désignant la grandeur (avec le signe) de ces variations; en outre nous appelons

„λ-ième moment de $(f-a)$ par raport à $\mathfrak{F}^2(\sigma)$"

la grandeur

$$\mathbf{D}_\lambda[\mathfrak{F}^2(\sigma), (f-a)^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big\{ \sum_{r_1^{(s)} \leqq \sigma} \delta_s(\varphi_2) \cdot [r_1^{(s)}(\varphi_2)]^{-\lambda} \Big\}\, d\varphi_2 .$$

En admettant certaines hypothèses indiquées plus haut on trouve alors

$$\mathbf{D}_\lambda[\mathfrak{F}^2(\sigma), f^{-1}] + \alpha A^\mu \Sigma\, |\,\zeta_\varkappa|^{-\mu} + \Sigma \frac{l_k}{R_k} =$$

$$= \mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{F}^2(\sigma), f^{-1}] + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^\sigma \frac{\mathcal{L}[r, f^{-1}(z, Ar^\alpha e^{i\varphi_2})]}{r^{\lambda+1}}\, dr + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{\sigma^\lambda}\,\mathcal{E}[\sigma, f^{-1}(z, Ar^\alpha e^{i\varphi_2})] + \frac{\lambda}{\sigma^\lambda}\,\mathcal{L}[\sigma, f^{-1}(z, Ar^\alpha e^{i\varphi_2})]\right\} d\varphi_2,$$

où on a posé $\mu = \frac{\lambda}{\alpha}$, $\zeta_\varkappa$ désignant les zéros de $f(0, z)$ tels que $|\,\zeta_\varkappa| \leqq \Delta$ et R_k les modules des coordonnées z des points „exceptionnels" definis plus loin, l_k étant „l'indice" du point exceptionnel.

En introduisant, tout comme dans le cas d'une seule variable, les expressions $\mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), f^{-1}]$ et $\mathbf{T}[\mathfrak{F}^2(r), f]$ (voir p. [12] 147) et répétant, certaines hypothèses supplémentaires étant ajoutées, le procédé de M. R. Nevanlinna, on obtient tout d'abord le *premier théorème fondamental* de la théorie:

$$\mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] + \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] = \mathbf{T}[\mathfrak{F}^2(r), f] + h(r)$$

avec

$$|\,h(r)| \leqq \left|\overset{+}{\log} |f(0, 0) - a|\right| + \overset{+}{\log}\,|\,a\,| + \log 2.$$

A l'aide de ces relations, on arrive à un théorème analogue au théorème généralisé de M. Hadamard. *En désignant par*

$$\lambda \equiv \lambda(A, \alpha) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, \frac{\mathbf{T}[\mathfrak{F}^2(r), f]}{\log r}$$

l'ordre apparent de croissance sur $\mathfrak{S}^3 \equiv \mathfrak{S}^3(A, \alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{F}^2(r)$ *d'une fonction entière* f *on trouve que les grandeurs* $\mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$, $\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$, $\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$ *possèdent au plus l'ordre* λ; *en outre* $\mathbf{E}_{\lambda+\varepsilon}[(f-a)^{-1}]$ *existe pour tout* $\varepsilon > 0$. D'une manière indiquée plus loin (voir p. [17] 152) nous pouvons évaluer la croissance de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{E}$. Désignons par $\Lambda = \Lambda(B, \beta)$ l'ordre apparent sur $\mathfrak{S}^{*3} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{F}^{*2}(r)$ de f, où $\mathfrak{F}^{*2}(r)$ est la variété (à deux dimensions) $|\,z_1| = r$, $|\,z_2| = Br^\beta$, avec $B < A$, $\beta < \alpha$. En posant $\tau = \max\left[\lambda, \Lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right]$ on trouve que *la croissance de*

$\mathbf{A}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$ *est au plus* τ; *en outre*, ε *étant quantité positive la valeur limite*

$$\lim_{\sigma \to \infty} \mathbf{D}_{\tau+\varepsilon}[\mathfrak{F}^2(\sigma), (f-a)^{-1}]$$

existe.

Dans la deuxième partie de ce mémoire nous verrons qu'en utilisant la croissance de $\mathbf{A}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$ pour un nombre suffisant de valeurs de a, on peut inversement faire des conclusions en ce qui concerne la croissance de $\mathbf{T}[\mathfrak{F}^2(r), f]$.

§ 1.

Soit $\mathfrak{B}$ un domaine simplement connexe univalent de l'espace $z_1 z_2$ situé tout entier à distance finie et soit $\mathfrak{B}_m$, $m = 1, 2, \ldots$, une suite de domaines simplement connexes, emboîtés les uns dans les autres, convergeant vers $\mathfrak{B}$.

Nous écrirons $d\omega \equiv d\omega_k \equiv \dfrac{dx_1 dy_1 dx_2 dy_2}{K^k}$ $(k > 0)$où K est une fonction positive quelconque, que nous choisissons pour fixer les idées comme fonction-noyau de $\mathfrak{B}$, et nous posons pour abréger $\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(h) = \int\limits_{\mathfrak{B}_m} (\log |h|)^2 d\omega$, cette intégrale étant prise au sens de M. Lebesgue.

Nous désignerons enfin dans la suite par H^m l'ensemble des fonctions analytiques de deux variables complexes régulières dans $\mathfrak{B}$, qui se déduisent d'une fonction $h(z_1, z_2)$ régulière en $\mathfrak{B}$ par multiplication par un facteur $p(z_1, z_2)$ régulier dans $\mathfrak{B}_m$ et ne s'y annulant pas.

En utilisant les méthodes développées dans plusieurs travaux antérieurs [6]), on peut montrer qu'à chaque H^m on peut faire correspondre une fonction normée $X^{\mathfrak{B}_m}$ régulière dans $\mathfrak{B}_m$ possédant quelques propriétés importantes indiquées dans la suite.

Nous allons rappeler quelques résultats des travaux b, d, e dont nous avons besoin. Tout d'abord on peut par une voie indiquée dans d, 401—403, et b, 329—330, montrer qu'il existe un système de fonctions biharmoniques $B_s(z_1, z_2)$ simultanément orthogo-

---

[6]) A savoir: d. Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen [Math. Ann. **100** (1928), 399—410]; e. Über Hermitesche unendliche Formen, die zu einem Bereich gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen [Math. Zeitschr. **29** (1929), 640—677].

nales par rapport à $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}_m$ [situé à l'intérieur de $\mathfrak{B}$] (doppelt-orthogonale Funktionen) [voir (6b) et (7b) de d]. Dans d on a choisi comme domaine intérieur un domaine cerclé de Reinhardt $\mathfrak{R}$. N'employant pour la démonstration de l'existence de $B_s(z_1, z_2)$ aucune propriété spéciale des domaines cerclés, nous pouvons remplacer $\mathfrak{R}$ par $\mathfrak{B}_m$. Les fonctions $B_s(z_1, z_2)$, $s = 1, 2, \ldots$, obtenues possèdent entre autres les propriétés suivantes:

1. Chaque B_s est régulier dans $\mathfrak{B}$, et on a $\int\limits_{\mathfrak{B}} B_s^2 d\omega < \infty$ [7]).

2. Les B_s sont orthogonaux et normés par rapport à $\mathfrak{B}_m$, c'est-à-dire qu'on a

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_m} B_k B_l d\omega = \delta_{kl} \qquad \begin{matrix} \delta_{kk} = 1 \\ \delta_{kl} = 0, \quad k \neq l. \end{matrix} \tag{1.1}$$

3. Le système B_s, $s = 1, 2, \ldots$, est complet pour la classe des fonctions G régulières biharmoniques dans $\mathfrak{B}$ avec $\int\limits_{\mathfrak{B}} G^2 d\omega$ fini, c'est-à-dire que pour chaque G on a

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_m} G^2 d\omega = \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\int\limits_{\mathfrak{B}_m} G B_s d\omega\Big)^2.$$

Dans la suite pour abréger nous désignerons par **L** l'ensemble des fonctions G biharmoniques dans $\mathfrak{B}$ avec $\int\limits_{\mathfrak{B}} G^2 d\omega < \infty$.

En reprenant le procédé de e, 649—651, et b, 330, on montre que $\sum\limits_{s=1}^{\infty} B_s^2(z_1, z_2)$ est régulier en chaque point de $\mathfrak{B}_m$ et que chaque fonction G envisagée peut être développée dans $\mathfrak{B}_m$ suivant les B_s (c'est-à-dire que l'on a dans $\mathfrak{B}_m$

$$G(z_1, z_2) = \sum_{s=1}^{\infty} B_s(z_1, z_2) \int\limits_{\mathfrak{B}_m} G B_s d\omega).$$

Pour démontrer que $\sum\limits_{s=1}^{\infty} B_s^2\ (z_1, z_2)$ est fini en chaque point de $\mathfrak{B}_m$, on a recours dans b, 650 (voir aussi e), au lemme suivant: Si $\overline{\mathfrak{H}}$ est un bicylindre $|z_k - t_k| \leqq \varrho_k$, $k = 1, 2$, situé tout entier dans $\mathfrak{B}_m$ et $H(z_1, z_2)$ une fonction biharmonique régulière dans $\mathfrak{B}$, on a:

$$\int\limits_{\mathfrak{H}} H^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \geqq \pi^2 \varrho_1^2 \varrho_2^2 H^2(t_1, t_2).$$

---

[7]) Ici et dans ce qui suit le signe $\int\limits_{\mathfrak{B}}$ désigne $\lim\limits_{m \to \infty} \int\limits_{\mathfrak{B}_m}$.

Dans le cas actuel (puisque nous introduisons les fonctions orthogonales au sens plus large), cette inégalité doit être remplacée par

$$\int\limits_{\mathfrak{H}} H^2 d\omega \geqq \frac{\pi^2 \varrho_1^2 \varrho_2^2 H^2(t_1, t_1)}{\max\limits_{\{z_1, z_2\} \subset \mathfrak{H}} [K(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)]^k}.$$

Si $T(z_1, z_2)$ est une fonction quelconque avec $\int\limits_{\mathfrak{B}_m} T^2 d\omega$ fini, on obtient par

$$\mathbf{T}(z_1, z_2) = T(z_1, z_2) - \sum_{s=1}^{\infty} B_s(z_1, z_2) \int\limits_{\mathfrak{B}_m} T(\zeta_1, \zeta_2) \cdot B_s(\zeta_1, \zeta_2) d\omega$$

la fonction orthogonalisée par rapport à la classe **L** correspondant à $T(z_1, z_2)$. Comme on peut le montrer en vertu des lemmes I et II de b, 329—332, on a pour chaque $G \subset \mathbf{L}$:

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_m} \mathbf{T}(z_1, z_2) \cdot G(z_1, z_2) d\omega = 0.$$

Alors: si $h \subset H^m$, on définit *la fonction normée* $X^{\mathfrak{B}_m}$ *correspondant à* H^m *par rapport à* $\mathfrak{B}_m$, de telle façon que $\log | X^{\mathfrak{B}_m} |$ soit la fonction orthogonalisée de $\log | h |$, c. à d.

$$X^{\mathfrak{B}_m}(z_1, z_2) = h(z_1, z_2) e^{-[B(z_1, z_2) + i\mathsf{K}(z_1, z_2)]} \tag{1.3}$$

où

$$B(z_1, z_2) = \sum_{s=1}^{\infty} B_s(z_1, z_2) \int\limits_{\mathfrak{B}_m} \log | h | \cdot B_s d\omega,$$

et $\mathsf{K}(z_1, z_2)$ représente la fonction biharmonique conjuguée de $B(z_1, z_2)$. *Les fonctions normées* $X^{\mathfrak{B}_m}$ *possèdent les propriétés suivantes*:

I. (1.4) $$\int\limits_{\mathfrak{B}_m} \log | X^{\mathfrak{B}_m} | \cdot G d\omega = 0$$

pour chaque G, $G \subset \mathbf{L}$.

II. *Le produit* $\prod\limits_{s=1}^{\infty} X_s^{\mathfrak{B}_m}$, *k fini, est aussi normé par rapport à* $\mathfrak{B}_m$.

