COMPOSITIO MATHEMATICA

STEFAN COHN-VOSSEN

Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 69-133
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__69_0>

Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen

von

Stefan Cohn-Vossen

Leningrad

---

1. Eine topologische Fläche ist eine triangulierbare zweidimensionale unberandete Mannigfaltigkeit. Eine solche Fläche wird zu einer „differentialgeometrischen Fläche", wenn man von einem vollständigen Umgebungssystem der topologischen Fläche ausgeht und in jeder dieser dem Kreisinnern homöomorphen Umgebungen eine Riemannsche Metrik einführt (§ 1); wo zwei Umgebungen übereinandergreifen, wird Übereinstimmung der beiden Metriken gefordert (§ 5). Die Fläche (als Fläche schlechtweg bezeichnen wir von jetzt an eine differentialgeometrische Fläche) ist also definiert ohne Bezug auf Einbettung in den gewöhnlichen oder einen höherdimensionalen Raum, und alle Fragestellungen der vorliegenden Arbeit sind ebenfalls ohne Bezug auf eine solche Einbettung. Natürlich lassen sich alle im Folgenden aufzustellenden Sätze auf die stetig gekrümmten reellen Flächen des gewöhnlichen Raums anwenden. Die meisten Ansätze dürften sich andererseits auf den Fall verallgemeinern lassen, daß eine topologische Fläche mit einer allgemeineren als einer Riemannschen Metrik ausgestattet wird.

2. Eine topologische Fläche T heißt endlich-zusammenhängend, wenn es eine natürliche Zahl k derart gibt, daß jedes System von k paarweise punktfremden Jordankurven auf T den Rand eines kompakten Teilbereichs von T enthält. Eine topologische Fläche T heißt offen oder geschlossen, je nachdem es eine in T divergente Punktfolge gibt oder nicht.

Jede endlichzusammenhängende topologische Fläche T besitzt eine endliche eindimensionale Bettische Zahl p^1. Die zweidimensionale Bettische Zahl p^2 von T ist 1, wenn T geschlossen und orientierbar ist, sonst 0. Die Eulersche Charakteristik $\chi(T) = 1 - p^1 + p^2$ von T ist also eine endliche ganze Zahl, wenn T endlichzusammenhängend. Ist T geschlossen, so endlichzusammenhängend. In diesem Fall läßt sich bekanntlich T in endlichviele Dreiecke triangulieren, und es ist $\chi(T) = e - k + f$, wobei e, k, f beziehentlich die Anzahlen der Eckpunkte, Kanten und Dreiecke irgendeiner solchen Triangulation von T bedeuten.

Dieselbe Formel gilt bekanntlich auch, wenn T eine „berandete Fläche" ist. Eine Punktmenge T heißt eine berandete Fläche, wenn T einem Teilsystem T' einer Triangulation einer topologischen Fläche homöomorph ist, vorausgesetzt, daß T' folgende Eigenschaften hat: T' besteht aus endlichvielen Dreiecken; T' ist zusammenhängend; es gibt in T' eine Randstrecke, d.h. eine Dreiecksseite, an die nur ein einziges Dreieck angrenzt; die Randstrecken setzen sich zu paarweis punktfremden (notwendig nur endlichvielen) Jordankurven zusammen.

3. Jede offne endlichzusammenhängende topologische Fläche T ist einer n-fach punktierten geschlossenen topologischen Fläche homöomorph [1]). Genauer: Zu jeder offnen endlichzusammenhängenden topologischen Fläche $T = T_n$ gibt es eine geschlossene Fläche T_0 und auf T_0 n verschiedene (im Übrigen beliebig auf T_0 wählbare) Punkte m_i, so daß T_n einen Homöomorphismus H auf die Punktmenge $T'_n = T_0 - \sum_{i=1}^{n} m_i$ gestattet. Es ist $\chi(T_n) = \chi(T_0) - n$. Beispiel: Die Abbildung der euklidischen Ebene durch stereographische Projektion auf die einfach punktierte Kugeloberfläche.

Aus dem Homöomorphismus H ist ersichtlich: Jede in T_n divergente Punktfolge (p) läßt sich in höchstens n Teilfolgen (p_i) derart zerlegen, daß für die durch H bestimmten Bildpunktfolgen (p'_i) in T_0 gilt: $p'_i \to m_i$. Um daher auf T_n die „Erstreckung ins Nichtkompakte" zu übersehen, liegt es nahe, auf T_0 jedem Punkt m_i eine dem Kreisinnern homöomorphe Umgebung K'_i derart zuzuordnen, daß die abgeschlossenen Hüllen der K'_i paarweis punktfremd und abgeschlossenen Kreisscheiben homöomorph sind. Dann ist die Punktmenge $B' = T_0 - \sum_{i=1}^{n} K'_i$ eine berandete Fläche, und es ist $\chi(B') = \chi(T_0) - n$, wie leicht aus der Formel $\chi = e - k + f$ ersichtlich. Ist M' eine vorgegebene in T'_n kompakte Punktmenge, so läßt sich die vorstehende Konstruktion so einrichten, daß $M' \subset B'$.

Überträgt man durch H diese Konstruktion von T'_n auf T_n, so folgt: Jede in T_n kompakte Punktmenge M ist in einem Teil-

[1]) Aus den Ausführungen l.c. [31]) läßt sich das leicht schließen.

bereich B von T_n folgender Art enthalten: B ist eine berandete Fläche (also kompakt und abgeschlossen); das Innere von B ist T_n homöomorph, und es ist $\chi(B) = \chi(T_n)$; die Punktmenge $T_n - B$ zerfällt in n Gebiete U'_i, deren jedes einem punktierten Kreisinnern homöomorph ist.