III. *Pour chaque* $h^* \subset H^m$ *on a*

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(X^{\mathfrak{B}_m}) \leqq \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(h^*). \tag{1.5}$$

Démonstration. En vertu de (1.3) on peut poser

$$h^* = X^{\mathfrak{B}_m} e^{-(B^* + i\mathsf{K}^*)}$$

où B^* est biharmonique, régulière dans $\mathfrak{B}_m$ avec $\int\limits_{\mathfrak{B}_m} B^{*2} d\omega$ fini. D'après le lemme 2 de b, 331, on a

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(h) = \int\limits_{\mathfrak{B}_m} (\log|X^{\mathfrak{B}_m}| + \sum_{s=1}^{\infty} a_s B_s)^2 d\omega = \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(X^{\mathfrak{B}_m}) + \sum_{s=1}^{\infty} a_s^2 +$$

$$+ 2\sum_{s=1}^{\infty} a_s \int\limits_{\mathfrak{B}_m} \log|X^{\mathfrak{B}_m}| \cdot B_s d\omega, \qquad a_s = \int\limits_{\mathfrak{B}_m} \log|h^*| \cdot B_s d\omega.$$

Puisque $B_s \subset \mathbf{L}$ on a d'après I:

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(h^*) = \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(X^{\mathfrak{B}_m}) + \sum_{s=1}^{\infty} a_s^2 .$$

Remarque. Par conséquent (abstraction faite d'un facteur constant c, $|c| = 1$) *il n'existe qu'une fonction normée pour chaque* H^m.

IV. *A chaque* $X^{\mathfrak{B}_m}$ *et* $\varepsilon > 0$ *on peut faire correspondre* $h^* \subset H^m$ *telle que*

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(h^*) \leqq \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(X^{\mathfrak{B}_m}) + \varepsilon . \tag{1.6}$$

Démonstration. D'après III on a

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(X^{\mathfrak{B}_m}) = \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(h) - \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\int\limits_{\mathfrak{B}_m} \log|h| \cdot B_s d\omega\Big)^2, \tag{1.7}$$

où h est une fonction quelconque de $H^{(m)}$. En prenant r assez grand pour que $\sum\limits_{s=r}^{\infty} \Big(\int\limits_{\mathfrak{B}_m} \log|h| \cdot B_s d\omega\Big)^2 \leqq \varepsilon$ nous obtenons la fonction $he^{-(B^* + i\mathsf{K}^*)}$, $B^* = \sum\limits_{s=1}^{r} B_s \int\limits_{\mathfrak{B}_m} \log|h| \cdot B_s d\omega$ régulière dans $\mathfrak{B}$, pour laquelle (1.5) est valable.

Le problème que nous étudions dans ce paragraphe est la question suivante: *existe-t-il une fonction f, avec $\mathbf{J}_{\mathfrak{B}}(f)$ fini possédant comme fonctions-zéros une suite de fonctions n_s*, sur lesquelles nous ferons les hypothèses suivantes:

1. Pour chaque s, $\mathbf{J}_{\mathfrak{B}}(n_s)$ existe.

2. Les variétés-zéros $\mathfrak{N}_s^2$ de n_s ne sont pas vides (dans $\mathfrak{B}$) et n'ont pas de points d'accumulation à l'intérieur de $\mathfrak{B}$.

On peut ranger les n_s de manière qu'à chaque m on fasse correspondre un $\varkappa(m)$ de telle sorte que dans $\mathfrak{B}_m$ les $\varkappa(m)$ premières n_s s'annulent et les autres n_s ne s'annulent pas.

Théorème I. *Pour qu'il existe une fonction f, régulière dans $\mathfrak{B}$ avec $\mathbf{J}_{\mathfrak{B}}(f)$ fini, possédant la suite n_s, $s = 1, 2, \ldots$, et seulement* *la suite n_s comme fonctions-zéros, il est nécessaire que*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}\left(\prod_{s=1}^{\varkappa(m)} \nu_s^{\mathfrak{B}_m}\right) < \infty, \tag{1.8}$$

et il suffit, que

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}\left(\prod_{s=1}^{\varkappa(m)} \nu_s^{\mathfrak{B}}\right) = A < \infty, \tag{1.9}$$

$\nu_s^{\mathfrak{B}_m}$ désignant la fonction normée de n_s par rapport à $\mathfrak{B}_m$, $\nu_s^{\mathfrak{B}}$ celle par rapport à $\mathfrak{B}$.

Démonstration. 1. Supposons qu'il existe une fonction f envisagée. $\prod_{s=1}^{\varkappa(m)} \nu_s^{\mathfrak{B}_m}$ est la fonction normée de f par rapport à $\mathfrak{B}_m$. $\dfrac{f}{\prod_{s=1}^{\varkappa(m)} n_s}$ est régulière dans $\mathfrak{B}$ et ne s'annule pas dans $\mathfrak{B}_m$, donc f et $\prod_{s=1}^{\varkappa(m)} n_s$ appartiennent au même H^m. D'après III on a

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}\left(\prod_{s=1}^{\varkappa(m)} \nu_s^{\mathfrak{B}_m}\right) \leqq \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(f) \leqq \mathbf{J}_{\mathfrak{B}}(f) < \infty. \tag{1.10}$$

$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}\left(\prod_{s=1}^{\varkappa(m)} \nu_s^{\mathfrak{B}_m}\right)$ est une suite de nombres non décroissants avec m: soit $m_1 > m$ en vertu de IV on peut trouver un $h^* \subset H^{m_1}$ régulier dans $\mathfrak{B}$ et tel qu'on ait: $\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_{m_1}}(h^*) \leqq \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_{m_1}}\left(\prod_{s=1}^{\varkappa(m_1)} \nu_s^{\mathfrak{B}_{m_1}}\right) + \varepsilon$.

D'autre part h^* ayant dans $\mathfrak{B}_m$ les fonctions-zéros $n_1, n_2, \ldots, n_{\varkappa(m)}$ appartient à H^m et d'après III on a

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}\left(\prod_{s=1}^{\varkappa(m)} \nu_s^{\mathfrak{B}_m}\right) \leqq \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(h^*) \leqq \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_{m_1}}(h^*) \leqq \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_{m_1}}\left(\prod_{s=1}^{\varkappa(m_1)} \nu_s^{\mathfrak{B}_{m_1}}\right) + \varepsilon.$$

(1.10) étant valable pour chaque m, on obtient par conséquent (1.8) comme condition nécessaire.

2. Pour m fixe, les $\mathfrak{B}_m$ étant des domaines croissants,

$$\int_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(\sum_{s=1}^{\varkappa(2M)} \log \nu_s^{\mathfrak{B}}\right)^2 d\omega \leqq \int_{\mathfrak{B}_{2M}} \left(\sum_{s=1}^{\varkappa(2M)} \log \nu_s^{\mathfrak{B}}\right)^2 d\omega, \quad \text{pour } m < M,$$

(1.9) entraîne:

$$\lim_{L\to\infty} \int_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(\sum_{s=1}^{L} \log |\nu_s^{\mathfrak{B}}|\right)^2 d\omega \leqq a_{2m} < A, \tag{1.11}$$

où L parcourt une suite infinie $\mathbf{S}$ de nombres entiers, positifs, croissants, et a_{2m} est une constante convenable. On peut pour chaque $b_{2m} > a_{2m}$ trouver un l_0, $l_0 \subset \mathbf{S}$ (en posant simultanément $l_0 > \varkappa(2m)$) tel que pour $l > l_0$, $l \subset \mathbf{S}$

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(\sum_{s=1}^{l} \log \left| v_s^{\mathfrak{B}} \right| \right)^2 d\omega \leqq b_{2m}. \tag{1.12}$$

Pour chaque $L > l > l_0$ on a par conséquent

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(\sum_{s=l}^{L} \log \left| v_s^{\mathfrak{B}} \right| \right)^2 d\omega \leqq \int\limits_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(\sum_{s=1}^{l} \ldots \right)^2 d\omega +$$
$$+ \int\limits_{\mathfrak{B}_{2m}} \left(\sum_{s=1}^{L} \ldots \right)^2 d\omega + 2 \int\limits_{\mathfrak{B}_{2m}} \left| \sum_{s=1}^{l} \ldots \right| \cdot \left| \sum_{s=1}^{L} \ldots \right| d\omega \leqq 4 b_{2m}.$$

Puisque $l > \varkappa(2m)$ en vertu de 2, $\sum_{s=l}^{L} \log \left| v_s^{\mathfrak{B}} \right|$ est une fonction biharmonique et régulière dans $\mathfrak{B}_{2m}$. D'après le théorème connu de la théorie des fonctions orthogonales, on a dans $\mathfrak{B}_{2m}$

$$\left| \sum_{s=l}^{L} \log \left| v_s^{\mathfrak{B}}(z_1, z_2) \right| \right| \leqq \sqrt{4 b_{2m} X_{\mathfrak{B}_{2m}}(z_1, z_2)}, \tag{1.13}$$

où $X_{\mathfrak{B}_{2m}}(z_1, z_2)$ est la fonction-noyau de la classe des fonctions biharmoniques régulières intégrables (d'ordre k) dans $\mathfrak{B}_{2m}$[8]). Dans chaque domaine situé tout entier dans $\mathfrak{B}_{2m}$ $X_{\mathfrak{B}_{2m}}(z_1, z_2)$ est bornée, et la suite $\sum_{s=l}^{L} \log \left| v_s^{\mathfrak{B}} \right|$, $L = L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots$ $(L^{(k)} \subset \mathbf{S})$, forme une famille normale. Par conséquent on peut extraire une suite partielle L_p, $p = 1, 2, \ldots$, telle que

$$\lim_{p \to \infty} \sum_{s=l}^{L_p} \log \left| v_s^{\mathfrak{B}}(z_1, z_2) \right| \text{ c'est-à-dire } \sum_{p=1}^{\infty} \log \left| v_{p1}^{\mathfrak{B}} \right|, \quad v_{p1} = \prod_{s=L_p}^{L_{p+1}} v_s^{\mathfrak{B}},$$

converge uniformément dans $\mathfrak{B}_m$. $\sum_{p=1}^{\infty} \log \left| v_{p1}^{\mathfrak{B}} \right|$ est une fonction biharmonique régulière dans $\mathfrak{B}_m$ et par conséquent $\prod_{p=s}^{\infty} v_{p1}^{\mathfrak{B}}$ est une fonction régulière et ne s'annulant pas dans $\mathfrak{B}_m$. La fonction $f_1(z_1, z_2) = \prod_{s=1}^{l} v_s^{\mathfrak{B}} \cdot \prod_{p=1}^{\infty} v_{p1}^{\mathfrak{B}}$ est régulière dans $\mathfrak{B}_m$ et possède $v_s^{\mathfrak{B}}$, $s = 1, 2, \ldots, \varkappa(m)$, comme fonctions-zéros. L'intégrale $\mathrm{J}_{\mathfrak{B}_m}(f_1)$

[8]) Ceci résulte immédiatement du fait que $\dfrac{dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2}{K^k_{\mathfrak{B}_{2m}}} \leqq \dfrac{dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2}{K^k_{\mathfrak{B}}}$ (puisqu'on a: $\mathfrak{B}_{2m} \subset \mathfrak{B}$).

existe d'après (1.11) et un théorème de la théorie de l'intégrale de Lebesgue [8a]). On a:

$$\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(f_1) \leqq a_{2m}. \tag{1.14}$$

Soit $m_1 > m$. En répétant le même procédé on obtient la fonction

$$f_2(z_1, z_2) = \prod_{s=1}^{l} \nu_s^{\mathfrak{B}} \cdot \prod_{s=1}^{l_1} \nu_{s1}^{\mathfrak{B}} \cdot \prod_{s=1}^{\infty} \nu_{s2}^{\mathfrak{B}}$$

où l'on pose:

$$\nu_{p2}^{\mathfrak{B}} = \prod_{s=L_p}^{L'_{p+1}}{}' \, \nu_{s1}^{\mathfrak{B}}.$$

Dans $\mathfrak{B}_m$ on a: $f_2(z_1, z_2) = f_1(z_1, z_2)$. Alors si m_k prend des valeurs croissantes avec $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \infty$ on arrive à la fonction

$$f(z_1, z_2) = \prod_{s=1}^{l} \nu_s^{\mathfrak{B}} \cdot \prod_{s=1}^{l_1} \nu_{s1}^{\mathfrak{B}} \cdot \prod_{s=1}^{l_2} \nu_{s2}^{\mathfrak{B}} \dots \tag{1.15}$$

qui coïncide avec $f_{m_k}(z_1, z_2)$ dans chaque $\mathfrak{B}_{m_k}$. Par conséquent $f(z_1, z_2)$ possède comme fonctions-zéros dans chaque $\mathfrak{B}_{m_k}$ les fonctions $\nu_s^{\mathfrak{B}}$, $s = 1, 2, \dots, \varkappa(m_k)$, seulement et on a $\mathbf{I}_{\mathfrak{B}_{m_k}}(f) = \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_{m_k}}(f_{m_k+1}) \leqq a_{2m_k} < A$. Comme par définition $\mathbf{J}_{\mathfrak{B}}(f) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(f)$ et $\mathbf{J}_{\mathfrak{B}_m}(f)$, $m = m_1, m_2, \dots$, est une suite de nombres non décroissants qui sont bornés dans leur ensemble, notre théorème est démontré.

Outre la classe de fonctions avec $\int\limits_{\mathfrak{B}} (\log|f|)^2 d\omega$ fini, il est intéressant de considérer des classes avec $\int\limits_{\mathfrak{B}} |\log f|^2 d\omega$ fini. Comme $\log f$ peut être multiforme dans $\mathfrak{B}$ nous sommes obligés d'introduire quelques hypothèses complémentaires pour pouvoir employer les méthodes appliquées précédemment.

Soit $n_s(z_1, z_2)$, $s = 1, 2, \dots$, comme auparavant, une suite de fonctions régulières dans $\mathfrak{B}$. Nous supposons qu'il existe un

---

[8a]) Voir par exemple Saks, Théorie de l'intégrale (1933), 85, théorème 5. D'après (1.13) on peut majoriser $\sum\limits_{s=1}^{l} \log|\nu_s^{\mathfrak{B}}| + \sum\limits_{p=1}^{p=\infty} \log|\nu_{p1}^{\mathfrak{B}}|$ dans $\mathfrak{B}_m$ par $\sum\limits_{s=1}^{l} \log|\nu_s^{\mathfrak{B}}| + C$, où C est une constante convenable. En vertu de 1, (1.3), (1.5) $\int\limits_{\mathfrak{B}_m} \left(\sum\limits_{s=1}^{l} \log|\nu_s^{\mathfrak{B}}| + C\right)^2 d\omega \leqq \int\limits_{\mathfrak{B}} \left(\sum\limits_{s=1}^{l} \log|\nu_s^{\mathfrak{B}}| + C\right)^2 d\omega$ existe.

domaine $\widetilde{\mathfrak{B}}$ simplement connexe obtenu à partir de $\mathfrak{B}$ par une suite dénombrable de coupures à trois dimensions et tel que $\log n_s$ est régulier et uniforme dans $\widetilde{\mathfrak{B}}$. De plus au lieu de 1, on fait les hypothèses 1a, 1b.

1a. Pour chaque s on a: $\int\limits_{\widetilde{\mathfrak{B}}} |\log n_s|^2 \, d\omega < \infty$

(où:
$$\int\limits_{\widetilde{\mathfrak{B}}} = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\widetilde{\mathfrak{B}}_m}, \qquad \widetilde{\mathfrak{B}}_m = \mathfrak{B}_m \cdot \widetilde{\mathfrak{B}}).$$

1b. Pour chaque fonction $g(z_1, z_2)$ régulière dans $\mathfrak{B}$ et chaque $\mathfrak{B}_m$ on a

$$\int\limits_{\mathfrak{B}_m - \widetilde{\mathfrak{B}}_m} |g|^2 d\omega = 0\,. \tag{1.16}$$

On peut donc reprendre le procédé exposé auparavant. On utilise au lieu des fonctions biharmoniques $B_s(z_1, z_2)$ les fonctions orthogonales $\varphi_s(z_1, z_2)$ de deux variables complexes, c'est-à-dire celles pour lesquelles on a les relations $\int\limits_{\mathfrak{B}_m} \varphi_p \overline{\varphi}_q d\omega = \delta_{pq}$. (En vertu de (1.16) on a aussi $\int\limits_{\widetilde{\mathfrak{B}}_m} \varphi_p \overline{\varphi}_q d\omega = \delta_{pq}$). On peut alors introduire la fonction normée de la classe H^m par la relation

$$\nu_s^{\mathfrak{B}_m}(z_1, z_2) = n_s(z_1, z_2)\, e^{-b(z_1, z_2)},$$

$$b(z_1, z_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(z_1, z_2) \int\limits_{\widetilde{\mathfrak{B}}_m} \log n_s \cdot \overline{\varphi}_s d\omega$$

et on obtient par la voie indiquée un théorème analogue au théorème I.

En donnant à k (voir p. [8] 143) des valeurs croissantes, on obtient des classes plus larges de fonctions, chaque classe contenant les précédentes. Du fait que $\int\limits_{\mathfrak{B}} (\log |f|)^2 d\omega$ ou bien $\int\limits_{\mathfrak{B}} |\log f|^2 d\omega$ existe, on peut tirer des conclusions sur la croissance de la fonction f: Dans le premier cas $\log |f|$ est une fonction régulière biharmonique dans $\mathfrak{B}^*$, où $\mathfrak{B}^*$ désigne le domaine déduit de $\mathfrak{B}$ en excluant toutes les variétés-zéro $\mathfrak{N}_s^2$, $s = 1, 2, \ldots$. Dans le deuxième cas $|\log f|$ est une fonction de deux variables complexes régulière dans $\widetilde{\mathfrak{B}}$. Dans les deux cas les fonctions envisagées sont „intégrables au sens large" [9]). En vertu des résultats des travaux b, **330**, et e, **649**, dans le premier cas $\log|f|$, dans le deuxième cas $|\log f|$ sont plus petits que $\sqrt{c\boldsymbol{H}(z_1, z_2)}$ où c est une constante et $\boldsymbol{H}(z_1, z_2)$ la fonction-noyau de la classe de fonctions envisagées. En employant des méthodes développées dans le travail "Über die Kernfunktion eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande" [10]) pour le cas des fonctions analytiques de deux variables complexes dont les modules sont de carré sommable, on peut en faisant certaines hypothèses sur la structure de la frontière *donner des bornes supérieures pour la croissance de* $\boldsymbol{H}(z_1, z_2)$ *et par conséquent pour* $\log|f|$ *ou bien pour* $|\log f|$ *quand on s'approche de la frontière de* $\mathfrak{B}^*$ *ou bien de* $\mathfrak{B}$.

Nous passons au cas où $\mathfrak{B}$ ne peut pas être représenté par une transformation pseudoconforme sur un domaine univalent (schlicht) simplement connexe situé tout entier à distance finie. Nous nous bornerons alors au cas où $\mathfrak{B}$ représente tout l'espace $z_1 z_2$. On peut dans ce cas employer avec une légère modification le procédé de Weierstraß, qui montre le lien de la croissance des facteurs avec celle du produit.

Soit alors $n_s(z_1, z_2)$, $n_s(0, 0) \neq 0$, $s = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions entières, dont les variétés-zéros ne possèdent aucun point d'accumulation à distance finie. Nous désignons par r_{ks}, $k = 1, 2$, les rayons du plus grand bicylindre $\mathfrak{C}_s$ dans lequel $\log h_s$ reste régulière. (Sur la variété maximum $\mathfrak{F}_s : |z_k| = r_{ks}$ de $\mathfrak{C}_s$ la fonction $n(z_1, z_2)$ possède au moins un point-zéro.)

Nous voulons montrer que pour chaque $n_s(z_1, z_2)$ *on a*

$$(1.17) \qquad A_s \equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\log n_s(r_{1s}e^{i\varphi_1},\ r_{2s}e^{i\varphi_2})\right| d\varphi_1 d\varphi_2 < \infty.$$

$n_s(z_1, z_2)$ est régulier dans $\overline{\mathfrak{C}}_s$. D'après un lemme (Vorbereitungssatz) de Weierstraß on peut associer à chaque point $\{a, b\} \subset \overline{\mathfrak{C}}_s$ une hypersphère $\mathfrak{H}$ du rayon $\varrho > 0$ dans laquelle on ait:

$$(1.18) \quad n_s(z_1, z_2) = (z_2 - b)^\mu \left[(z_1 - a)^m + A_2(z_2)(z_1 - a)^{m-1} + \ldots + \right.$$
$$\left. + A_m(z_2)\right] \psi(z_1, z_2) = (z_2 - b)^\mu \prod_{k=s}^{m} \left[z_1 - \alpha_k(z_2)\right] \cdot \psi(z_1, z_2),$$

$\psi(z_1, z_2)$ ne s'annulant pas dans $\mathfrak{H}$, $A_k(z_2)$ $(A_k(b) = 0)$ étant

---

[9]) Nous disons qu'une fonction f est „intégrable au sens large" si $\int_{\mathfrak{G}} |f|^2 d\tau$ existe où $d\tau$ signifie l'élément de volume multiplié par une fonction positive et finie dans $\mathfrak{G}$, par exemple K^{-k}.

[10]) Journ. f. r. u. angew. Math. **169** (1933), 1—42, et **172** (1934), 89—126.

réguliers dans $\mathfrak{H}$. D'après le lemme de Borel-Lebesgue, on peut couvrir $\mathfrak{E}_s$ au moyen d'un nombre fini de $\mathfrak{H}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Par conséquent il suffit de montrer que

$$\iint_{\mathfrak{G}^2} |\log n_s(r_{1s}e^{i\varphi_1}, r_{2s}e^{i\varphi_2})|\, d\varphi_1 d\varphi_2$$

est fini, $\mathfrak{G}^2$ désignant $\mathfrak{H}_p \cdot \mathfrak{F}_s^2$ $(\mathfrak{F}_s^2 = E[|z_k| = r_{ks}])$. En vertu de (1.18) il suffit de montrer l'existence de

$$(1.19)\quad \iint_{\mathfrak{G}^2} |\log (r_2 e^{i\varphi_2} - b)|\, d\varphi_1 d\varphi_2 \text{ et } \iint_{\mathfrak{G}^2} |\log (r_1 e^{i\varphi_1} - \alpha(r_2 e^{i\varphi_2}))|\, d\varphi_1 d\varphi_2$$

où $\alpha(z_2)$ est une fonction algébrique dans $\mathfrak{H}_p$. On peut prolonger la fonction $\alpha(z_2)$ [pas nécessairement de manière analytique] de telle façon qu'elle reste continue sur toute la surface $\mathfrak{F}^2$ et considérer au lieu de (1.16) les intégrales

$$(1.20)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log (r_2 e^{i\varphi_2} - b)|\, d\varphi_1 d\varphi_2 \text{ et}$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log (r_1 e^{i\varphi_1} - \alpha_k(r_2 e^{i\varphi_2}))|\, d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Les parties imaginaires des intégrands dans (1.20) restent bornées et puisqu'on a

$$\int_0^{2\pi} \log |r_2 e^{i\varphi_2} - b|\, d\varphi_2 = 2\pi \log r_2 \quad \text{si } |b| \leqq r_2,$$
$$= 2\pi \log |b| \quad ,, \quad |b| \geqq r_2,$$

et un résultat analogue pour $\int_0^{2\pi} \log |r_1 e^{i\varphi_1} - \alpha_k(r_2 e^{i\varphi_2})|\, d\varphi_1$, on peut facilement démontrer l'inégalité (1.17).

$\log n_s(z_1, z_2)$ *peut être développée dans* $\mathfrak{E}_s$ *en série*

$$(1.21)\qquad \log n_s(z_1, z_2) = \sum_{(mn)=(0,0)}^{\infty} a_{mn}^{(s)} z_1^m z_2^n,$$

où $a_{mn}^{(s)}$ *vérifie l'inégalité*

$$(1.22)\qquad |a_{mn}^{(s)}| \leqq \frac{A_s}{4\pi^2 r_{1s}^m r_{2s}^n}.$$

Démonstration de (1.22). Pour $|z_k| \leqq r_k < r_{ks}$ la série (1.21) converge uniformément. Si on la multiplie par $e^{-i(m\varphi_1 + n\varphi_2)}$ et si l'on intègre entre les limites $0 \leqq \varphi_k \leqq 2\pi$, $k = 1, 2$, on obtient (en vertu de l'orthogonalité)

$$(1.23)\quad |a_{mn}^{(s)}| = \frac{1}{4\pi^2 r_1^m r_2^n} \left| \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log n_s(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) e^{-i(m\varphi_1 + n\varphi_2)} d\varphi_1 d\varphi_2 \right.$$
$$\leqq \frac{1}{4\pi^2 r_1^m r_2^n} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log n_s(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|\, d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Comme cette inégalité est valable pour chaque $r_k < r_{ks}$ et puisque $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\log n_s(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| \, d\varphi_1 d\varphi_2$ est continu, (1.23) entraîne (1.22).

THÉORÈME II. *Une condition suffisante pour que*

$$(1.24) \qquad \prod_{s=1}^{\infty} l_s(z_1, z_2), \qquad l_s(z_1, z_2) = n_s(z_1, z_2) e^{-\sum_{(mn)=(0,0)}^{(0,p)} a_{mn}^{(s)} z_1^m z_2^n} \text{ [11]}$$

converge dans $|z_k| < \infty$ *vers une fonction entière possédant les* n_s *et seulement les* n_s *comme fonctions-zéros est (en supposant* $\lim_{s \to \infty} r_{ks} = \infty$, $k = 1, 2$), *que*

$$(1.25) \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_s}{r_{ks}^{p+1}}, \qquad k = 1, 2,$$

existe, où $a_{mn}^{(s)}$, r_{ks}, A_s *ont la signification indiquée plus haut.*

DÉMONSTRATION. Supposons les n_s rangés de telle manière que les r_{1s}, $s = 1, 2, \ldots$, ne décroissent pas. Nous posons: $r_{2s}^* = \min_{p \geq s} (r_{2p})$ et désignons par $\mathfrak{C}_s^*$ et $\mathfrak{Z}_s^{*2}$ le bicylindre $|z_1| < r_{1s}$, $|z_2| < r_{2s}^*$ ou bien sa variété-maximum $|z_1| = r_{1s}$, $|z_2| = r_{2s}^*$.

Comme on sait, il suffit de démontrer que pour chaque s fixe, dans chaque portion de l'espace située tout entière dans $\mathfrak{C}_s^*$, par exemple pour $\mathfrak{T} = E[\,|z_1| \leqq \varrho_{1s} < r_{1s}, |z_2| \leqq \varrho_{2s} < r_{2s}^*]$ le produit

$$f_s = \prod_{\varkappa=s}^{\infty} l_\varkappa(z_1, z_2)$$

converge uniformément vers une fonction régulière et ne s'annulant pas dans $\mathfrak{T}$. Mais on a dans $\mathfrak{T}$

$$(1.26) \quad \sum_{\varkappa=s}^{\infty} \log l_\varkappa(z_1, z_2) = \sum_{\varkappa=s}^{\infty} [a_{p+1,0}^{(\varkappa)} z_1^{p+1} + a_{p,1}^{(\varkappa)} z_1^p z_2 + \ldots] \leqq$$

$$\leqq \sum_{\varkappa=s}^{\infty} \frac{A_\varkappa}{4\pi^2} \left[\left|\frac{z_1}{r_{1\varkappa}}\right|^{p+1} + \left|\frac{z_1}{r_{1\varkappa}}\right|^{p} \left|\frac{z_2}{r_{2\varkappa}}\right| + \ldots \right] \leqq$$

$$\leqq \sum_{\varkappa=s}^{\infty} \frac{A_\varkappa}{4\pi^2} \left[\left|\frac{z_1}{r_{1\varkappa}}\right|^{p+1} + \left|\frac{z_1}{r_{1\varkappa}}\right|^{p} \left|\frac{z_2}{r_{2\varkappa}}\right| + \ldots + \left|\frac{z_2}{r_{2\varkappa}}\right|^{p+1} \right] \cdot \frac{1}{\left(1 - \left|\frac{z_1}{r_{1\varkappa}}\right|\right)\left(1 - \left|\frac{z_2}{r_{2\varkappa}}\right|\right)} \leqq$$

[11] $\sum_{(mn)=(0,0)}^{(0,p)}$ désigne la sommation faite lorsque (mn) prennent les valeurs (0,0), (1,0), (0,1), (2,0), ..., $(p0)$, $(p-1,1)$, ..., $(1,p-1)$, $(0,p)$.

$$\leqq \frac{1}{\left(1-\left|\frac{z_1}{r_{1s}}\right|\right)\left(1-\left|\frac{z_2}{r_{2s}^*}\right|\right)} \cdot \sum_{\varkappa=s}^{\infty} \frac{A_\varkappa}{4\pi^2}\left[\left|\frac{z_1}{r_{1\varkappa}}\right|^{p+1}+\ldots+\left|\frac{z_2}{r_{2\varkappa}}\right|^{p+1}\right] \leqq$$

$$\leqq \frac{p+2}{4\pi^2\left(1-\left|\frac{z_1}{r_{1s}}\right|\right)\left(1-\left|\frac{z_2}{r_{2s}^*}\right|\right)} \sum_{\varkappa=s}^{\infty} A_\varkappa\left[\left|\frac{z_1}{r_{1\varkappa}}\right|^{p+1}+\left|\frac{z_2}{r_{2\varkappa}}\right|^{p+1}\right].$$

§ 2.

Dans ce paragraphe nous envisageons le problème II, c'est-à-dire *l'étude des fonctions-zéros* et de *variétés-zéros d'une fonction donnée.* Nous étudierons ici ce problème dans le cas très important où le domaine envisagé est l'espace

$$\mathfrak{R} = E[\,|z_k| < \infty,\ k = 1, 2]$$

et où *la suite des domaines d'approximation est une suite de bicylindres.*

Dans le cas du bicylindre une „classe plus large de fonctions" est formée par les *fonctions doublement harmoniques,* c'est-à-dire par les fonctions qui satisfont simultanément aux équations:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y_k^2} = 0, \qquad k = 1, 2.$$

Une fonction doublement harmonique peut être représentée dans $\mathfrak{C} = E[\,|z_k| < r_k]$ par l'intégrale

$$H(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) \prod_{k=1}^{2} P(r_k, s_k;\ \varphi_k - \psi_k)\, d\varphi_k,$$

$$P(r, s; t) = \frac{1}{2\pi}\frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2 - 2rs\cos t}.$$

Pour généraliser le principe de Lindelöf nous devons introduire une classe de fonctions doublement harmoniques, possédant certaines singularités; nous désignerons comme *fonctions de la classe* **D** les fonctions doublement harmoniques, régulières dans $\mathfrak{C}$ sauf sur un nombre fini de variétés analytiques $\mathfrak{N}_k^2$, $k = 1, 2, \ldots$. En s'approchant de $\mathfrak{N}_k^2$ elles tendent uniformément vers $-\infty$ (c'est à dire qu'à chaque fonction $H(z_1, z_2)$ de la classe **D** et à chaque A correspond un ε indépendant de P [$\mathrm{P} \subset \mathfrak{N}_k^2$] de telle manière, que dans $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{H}_\varepsilon^{(\mathrm{P})}$

$$H(z_1, z_2) \leqq -A,$$

$\mathfrak{H}_\varepsilon^{(\mathrm{P})}$ désignant l'hypersphère de centre P et de rayon ε).

Lemme I. — *Une fonction* $H(z_1, z_2)$ *de la classe* **D** *atteint son maximum par rapport à* $\mathfrak{C}$ *sur la variété-maximum* $\mathfrak{F}^2 = E[|z_k| = r_k]$.

Démonstration: Soit $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ un point quelconque de $\mathfrak{C}$, nous allons montrer qu'il existe un point $\{z_1^0, z_2^0\}$ de $\mathfrak{F}^2$ tel qu'on a:

$$H(\zeta_1, \zeta_2) \leqq H(z_1^0, z_2^0). \tag{2.1}$$

Nous supposons que $H(\zeta_1, \zeta_2) \neq -\infty$, car dans ce cas le théorème est évident. Le cercle $\overline{\mathfrak{H}}^2 = E\,[\,|\,z_1| \leqq r_1,\ z_2 = \zeta_2]$ n'est certainement pas une des variétés $\mathfrak{N}_k^2$ et possède par conséquent au plus un nombre fini de points d'intersection $\mathfrak{p}_k^0$, $k = 1, 2, \ldots l$, avec les variétés $\mathfrak{N}_k^2$ où la fonction harmonique $H(z_1, \zeta_2)$ des variables x_1, y_1 devient infinie. Nous décrirons autour des points $\mathfrak{p}_k^0$, $k = 1, 2, \ldots, l$ des cercles $\mathfrak{C}_k^2$ de rayon assez petit pour que dans $\overline{\mathfrak{K}}^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{l} \mathfrak{C}_k^2$ on ait $H(z_1, \zeta_2) \leqq H(\zeta_1, \zeta_2)$ (ce qui est toujours possible en vertu d'une propriété indiquée de la classe **D**). La fonction $H(z_1, \zeta_2)$ de la variable z_1 est harmonique, régulière dans $\overline{\mathfrak{K}}^2 - \overline{\mathfrak{K}}^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{l} \mathfrak{C}_2^k$ et puisqu'elle est harmonique, elle atteint son maximum en un point de la frontière. Comme sur les frontières des $\mathfrak{K}^2 \cdot \mathfrak{C}_k^2$, $k = 1, 2, \ldots, l$, elle est plus petite que $H(\zeta_1, \zeta_2)$, son maximum doit être atteint sur le reste de la frontière c'est-à-dire en un point $z_1^0, |\,z_1^0\,| = r_1$. Par conséquent on a:

$$H(\zeta_1, \zeta_2) \leqq H(z_1^0, \zeta_2). \tag{2.2}$$

Des considérations analogues sur la fonction $\mathrm{H}(z_1^0, z_2)$ dans le cercle $|\,z_2\,| \leqq r_2$, $z_1 = z_1^0 = \text{const.}$ prouvent l'existence d'un $z_2^0, |\,z_2^0\,| = r_2$ tel que

$$H(z_1^0, \zeta_2) \leqq H(z_1^0, z_2^0). \tag{2.3}$$

(2.2) et (2.3) entraînent (2.1).

La fonction de Green doublement harmonique. Soit $n(z_1, z_2)$ une fonction régulière dans $\overline{\mathfrak{C}}$. Nous appelons fonction de Green doublement harmonique correspondant à n et à $\mathfrak{C}$

$$\Gamma(z_1, z_2; n) = -\log|\,n(z_1, z_2)\,| + D(z_1, z_2),$$

$$D(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2}) = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \log|\,n(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|\prod_{k=1}^{2} P(r_k, s_k; \varphi_k - \psi_k)\, d\varphi_k.$$

D'après les considérations de la p. [17] 152

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} |\log|\,n(r, e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})\,||\, d\varphi_1 d\varphi_2$$

existe [12]), et par conséquent $D(z_1, z_2)$ est régulier, doublement harmonique dans $\mathfrak{E}$. Dans le cas où $n(z_1, z_2)$ ne s'annule pas sur $\mathfrak{F}^2$, on a pour chaque point de $\mathfrak{F}^2$: $\Gamma(z_1, z_2; n) = 0$. Si $n(z_1, z_2)$ ne s'annule pas dans $\overline{\mathfrak{E}}$ on a: $\Gamma(z_1, z_2; n) = 0$.

THÉORÈME III. *Soit* $f = \dfrac{\prod_{\nu=1}^{l} n_\nu}{\prod_{\nu=1}^{k} p_\nu} e^h$ *avec* p_ν, n_ν, h *régulières dans* $\overline{\mathfrak{E}}$ [13]). *On a alors dans* $\mathfrak{E}$:

$$(2.4)\quad \log|f(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2})| =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| \prod_{k=1}^{2} P(r_k, s_k, \varphi_k - \psi_k) d\varphi_k -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{l} \Gamma(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2}; n_\nu) + \sum_{\nu=1}^{k} \Gamma(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2}; p_\nu).$$

DÉMONSTRATION. On a

$$Re[h(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2})] = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Re[h(r, e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})] \prod_{\nu=1}^{2} P_\nu(r_\nu, s_\nu, \varphi_\nu - \psi_\nu) d\varphi_\nu$$

$$\log|f(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2})| + \sum_{\nu=1}^{k} \log|p_\nu(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2})| - \sum_{\nu=1}^{l} \log|n_\nu(s_1 e^{i\psi_1}, s_2 e^{i\psi_2})| =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [\log|f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{k} \log|p_\nu(r_1 e^{i\varphi_1}, r_1 e^{i\varphi_2})| - \sum_{\nu=1}^{l} \log|n_\nu(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})|] \prod_{\nu=1}^{2} P(r_\nu, s_\nu; \varphi_\nu - \psi_\nu) d\varphi_\nu.$$

D'après la définition de la fonction de Green donnée plus haut on en tire directement (2.4).

En posant $z_1 = z_2 = 0$, on obtient

$$(2.5)\quad \log|f(0,0)| = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| d\varphi_1 d\varphi_2 -$$
$$- \sum_{\nu=1}^{l} \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2, n_\nu^{-1}] + \sum_{\nu=1}^{k} \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2, p_\nu^{-1}]$$

où on a posé

---

[12]) Puisque n est régulier et que $\log|n|$ est borné d'un côté, il suffit de montrer l'existence de $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|n(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2})| d\varphi_1 d\varphi_2$.

[13]) Les fonctions n_ν (ou p_ν) seront appelées conformément à nos conventions, fonctions-zéros (ou pôles) de f.

$$(2.6)\quad \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2, n^{-1}] = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|n(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2})\right| d\varphi_1 d\varphi_2 - \log\left|n(0,0)\right|\text{[14]}.$$

Remarque. L'introduction des fonctions de la classe **D** permet de généraliser le principe de Lindelöf.

Soit $f = \dfrac{\prod\limits_{\nu=1}^{l} n_\nu}{\prod\limits_{\nu=1}^{k} p_\nu} e^h$ *avec* p_ν, n_ν, h *régulières dans* $\overline{\mathfrak{C}}$. *Supposons de plus que* $f(z_1, z_2)$ *reste régulière sur* $\mathfrak{F}^2$ *et ne s'y annule pas. On a alors dans* $\mathfrak{C}$:

$$(2.7)\quad \log|f(z_1, z_2)| \leqq \max_{\text{sur } \mathfrak{F}^2} (\log|f(z_1, z_2)|) + \\ + \sum_{\nu=1}^{k} \Gamma(z_1, z_2; p_\nu) - \sum_{\nu=1}^{l^*} \Gamma(z_1, z_2; n_\nu), \quad l^* \leqq l.$$

Démonstration. $q(z_1, z_2) = \dfrac{f(z_1, z_2)\prod\limits_{\nu=1}^{k} p_\nu(z_1, z_2)}{\prod\limits_{\nu=1}^{l^*} n_\nu(z_1, z_2)}$ est régulier dans $\overline{\mathfrak{C}}$, par conséquent

$$Q(z_1, z_2) \equiv \log|q(z_1, z_2)| = \log|f(z_1, z_2)| + \\ + \sum_{\nu=1}^{k} \log|p_\nu(z_1, z_2)| - \sum_{\nu=1}^{l^*} \log|n_\nu(z_1, z_2)|$$

est dans $\mathfrak{C}$ une fonction de la classe **D**. D'autre part les fonctions

$$-D_\nu(z_1, z_2) = -\Gamma(z_1, z_2; p_\nu) - \log|p_\nu(z_1, z_2)|,$$
$$D_\nu^*(z_1, z_2) = \Gamma(z_1, z_2; n_\nu) + \log|n_\nu(z_1, z_2)|$$

sont régulières doublement harmoniques dans $\mathfrak{C}$. La fonction

$$Q(z_1, z_2) - \sum_{\nu=1}^{k} D_\nu(z_1, z_2) + \sum_{\nu=1}^{l^*} D_\nu^*(z_1, z_2) = \\ = \log|f(z_1, z_2)| - \sum_{\nu=1}^{k} \Gamma(z_1, z_2, p_\nu) + \sum_{\nu=1}^{l^*} \Gamma(z_1, z_2, n_\nu)$$

---

[14]) L'expression (2.6) a été considérée par M. Bloch, Sur la non-uniformisabilité par les fonctions méromorphes des variétés algébriques les plus générales [C. R. **187** (1925), 276—278], et par M. Henri Cartan, Sur la croissance des fonctions méromorphes d'une ou de plusieurs variables complexes [C. R. **188** (1929), 1374—1376], Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables, et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable [C. R. **187** (1929), 521—523].

appartient par conséquent à la classe **D**. En appliquant le lemme I (voir p. [20] 155), on obtient (2.7). (2.7) peut être aussi mis sous la forme

$$|f(z_1, z_2)| \leqq \max_{\text{sur } \mathfrak{F}^2} (|f(z_1, z_2)|) \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k} e^{\Gamma(z_1, z_2; p_\nu)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{l^*} e^{\Gamma(z_1, z_2; n_\nu)}}.$$

En posant $z_1 = z_2 = 0$, on obtient

$$|f(0, 0)| \leqq \max_{\text{sur } \mathfrak{F}^2} (|f(z_1, z_2)|) \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k} e^{\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2, p_\nu^{-1}]}}{\prod\limits_{\nu=1}^{l^*} e^{\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2, n_\nu^{-1}]}}.$$

Nous allons étudier les propriétés de $\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2, n^{-1}]$, en supposant que $n(z_1, z_2)$ est une fonction entière, avec $n(0, z_2) \not\equiv 0$ et $n(0, 0) \neq 0$. De plus nous supposerons dans ce qui suit que $r_1 = r$, $r_2 = Ar^\alpha$ et désignerons $\mathfrak{F}^2$ par $\mathfrak{F}^2(r)$.

I. $\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ *est une fonction convexe de* $\log r$. Pour le démontrer [15]) nous supposons tout d'abord que $\alpha = \frac{m}{q}$ est rationnel. On peut trouver des entiers a, b tels qu'on ait: $am - bq = 1$. En introduisant au lieu de φ_1 et φ_2 les quantités u, v définies par $\varphi_1 = au + qv$, $\varphi_2 = bu + mv$, $\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ devient

$$\int_0^{2\pi} du \left\{ \int_0^{2\pi} \log |n\,(r_1 e^{iau} e^{iqv},\ r_2 e^{ibu} e^{imv})|\, dv \right\} - \log |n(0,0)|.$$

En posant $r_1 = B\varrho^q$, $r_2 = C\varrho^m$ $\left(C = AB^{\frac{m}{q}}\right)$, $\zeta = \varrho e^{iv}$, nous obtenons

$$\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}] = \int_0^{2\pi} du \left\{ \int_0^{2\pi} \log |n(Be^{iau}\zeta^q,\ Ce^{ibu}\zeta^m)|\, dv \right\} - \log |n(0,0)|.$$

Puisqu'on peut poser

$$n(Be^{iau}\zeta^q,\ Ce^{ibu}\zeta^m) \equiv h(\zeta),$$

l'intégrale dans le crochet est une fonction convexe de $\log |\zeta|$. Donc notre affirmation est démontrée. Dans le cas où α n'est pas rationnel, on procède par continuité.

II. *Si* $n = n_1 \cdot n_2$, *on a*

$$\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}] = \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), n_1^{-1}] + \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), n_2^{-1}].$$

---

[15]) Dans cette démonstration nous suivons M. Henri Cartan. (Voir sa note, C.R.)

III. *Si n est régulière dans $\overline{\mathfrak{E}}(r)$ et ne s'y annule pas, on a:*

$$N[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}] = 0.$$

Posons:

$$\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}] = \frac{d\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]}{d\log r}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}] = \int_0^r \frac{d\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]}{r^\lambda}.$$

Dans le cas d'une variable complexe $\nu(r, n^{-1})$ donne le nombre des points-zéros de n dans le cercle $|z| \leqq r$. Nous *allons établir dans le cas de deux variables complexes le lien entre* $\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$, $\mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ *et les variétés-zéros de* $n(z_1, z_2)$.

Nous supposons, que $n(0,z_2) \not\equiv 0$ et pour simplifier, nous nous bornerons tout d'abord à considérer le cas de

$$\mathfrak{F}^2(r) = E\,[\,|z_1| = r,\ |z_2| = Ar^\alpha \equiv r_2]\,,$$

et supposons qu'il ne contient aucun point $\{z_1^{(k)}, z_2^{(k)}\}$ tel que

1⁰ $\qquad n(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}) = 0$ avec $z_1^{(k)} = 0$

ou bien

2⁰ $\qquad n(z_1^{(k)}, z_2^{(k)}) = 0$ et $\left[\dfrac{dn(z_1, z_2)}{dz_1}\right]_{z_\nu = z_\nu^{(k)}} = 0.$

Pour la commodité du langage nous appellerons tels points, s'il y en a, des *points exceptionnels*. Sous l'hypothèse mentionnée on trouve:

$$\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{|a_k(z_2)|\leqq r} \log\frac{r}{|a_k(z_2)|}\right] d\varphi_2 + \tag{2.9}$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|n(0, r_2e^{i\varphi_2})|\, d\varphi_2 - \log|n(0,0)|,$$

$$\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{|a_k(z_2)|\leqq r}\left(1 - \alpha\frac{d\log|a_k(z_2)|}{d\log r_2}\right)\right] d\varphi_2 + \tag{2.10}$$
$$+ \alpha\nu(r_2; n^{-1}(0, z)) = \qquad [15a]$$

[15a] On a: $\dfrac{d}{dr}\left[\sum_{|a_k(z_2)|\leqq r} \log\dfrac{r}{|a_k(z_2)|}\right] = \sum_{|a_k(z_2)|\leqq r} \dfrac{d}{dr}\left[\log\dfrac{r}{|a_k(z_2)|}\right]$, car

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{r<|a_k(z_2)|\leqq r+\varepsilon} \log\frac{r+\varepsilon}{|a_n(z_2)|} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_n \log\left|\frac{r+\varepsilon}{r+\varepsilon_n}\right| = 0 \qquad (0 < \varepsilon_n \leqq \varepsilon).$$

$$(2.10a) \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\nu(r; n^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2})) - \alpha\mathcal{E}(r_2; r; n^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2}))\Big]d\varphi_2 + \\ + \alpha\nu(r_2; n^{-1}(0, z)),$$

où $\mathcal{E}$ et ν ont la signification indiquée à la page [5] 140, $[a_k(z_2^0)$ désignent les points-zéros de $n[z, z_2^0]$ (z_2^0 étant fixe)], $r_2 = Ar^\alpha$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$. La différentiation sous le signe $\int$ est légitime, car on a:

$$\frac{d\log|a_k(z_2)|}{d\log r_2} \leqq \left|\frac{d\log a_k(z_2)}{d\log r_2}\right| = \left|\frac{1}{a_k(z_2)}\frac{da_k(z_2)}{dz_2}\frac{dz_2}{dr_2}r_2\right|,$$

et en vertu de 1^0 $a_k(z_2) \neq 0$ et en vertu de 2^0 on a $\dfrac{da_k(z_2)}{dz_2} \neq \infty$, ce qui entraine une borne supérieure finie pour (2.11).

(Le nombre de points-zéros de $n(z, r_2e^{i\varphi_2})$ dans le cercle $|z| \leqq r$ est évidemment fini.)

Dans (2.10a) nous avons donné une interprétation pour $\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ et *nous allons maintenant interpréter* $\mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$.

Par les conditions 1^0 et 2^0 sont exclues certaines valeurs de r formant un ensemble des points isolés, que nous désignerons $R_1, R_2, \ldots$ $(R_k < R_{k+1})$ [16]). Nous appellerons dans ce qui suit ces valeurs les *r_1-coordonnées exceptionnelles.* (Ces valeurs dépendent de $n(z_1, z_2)$, de A et α.)

Pour simplifier nous ferons les hypothèses suivantes sur n:

I. $n(z_1, z_2)$ ne possède sur chaque variété $|z_1| = R_k$, $|z_2| = AR_k^\alpha \equiv T_k$ qu'un nombre fini de points-zéros.

II. $n(z_1, z_2)$ ne possède aucun facteur de la forme z_2 — const.

En vertu de (2.10a) on a pour chaque $P_k = R_k + \varepsilon$, $\varrho_{k+1} = R_k - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

$$(2.11) \qquad \int_{P_k}^{\varrho_{k+1}}\frac{d\mathbf{n}}{r^\lambda} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Bigg[\int_{P_k}^{\varrho_{k+1}}\frac{d\nu(r; n^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2}))}{r^\lambda} - \\ - \alpha\int_{P_k}^{\varrho_{k+1}}\frac{d\mathcal{E}(r_2; r; n^{-1}(z, r_2e^{i\varphi_2}))}{r^\lambda}\Bigg]d\varphi_2 + \alpha\int_{P_k}^{\varrho_{k+1}}\frac{d\nu(r_2; n^{-1}(0, z))}{r^\lambda}.$$

$\int$ désigne maintenant l'intégrale de Stieltjes; le changement de l'orde de l'intégration dans le second membre de (2.11) est légitime.

---

[16]) Dans le cas où sur $\mathfrak{F}^2(r)$ il y a plusieurs points exceptionnels $\{z_1^{(k)}, z_2^{(k)}\}$, cette valeur de r figurera dans la suite une fois.

Soient R_k, $k = 1, 2, \ldots, s$ les r_1-coordonnées exceptionnelles de l'intervalle $0 \leqq r_1 \leqq \sigma$, $R_s < \sigma < R_{s+1}$; nous posons $\Delta = A\sigma^\alpha$, $\int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} = \int_0^{\varrho_1} + \sum_{k=1}^{s-1} \int_{P_k}^{\varrho_{k+1}} + \int_{P_s}^{\sigma}$.

D'après (2.11) on a

$$\int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{d\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]}{r^\lambda} = \tag{2.12}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_2 [I_{1\varepsilon}(\sigma, \varphi_2) - \alpha I_{2\varepsilon}(\sigma, \varphi_2)] + \alpha A^\mu I_{3\varepsilon}(\Delta),$$

où on a posé $\mu = \dfrac{\lambda}{\alpha}$ et

$$I_{1\varepsilon}(\sigma, \varphi_2) = \int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{d\nu[r; n^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2})]}{r^\lambda}, \tag{2.13}$$

$$I_{2\varepsilon}(\sigma, \varphi_2) = \int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{d\mathcal{E}[r_2; r; n^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2})]}{r^\lambda}, \tag{2.14}$$

$$I_{3\varepsilon}(\Delta) = \int_0^{\Delta}{}_{\varepsilon} \frac{d\nu[r_2, n^{-1}(0, z_2)]}{r_2^\mu}. \tag{2.15}$$

Nous allons maintenant passer à la limite $\varepsilon = 0$ dans les intégrales (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) et remplacer les intégrales au sens de Cauchy par des intégrales ordinaires (de Stieltjes).

En vertu de I (voir p. [23] 158) $\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ est une fonction convexe de $\log r$ et par conséquent $\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ est une fonction non décroissante. En supposant qu'elle reste continue pour toutes les r_1-valeurs exceptionnelles, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\sigma}{}_{\varepsilon} \frac{d\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]}{r^\lambda} = \int_0^{\sigma} \frac{d\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]}{r^\lambda} = \mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]. \tag{2.16}$$

Si au contraire $\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ est discontinue pour $r = R_k$, pour obtenir l'intégrale à gauche dans (2.16), il faut évidemment retrancher de $\mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ la somme $\sum \dfrac{L_k}{R_k^\lambda}$, L_k représentant le saut de $\mathbf{n}$ au point R_k et en comptant une seule fois les valeurs égales de R_k.

Si nous désignons par ζ_k les points-zéros de $n(0, z)$, qui ne se trouvent pas sur les circonférences $|z| = T_k$ on obtient

$$(2.17) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} I_{3\varepsilon}(\Delta) = \Sigma_\Delta |\zeta_s|^{-\mu}, \qquad \Sigma_\Delta \equiv \sum_{|\zeta_s| \leqq \Delta} .$$

Nous passons aux intégrales $I_{1\varepsilon}$ et $I_{2\varepsilon}$.

Soient

$$\mathfrak{T}_\Delta = E[|z_2| \leqq A|z_1|^\alpha \leqq \Delta], \quad \mathfrak{s}^3_\Delta = E[|z_2| = A|z_1|^\alpha \leqq \Delta]$$

et

$$\mathfrak{t}^3_\Delta = \mathfrak{T}_\Delta \cdot \mathfrak{r}^3, \qquad \mathfrak{S}^2_\Delta = \mathfrak{s}^3_\Delta \cdot \mathfrak{r}^3$$

leurs intersections avec l'espace $\mathfrak{r}^3 = E[\arg z_2 = \varphi_2 = \text{const.}]$.

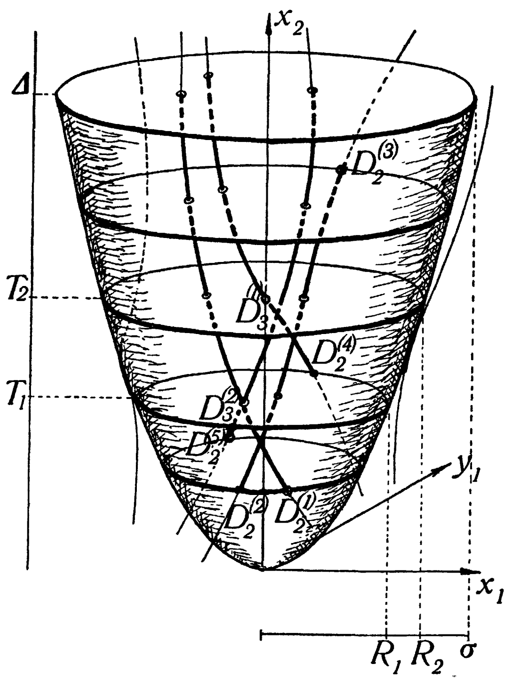

Fig. 1.

Nous avons désigné la variété-zéro de $n(z_1, z_2)$ par $\mathfrak{N}^2$. Nous posons

$$(2.18) \qquad \mathfrak{w}^1_\Delta = \mathfrak{N}^2 \cdot \mathfrak{t}^3_\Delta .$$

En vertu de nos considérations de la page [16] 151 et l'hypothèse II, p. [25] 160, on peut présenter $\mathfrak{w}^1_\Delta$ sous la forme

$$(2.19) \qquad z_1 = a_k(r_2 e^{i\Phi_2}), \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu(r; n^{-1}(z, r_2 e^{i\Phi_2}))\ ^{17)},$$

17) $a_k(r_2 e^{i\Phi_2})$, $k = 1, 2, \ldots$, $\nu(r; n^{-1}(z, r_2 e^{i\Phi_2}))$ donne les points-zéros de $n(z, r_2 e^{i\Phi_2})$ situés dans $|z| \leqq r$.

ayant au voisinage de chaque point $\{Z_1, Z_2\}$ le développement

$$(2.20) \qquad a_k(z_2) = Z_1 + \beta(z_2 - Z_2)^{l_k} + \ldots,$$

l_k est un nombre entier et $Z_1 \neq 0$ dans chaque point de $\mathfrak{T}_\Delta$, sauf aux points exceptionnels, où l'une au moins de ces circonstances n'est pas réalisée ($Z_1 = 0$ ou bien l_k rationnel, non entier).

Désignons par $r_1^{(s)}(\varphi_2)$ les valeurs de r_1 pour lesquelles la fonction $\nu(r; n^{-1}(r, r_2 e^{i\varphi_2}))$ subit un saut. Soit $\delta_s(\varphi_2)$ la grandeur (avec un signe) du saut correspondant. En vertu de l'hypothèse I les φ_2, pour lesquels au moins une valeur $r_1^{(s)}(\varphi_2)$ coïncide avec un R_k, forment un ensemble au plus dénombrable, et on a évidemment

$$(2.21) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{1\varepsilon}(\sigma, \varphi_2)\, d\varphi_2 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Sigma_\sigma \delta_s(\varphi_2) \cdot \left| r_1^{(s)}(\varphi_2) \right|^{-\lambda} d\varphi_2, \quad \Sigma_\sigma \equiv \sum_{|z_1^{(s)}(\varphi_2)| \leqq \sigma} .$$

Pour ce qui suit il est nécessaire encore de considérer les points $\{z_1 = a_k(T_\varkappa e^{i\varphi_2}),\ z_2 = T_\varkappa e^{i\varphi_2}\}$ d'intersection de $\mathfrak{w}_\Delta^1$ avec le cercle $|z_1| \leqq R_\varkappa$, $z_2 = T_\varkappa e^{i\varphi_2}$. Il est utile de distinguer trois espèces de ces points, que nous désignerons dans ce qui suit par $D_l^{(s)}$, $l = 1, 2, 3$, à savoir les points $D_1^{(s)}$, qui sont les points non exceptionnels, pour lesquels on a $\left|a_k(T_\varkappa e^{i\varphi_2})\right| < R_\varkappa$; $D_2^{(s)}$, points non exceptionnels, pour lesquels on a $\left|a_k(T_\varkappa e^{i\varphi_2})\right| = R_\varkappa$ et enfin les points exceptionnels: $D_3^{(s)}$. (Ceux-ci ont été subdivisés en deux groupes, voir p. [24] 159.)

Passons à l'intégrale $I_2(\sigma, \varphi_2)$. Par deux intégrations par parties, on obtient

$$(2.22) \quad \int_{P_k}^{\varrho_{k+1}} \frac{d\mathcal{E}[r_2; r; n(z, r_2 e^{i\varphi_2})]}{r^\lambda} = \\ = \left| \frac{1}{r^\lambda} \sum\nolimits_r \frac{d \log |a_k(z_2)|}{d \log r_2} + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{1}{r^\lambda} \Sigma_r \log |a_k(z_2)| \right|_{P_k}^{\varrho_{k+1}} + \\ + \frac{\lambda^2}{\alpha} \int_{P_k}^{\varrho_{k+1}} \frac{1}{r^{\lambda+1}} \Sigma_r \log |a_k(z_2)|, \quad z_2 \equiv r_2 e^{i\varphi_2},\ \Sigma_r \equiv \sum_{|a_k(z_2)| \leqq r} ,$$

$\log |a_k(z_2)|$ étant aux points $D_3^{(s)}$ infini comme $\log(r - R_\varkappa)$ et étant fini en tous les autres points, on a

$$(2.23) \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\sigma} \frac{1}{r^{\lambda+1}} \Sigma_r \log |a_k(z_2)|\, dr = \int_0^{\sigma} \frac{1}{r^{\lambda+1}} \Sigma_r \log |a_k(z_2)| .$$

La sommation faite sur les deux premiers termes de (2.22) donne, en posant $P_k = R_k + \varepsilon$, $\varrho_k = R_k - \varepsilon$, $\mathsf{T}_k = A P_k^\alpha$, $\tau_k = A\varrho_k^\alpha$,

$$(2.24)\quad \frac{1}{\sigma^\lambda}\sum\nolimits_r \left[\left(\frac{d\log|a_k(z_2)|}{d\log r_2}\right)_{r_2=\Delta} + \frac{\lambda}{\alpha}\log\left|a_k(\Delta e^{i\varphi_2})\right|\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{s}\left\{\left[\sum\nolimits_{P_k}\frac{1}{P_k^\lambda}\left(\frac{d\log|a_k(z_2)|}{d\log r_2}\right)_{r_2=\mathsf{T}_k} - \sum\nolimits_{\varrho_k}\frac{1}{\varrho_k^\lambda}\left(\frac{d\log|a_k(z_2)|}{d\log r_2}\right)_{r_2=\tau_k}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\alpha}\left[\sum\nolimits_{P_k}\frac{1}{P_k^\lambda}\log\left|a_k(\mathsf{T}_k e^{i\varphi_2})\right| - \sum\nolimits_{\varrho_k}\frac{1}{\varrho_k^\lambda}\log\left|a_k(\tau_k e^{i\varphi_2})\right|\right]\right\} =$$

$$= i_1(\varphi_2) - \left\{i_2(\varphi_2) + \frac{\lambda}{\alpha} i_3(\varphi_2)\right\}.$$

On obtient

$$(2.25)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i_1(\varphi_2)d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{\sigma^\lambda}\left[\mathcal{E}(\Delta;\sigma;n^{-1}(z,\Delta e^{i\varphi_2})) + \frac{\lambda}{\alpha}\mathcal{L}(\sigma;n^{-1}(z,\Delta e^{i\varphi_2}))\right]\right\}d\varphi_2 .$$

(Pour la signification de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$ voir p. [5] 140.)

Nous considérons maintenant $i_2(\varphi_2)$. Comme nous l'avons indiqué, nous devons distinguer trois espèces de points, à savoir $D_k^{(s)}$, $k = 1, 2, 3$. On a

$$\frac{d\log|a_k(z_2)|}{dr_2} = Re\left[\frac{d\log a_k(z_2)}{dz_2} e^{i\Phi_2}\right]$$

et $\log a_k(z_2)$ étant en chaque point $D_1^{(s)}$ une fonction régulière et par conséquent possédant une dérivée continue, on a

$$(2.26)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{P_k^\lambda}\left(\frac{d\log|a_k(r_2e^{i\Phi_2})|}{dr_2}\right)_{r_2=\mathsf{T}_k} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varrho_k^\lambda}\left(\frac{d\log|a_k(r_2e^{i\Phi_2})|}{dr_2}\right)_{r_2=\tau_k}\right] = 0 .$$

On obtient un résultat analogue pour $i_3(\varphi_2)$ en chaque point $D_1^{(3)}$.

Dans le cas des points $D_2^{(s)}$, un des deux termes dans les crochets [ ] de la formule (2.24) disparaît et l'autre donne une valeur finie. En vertu de l'hypothèse I, cette circonstance ne se présente que pour un nombre fini de valeurs de φ_2 et par conséquent la présence de ces points ne change pas le résultat de l'intégration par rapport à φ_2.

Le cas de points $D_3^{(s)}$. En vertu du lemme de Weierstraß on peut trouver un voisinage $\mathfrak{H}$ de $\{Z_1, Z_2 = T_2 e^{i\Phi_2}\}$ tel qu'on ait pour $a_k(z_2)$ le développement (2.20) avec $Z_1 = 0$ ou bien l_k rationnel

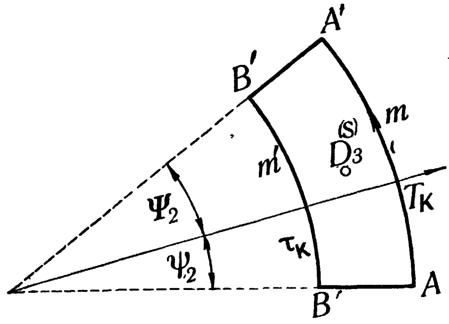

Fig. 2.

(non entier). Si on choisit δ et δ_s, $s = 1, 2$, assez petits pour que les points $\{z_1 = a_k(r_2 e^{i\varphi_2}), z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}\}$ $\psi_2 = \Phi_2 - \delta \leqq \varphi_2 \leqq \Phi_2 + + \delta \equiv \Psi_2$, $\tau_k = T_k - \delta_2 \leqq r_2 \leqq T_k + \delta_2 = \mathrm{T}_k$ se trouvent dans $\mathfrak{H}$ on a à considérer

$$(2.26)\quad \int_{\psi_2}^{\Psi_2} \frac{1}{P_k^\lambda} \left(\frac{d \log |a_k(r_2 e^{i\varphi_2})|}{d \log r_2}\right)_{r_2 = \mathrm{T}_k} d\varphi_2 - \\ - \int_{\psi_2}^{\Psi_2} \frac{1}{\varrho_k^\lambda} \left(\frac{d \log |a_k(r_2 e^{i\varphi_2})|}{d \log r_2}\right)_{r_2 = \tau_k} d\varphi_2 .$$

D'autre part on a:

$$\left(\frac{d \log |a_k(r_2 e^{i\varphi_2})|}{dr_2}\right)_{r_2 = \mathrm{T}_k} d\varphi_2 = \\ = \left[\frac{d\, Im\, [\log a_k(r_2 e^{i\varphi_2})]}{d\varphi_2}\right]_{r_2 = \mathrm{T}_k} d\varphi_2 = Im\, [d \log a_k(\mathrm{T}_k e^{i\varphi_2})]$$

(Im = la partie imaginaire) et (2.26) devient

$$(2.27)\quad Im \left[\frac{1}{P_k^\lambda} \int_{\mathrm{T}_k e^{i\psi_2}}^{\mathrm{T}_k e^{i\Psi_2}} d \log a_k(\zeta) - \frac{1}{\varrho_k^\lambda} \int_{\tau_k e^{i\psi_2}}^{\tau_k e^{i\Psi_2}} d \log a_k(\zeta)\right] = \\ = Im \left[\frac{1}{P_k^\lambda} \int_{AmA'B'mBA.} d \log a_k(\zeta)\right] +$$

$$+Im\left[\left(\frac{1}{\varrho_k^\lambda}-\frac{1}{P_k^\lambda}\right)\int_{\tau_k e^{i\Psi_2}}^{\tau_k e^{i\psi_2}} d\log(\zeta) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{P_k^\lambda}\int_{A'}^{B'} d\log a_k(\zeta) - \frac{1}{P_k^\lambda}\int_{B}^{A} d\log a_k(\zeta)\right].$$

Maintenant il faudra distinguer deux groupes de points $D_3^{(s)}$ [voir p. [24] 159, (2.19) et (2.20)]: dans le premier entreront ceux pour lesquels $Z_1 \neq 0$, dans le second avec $Z_1 = 0$. Si on fait tendre vers zéro dans la dernière formule ε et par conséquent δ_1 en maintenant δ fixe, on voit immédiatement pour les points du premier groupe que $Im\left[\int d\log a_k(\zeta)\right]$ tend vers 0, et pour les points du second groupe tend vers $\frac{2\pi l_k}{R_k^\lambda}$, l_k étant l'indice du point exceptionnel. Toutes les autres intégrales pour n'importe quel point $D_3^{(s)}$ tendent vers zéro.

[Car $\frac{1}{\varrho_k^\lambda}-\frac{1}{P_k^\lambda}=\frac{1}{(R_k-\varepsilon)^\lambda}-\frac{1}{(R_k+\varepsilon)^\lambda}=2\lambda\varepsilon R_k^{-\lambda-1}+\ldots$ et le premier terme dans la deuxième ligne de (2.27) se comporte comme $\varepsilon\log\varepsilon$.]

On verrait de la même manière que $\int_{\varphi_2=\psi_2}^{\varphi_2=\Psi_2} i_3(\varphi_2)d\varphi_2$ donne aussi dans le cas des points exceptionnels une contribution nulle.

En résumé, *en faisant les hypothèses* I *et* II (voir p. [25] 160) *et en supposant que* $\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]$ *reste continue pour les* $r_1 = R_k$ *nous obtenons, en vertu de* (2.16), (2.17), (2.21), (2.23), (2.25)

$$\text{(2.28)}\quad \mathbf{E}_\lambda[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}] = \boldsymbol{M}_{\varphi_2}\Big[\Sigma\,\delta_s(\varphi_2)\cdot\left|r_1^{(s)}(\varphi_2)\right|^{-\lambda} - $$

$$- \lambda^2\int_0^\sigma \frac{1}{r^{\lambda+1}}\mathcal{L}(r; n^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2}))dr -$$

$$-\frac{\alpha}{\sigma^\lambda}\left(\frac{d\mathcal{L}(\sigma; n^{-1}(z, re^{i\varphi_2}))}{d\log r}\right)_{r=\Delta} -$$

$$-\frac{\lambda}{\sigma^\lambda}\mathcal{L}(\sigma; n^{-1}(z, \Delta e^{i\varphi_2}))\Big] + \Sigma\alpha A^\mu\left|\zeta_s\right|^{-\mu} + \sum\frac{l_k}{R_k^\lambda},$$

où $\boldsymbol{M}_\varphi[\,..\,]$ *donne la valeur moyenne* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\,..\,]\,d\varphi$, *la* $\mathcal{L}(r; g(z,\zeta))$ *la somme* $\sum_{|a_k(\varrho)|\leq r}\log|a_k(\varrho)|$ *des logarithmes des points zéros* $g(z,\varrho)$ *situés dans le cercle* $|z|\leq r$ *et la somme* $\sum\frac{l_k}{R_k^\lambda}$ *est étendue à tous les points exceptionnels* $D_3^{(s)}$ *du second groupe.*

Pour une fonction méromorphe $f = \frac{n}{p}$, n, p étant premiers, nous définissons naturellement

$$\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), f^{-1}] = \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), n^{-1}]. \tag{2.29}$$

L'introduction des expressions **N**, **n**, $\mathbf{E}_\lambda$ permet de reprendre des procédés connus de la théorie d'une variable, dûs à M.M. Nevanlinna, Valiron et autres [18]). Posons comme dans cette théorie

$$\mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] = \tag{2.30}$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{f(re^{i\varphi_1}, Ar^\alpha e^{i\varphi_2}) - a} \right| d\varphi_1 d\varphi_2,$$

$$\mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), f] = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| f(re^{i\varphi_1}, Ar^\alpha e^{i\varphi_2}) \right| d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Nous pouvons écrire la relation (2.5) sous la forme

$$\log |f(0,0)| + \mathbf{m}[\mathfrak{F}(r^2), f^{-1}] + \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), f^{-1}] = \tag{2.5a}$$
$$= \mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), f] + \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), f].$$

Nous posons enfin

$$\mathbf{T}[\mathfrak{F}^2(r), f] = \mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), f] + \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), f].$$

De (2.5a) on déduit le

THÉORÈME IV. *Soit* $f(z_1, z_2)[f(0,0) \neq 0, f(0,0) \neq a, f(0, z_2) \not\equiv 0]$ *une fonction méromorphe dans* $|z_k| < \infty$, $k = 1, 2$, *régulière au voisinage du point* $z_1 = 0$, $z_2 = 0$. *Alors on a*

$$\mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] + \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] = \tag{2.31}$$
$$= \mathbf{T}[\mathfrak{F}^2(r), f] + h(r),$$

où on a: $|h(r)| \leq \overset{+}{\log} |f(0,0) - a| + \overset{+}{\log} |a| + \log 2$.

REMARQUE. On peut écrire aussi $\sum\limits_s \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), n_s]$, au lieu de $\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$, $\dfrac{[f(z_1, z_2) - a]}{\prod\limits_s n_s}$ étant régulier.

DÉMONSTRATION. (2.31) est une conséquence presque immédiate de la formule (2.5a). En effet, on aura d'abord

---

[18]) Dans les considérations suivantes, nous employons la méthode de M. R. Nevanlinna; voir son livre Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929, § 1 et § 3.

$$(2.32)\quad \{\mathrm{m}[\mathfrak{F}^2(r), f-a] + \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), f-a]\} - \{\mathrm{m}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] + \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]\} = \log|f(0,0) - a|.$$

Or

$$\overset{+}{\log}|f-a| \leqq \overset{+}{\log}(|f| + |a|) \leqq \overset{+}{\log}|f| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2$$

et

$$\overset{+}{\log}|f| \leqq \overset{+}{\log}(|f-a| + |a|) \leqq \overset{+}{\log}|f-a| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$

d'où l'on voit que la différence des valeurs $\mathrm{m}[\mathfrak{F}^2(r), f-a]$ et $\mathrm{m}[\mathfrak{F}^2(r), f]$ reste au dessous de $\overset{+}{\log}|a| + \log 2$ en valeur absolue. En observant encore que, les fonctions $f - a$ et f ayant les mêmes pôles, on peut remplacer $\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), f - a]$ par $\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), f]$, on obtiendra:

$$(2.33)\quad \Big|\Big\{\mathrm{m}[\mathfrak{F}^2(r), f-a] + \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), f-a]\Big\} - \Big\{\mathrm{m}[\mathfrak{F}^2(r), f] + \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), f]\Big\}\Big| \leqq \overset{+}{\log} a + \log 2.$$

En combinant les deux relations (2.32) et (2.33), on trouve que l'expression $h(r)$ introduite dans (2.31) satisfait à la relation indiquée dans le théorème.

Lemme II. *Pour une valeur donnée $\lambda > 0$ les intégrales*

$$(2.34)\quad \int_r^\infty \frac{\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{r^{\lambda+1}}\,dr, \qquad \int_r^\infty \frac{\mathrm{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{r^{\lambda+1}}\,dr$$

et

$$(2.35)\quad \mathrm{E}_\lambda[(f-a)^{-1}] = \lim_{r\to\infty} \mathrm{E}_\lambda[\mathfrak{F}^2(r), [f-a)^{-1}]$$

sont en même temps convergentes ou divergentes.

Démonstration. En intégrant par parties, on aura d'abord:

$$(2.36)\quad \int_{r^0}^{r} \frac{\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{r^{\lambda+1}}\,dr = \frac{\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r^0), (f-a)^{-1}]}{\lambda r^{0\lambda}} - \frac{\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{\lambda r^\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_{r^0}^{r} \frac{\mathrm{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-q)^{-1}]}{r^{\lambda+1}}\,dr,$$

d'où l'on conclut d'après I (voir p. [23] 158) que la convergence de l'intégrale $\int_{r^0}^\infty \frac{\mathrm{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-q)^{-1}]}{r^{\lambda+1}}\,dr$ entraîne celle de l'intégrale

$\int\limits_{r^0}^{\infty} \frac{\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{r^{\lambda+1}} dr$. Réciproquement, si la dernière intégrale est convergente, on aura pour $\varepsilon > 0$ et pour toute valeur de r suffisamment grande

$$\varepsilon > \int\limits_{r}^{\infty} \frac{\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{r^{\lambda+1}} dr \geqq$$

$$\geqq \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] \int\limits_{r}^{\infty} \frac{dr}{r^{\lambda+1}} = \frac{\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{\lambda r^{\lambda}}.$$

La dernière expression reste donc finie lorsque r croît indéfiniment, et l'on déduit par suite de la relation (2.36) que l'intégrale $\int\limits_{r}^{\infty} \frac{\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{r^{\lambda+1}} dr$ est finie.

D'autre part on a:

$$\int\limits_{r^0}^{r} \frac{\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{r^{\lambda+1}} dr = \frac{\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r^0), (f-a)^{-1}]}{\lambda {r^0}^{\lambda}} - \frac{\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{\lambda r^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} \int\limits_{r^0}^{r} \frac{d\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]}{r^{\lambda}} dr. \tag{2.38}$$

En vertu de I, p. [23] 158, $\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$ est une fonction non décroissante de $\log r$. En répétant le raisonnement précédent, on démontre la seconde partie du lemme.

Nous définissons d'une façon analogue à celle utilisée dans la théorie d'une variable, comme *ordre apparent* de la croissance d'une fonction méromorphe par rapport à la suite des surfaces

$$\mathfrak{S}^3 \equiv \mathfrak{S}^3(A, \alpha) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{F}^2(r) = E[|z_1| = r,\ |z_2| = A r^{\alpha},\ 0 < r < \infty],$$

la quantité

$$\lambda \equiv \lambda(A, \alpha) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \mathbf{T}[\mathfrak{F}^2(r), f]}{\log r}. \tag{2.39}$$

Nous allons montrer, que dans le cas d'une fonction entière, cette quantité coïncide avec

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log \mathbf{M}[\mathfrak{F}^2(r), f]}{\log r}, \quad \mathbf{M}[\mathfrak{F}^2(r), f] = \max_{\{z_1, z_2\} \text{ sur } \mathfrak{F}^2} |f(z_1, z_2)|.$$

On a notamment comme dans le cas d'une variable *pour toute fonction entière* $n(z_1, z_2)$ *l'inégalité*

$$(2.40)\quad \mathrm{T}[\mathfrak{F}^2(r), n] \leqq \overset{+}{\log} \mathrm{M}[\mathfrak{F}^2(r), n] \leqq$$
$$\leqq \left(\prod_{k=1}^{2} \frac{\varrho_k + r_k}{\varrho_k - r_k}\right) \mathrm{T}[\mathfrak{F}^2(\varrho), n]; \qquad \varrho_1 = \varrho, \varrho_2 = A\varrho^\alpha.$$

Démonstration. $n(z_1, z_2)$ étant une fonction entière, on a $\mathrm{T}[\mathfrak{F}^2(r), n] = \mathrm{m}[\mathfrak{F}^2(r), n]$ et la première inégalité de (2.39) est évidente.

D'autre part on a:

$$\log\left|n(r_1e^{i\varphi_2}, r_2e^{i\varphi_2})\right| =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|n(\varrho_1e^{i\psi_1}, \varrho_2e^{i\psi_2})\right| \prod_{k=1}^{2} P(\varrho_k; r_k; \psi_k - \varphi_k)d\psi_k -$$
$$- \sum_{s=1}^{k} \Gamma(r_1e^{i\varphi_1}, r_2e^{i\varphi_2}; n_s); \qquad r_1 = r, r_2 = Ar^\alpha.$$

$\Gamma(z_1, z_2; n_s)$ étant positifs, on a:

$$\overset{+}{\log} \mathrm{M}[\mathfrak{F}^2(r), n] \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{4\pi^2} \prod_{k=1}^{2} \frac{\varrho_k + r_k}{\varrho_k - r_k} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|n(\varrho_1e^{i\psi_1}, \varrho_2e^{i\psi_2})\right| d\psi_1 d\psi_2 =$$
$$= \prod_{k=1}^{2} \frac{\varrho_k + r_k}{\varrho_k - r_k} \mathrm{T}[\mathfrak{F}^2(\varrho), n].$$

Si alors $p > 1$, $\varrho_1 = pr$, $\varrho_2 = Ap^\alpha r^\alpha$ on obtient

$$\mathrm{T}[\mathfrak{F}^2(r), n] \leqq \overset{+}{\log} \mathrm{M}[\mathfrak{F}^2(r), n] \leqq C(p)\, \mathrm{T}[\mathfrak{F}^2(pr), n].$$

Par conséquent on a:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \mathrm{T}[\mathfrak{F}^2(r), n]}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \overset{+}{\log} \mathrm{M}[\mathfrak{F}^2(r), n]}{\log r}.$$

Nous obtenons aussi un théorème analogue à celui de la théorie d'une variable.

Théorème V. *Si f possède sur $\mathfrak{H}^3(A, \alpha)$ l'ordre apparent λ alors:* 1°. *les quantités*

$$\mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}],\ \mathrm{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}],\ \mathrm{m}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^3]$$

sont au plus d'ordre λ.

2°. *les quantités* $\mathrm{E}_{\lambda+\varepsilon}[n_s^{-1}]$ $\left(\frac{f-a}{\prod_s n_s}\text{ étant régulier}\right)$ *existent* *pour tout* $\varepsilon > 0$. *Si le nombre de* n_s *est infini, la somme* $\sum_s \mathbf{E}_{\lambda+\varepsilon}(n_s)$ *converge.*

Démonstration. $\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$ et $\mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}]$ étant toujours positifs, en vertu de (2.31) on a $\mathbf{m}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] \leqq Cr^{\lambda+\varepsilon}$, $\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] \leqq Cr^{\lambda+\varepsilon}$ pour une constante convenable C. L'intégrale $\int\limits_r^\infty \frac{\mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(t), (f-a)^{-1}]}{t^{\lambda+\varepsilon+1}}\,dt$ pour $\varepsilon > 0$ existe, et en vertu du lemme I et de II (voir p. [23] 158) on a:

$$\mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(r), (f-a)^{-1}] \leqq Cr^{\lambda+\varepsilon}, \quad \sum_s \mathbf{E}_{\lambda+\varepsilon}(n_s^{-1}) \leqq Cr^{\lambda+\varepsilon}.$$

En nous restreignant au cas où f est une fonction entière, nous obtenons un théorème qu'on peut considérer comme généralisant le théorème classique de M. Hadamard.

Afin de pouvoir établir des inégalités pour les grandeurs $\mathbf{A}[\mathfrak{b}^3_\Delta, (f-a)^{-1}]$, $\mathbf{D}_\lambda[\mathfrak{F}^2(\sigma), (f-a)^{-1}]$ introduites sur p. [6] 141, il nous faut évaluer les expressions

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{L}[r, f^{-1}(z, Ar^\alpha e^{i\varphi_2})]\,d\varphi\,, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\mathcal{L}[r, f^{-1}(z, Ar^\alpha e^{i\varphi_2})]}{d\log r}\,d\varphi_2\,.$$

De (2.9) on tire

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{L}[r, f^{-1}(z, Ar^\alpha e^{i\varphi_2})]\,d\varphi_2 =$$

$$= \log r \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \nu[r, f^{-1}(z, Ar^\alpha e^{i\varphi_2})]\,d\varphi_2 -$$

$$- \mathbf{N}[\mathfrak{F}^2(r), f^{-1}] + N[r_2, f^{-1}(0, z)]\,.$$

Soit $\mathfrak{F}^{*2}(r)$ la variété $|z_2| = B|z_1|^\beta$, $|z_1| = r$ où $\beta < \alpha$, $B < A$ et posons $\varrho = \frac{1}{A}\varrho_2^{\frac{1}{\alpha}}$, $\varrho^* = \frac{1}{B}\varrho_2^{\frac{1}{\beta}}$, $\varrho_2 > 1$; on a alors par definition

$$\int\limits_\varrho^{\varrho^*} \frac{\nu[t, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})]}{t}\,dt =$$

$$= N[\varrho^*, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})] - N[\varrho, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})]\,, \quad \varrho_2, \varphi_2 \text{ const.}$$

Puisque $\nu[t, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})]$ est une fonction non-décroissante de t, on a

$$(2.41) \quad \nu[\varrho, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})] \leqq \frac{N[\varrho^*, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})] - N[\varrho, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})]}{\log \varrho^* - \log \varrho},$$

ensuite on tire de (2.6)

$$(2.42)\quad \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(r), f^{-1}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N[r, f^{-1}(z, r_2 e^{i\varphi_2})]d\varphi_2 + N[r_2, f^{-1}(0, z)],\quad r_2 = Ar^{\alpha},$$

donc

$$(2.43)\quad \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{L}[\varrho, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})]\, d\varphi_2 \leqq \leqq \frac{\log\varrho\cdot\{\mathrm{N}[\mathfrak{F}^{*2}(\varrho^*), f^{-1}] - \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(\varrho), f^{-1}]\}}{\log\varrho^* - \log\varrho} - \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(\varrho), f^{-1}] + N[\varrho_2, f(0, z)]\,.$$

De manière analogue nous déduisons de (2.10) la formule

$$(2.44)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\mathcal{L}[\varrho, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})]}{d\log\varrho}\, d\varphi_2 = \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\nu[\varrho, f^{-1}(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2})]d\varphi_2 - \mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(\varrho), f^{-1}]\right\} + \nu[\varrho_2, f^{-1}(0, z)] \leqq \leqq \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{\mathrm{N}[\mathfrak{F}^{*2}(\varrho^*), f^{-1}] - \mathrm{N}[\mathfrak{F}^2(\varrho), f^{-1}]}{\log\varrho^* - \log\varrho} - \mathbf{n}[\mathfrak{F}^2(\varrho), f^{-1}]\right\} + \nu[\varrho_2, f^{-1}(0, z)]\,.$$

Supposons

$$\mathrm{T}[\mathfrak{F}^{*2}(r), f] \leqq C_1 r^{\Lambda}.$$

En vertu des formules (2.43), (2.44) et du théorème IV on a pour $\tau > \Lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta}$

$$(2.45)\quad \int_0^{\sigma}\frac{d\varrho}{\varrho^{\tau+1}}\cdot\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{L}\left[\varrho, (f(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2}) - a)^{-1}\right]d\varphi_2\right\} + \frac{1}{2\pi\sigma^{\tau}}\int_0^{2\pi}\mathcal{L}\left[\sigma, (f(z, \Delta e^{i\varphi_2}) - a)^{-1}\right]d\varphi_2 + \frac{1}{2\pi\varrho^{\tau}}\int_0^{2\pi}\frac{d\mathcal{L}\left[\varrho, (f(z, \varrho_2 e^{i\varphi_2}) - a)^{-1}\right]}{d\log r}\,d\varphi_2 \leqq \leqq C_2 + C_3\varrho^{\Lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta} - \tau} + C_4\frac{\nu[\Delta, f^{-1}(0, z)]}{\sigma^{\tau}}\,.$$

De (2.45) on obtient donc en vertu du théorème V et de (2.26) le *corollaire* suivant:

$f(z_1, z_2)$ *désignant une fonction méromorphe et* $\mathfrak{F}^2(r)$ et $\mathfrak{F}^{*2}(r)$ *les variétés* (à deux dimensions) $\mathfrak{F}^2(r) = E[|z_2| = A|z_1|^\alpha, |z_1| = r]$, $\mathfrak{F}^{*2}(r) = E[|z_2| = B|z_1|^\beta, |z_1| = r]$, $B < A$, $\beta < \alpha$, *soit*

$$\mathbf{T}[\mathfrak{F}^2(r), f] \leqq Cr^\lambda, \quad \mathbf{T}[\mathfrak{F}^{*2}(r), f] \leqq C_1 r^\Lambda.$$

On a

$$\mathbf{A}[\mathfrak{d}^3_{Ar^\alpha}, (f-a)^{-1}] \leqq C_5 r^\gamma, \qquad \gamma = \max\left[\lambda, \Lambda\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right];$$

en outre, δ étant une quantité positive quelconque, sous l'hypothèse concernant la croissance de $T(r, f(0, z))$ la valeur limite

$$\lim_{\sigma\to\infty} \mathbf{D}_{\gamma+\delta}[\mathfrak{F}^2(\sigma), (f-a)^{-1}]\ ^{19)}$$

existe.

(Reçu le 10 septembre 1934.)
(Reçu avec des modifications le 10 août 1935.)

---

[19]) Remarquons que nous avons fait quelques hypothèses sur $(f - a)$ [voir p. [25] 160 et [26] 161].