4. Nunmehr nehmen wir an, T_n sei eine differentialgeometrische Fläche F_n. Und zwar soll F_n überdies eine „vollständige" Fläche sein. Diese Flächen sind in einer Arbeit von H. Hopf und W. Rinow[2]) untersucht worden. Eine Fläche F_n heißt vollständig, wenn sie das Postulat erfüllt (§ 12): „Jede in F_n beschränkte Menge ist in F_n kompakt". Man kann das auch so formulieren: „Jede in F_n divergente Punktfolge ist in F_n unbeschränkt".

Unter dieser Voraussetzung haben die gemäß 3 definierten Teilgebiete U'_i von F_n die Eigenschaft: Jedes U'_i ist eine (differentialgeometrische, nicht vollständige) Fläche. Eine in U'_i divergente Punktfolge ist dann und nur dann unbeschränkt, wenn sie bei H in eine gegen m_i konvergente Punktfolge von T_0 übergeht. Auf die Untersuchung von Flächen dieser Eigenschaft werden in der vorliegenden Arbeit eine Reihe von Sätzen über vollständige Flächen zurückgeführt.

5. Wir definieren: Eine Fläche U' heißt ein *Fluchtgebiet*, wenn U' folgende Eigenschaften hat: 1) Es gibt ein Kreisinneres K' vom Mittelpunkt m, so daß U' eine topologische Abbildung H auf das „punktierte Kreisinnere" $\bar{K}' = K' - m$ gestattet. 2) Eine in U' divergente Punktfolge ist dann und nur dann unbeschränkt in U', wenn die Folge durch H in eine in K' gegen m konvergente Punktfolge abgebildet wird.

Eine Jordankurve R in U' heiße ein *Gürtel*, wenn R durch H in eine solche Jordankurve von K' abgebildet wird, die m im Innern enthält. Jede Jordankurve in U' ist entweder ein Gürtel oder auf einen Punkt zusammenziehbar. Jeder Gürtel berandet ein in U' enthaltenes Fluchtgebiet.

Es sei nun $g\ (\geqq 0)$ die untere Grenze der Längen aller rektifizierbaren Gürtel eines Fluchtgebiets U'. Minimalfolge heiße eine Folge von Gürteln in U', deren Längen gegen g konvergieren. Eine solche Folge heiße beschränkt oder unbeschränkt, je nachdem es die Punktmenge ist, die von allen Gürteln der Folge bedeckt wird. Dann definieren wir (§ 18):

---

[2]) Comm. math. Helv. 3 (1931), 209—225; im Folgenden mit HR zitiert. Die entsprechende Definition für Riemannsche Räume beliebig vieler Dimensionen wird bei E. Cartan [Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann (1928), no. 56] untersucht.

Ein Fluchtgebiet heißt ein *Kelch*, wenn es eine beschränkte Minimalfolge enthält. Ein Fluchtgebiet heißt ein *Schaft*, wenn es keine beschränkte Minimalfolge enthält. Ein Fluchtgebiet heißt ein *eigentlicher Kelch*, wenn es keinen Schaft enthält.

Einen analogen Begriff des „eigentlichen Schafts", also eines Schafts einzuführen, der keinen Kelch enthält, erübrigt sich nach folgendem, leicht zu beweisenden Satz (§ 18):

Jedes in einem Schaft enthaltene Fluchtgebiet ist ein Schaft.

Beispiele von Fluchtgebieten, die Kelche sind: Das Äußere eines Kreises in der euklidischen oder hyperbolischen Ebene, oder auf einem Rotationsparaboloid; ein Kelch ist auch der von einem Breitenkreis (der nicht dazugerechnet wird) begrenzte „halbe" Rotationszylinder. Bei allen diesen Beispielen gibt es offenbar Minimalfolgen, die sich auf den berandenden Kreis zusammenziehen, also beschränkt sind.

Ein Schaft dagegen ist die Pseudosphäre [3]), also die Rotationsfläche einer Traktrixkurve um ihre Asymptote; der singuläre Rand der Fläche ist, damit ein Fluchtgebiet entsteht, fortzulassen. Auf der Pseudosphäre sind die Breitenkreise Gürtel. Durch Orthogonalprojektion auf eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene sieht man leicht: Zu jedem beschränkten Teilgebiet der Fläche gibt es einen (außerhalb des Gebiets verlaufenden) Breitenkreis, der kürzer ist als alle in jenem Gebiet verlaufenden Gürtel. Also ist die Pseudosphäre ein Schaft.

Dieser Schaft hat die besondere Eigenschaft, daß die Gürtel beliebig klein werden können, daß also $g = 0$. Läßt man die Traktrixkurve nicht um ihre Asymptote, sondern um eine Parallele zur Asymptote rotieren, die in der Kurvenebene liegt und die Traktrix nicht trifft, so erhält man einen Schaft S, auf dem g positiv ist.

Die eingangs erwähnten Beispiele von Kelchen waren, wie leicht zu bestätigen, eigentliche Kelche. Ein Kelch, der nicht eigentlicher Kelch ist, sondern einen Schaft enthält, entsteht z.B. aus dem Schaft S, indem man den Meridian so abändert, daß zwischen irgendzwei Breitenkreisen eine hinreichend starke Einschnürung entsteht, während man außerhalb jener Zone alles ungeändert läßt. Man kann es dann erreichen, daß der kleinste Breitenkreis der Einschnürung der kürzeste Gürtel des entstehenden Fluchtgebiets S' wird, so daß also S' ein Kelch ist. Läßt man anderer-

---

[3]) vgl. G. Darboux, Théorie des surfaces, 2ième éd., 1ière partie, livre 1, chap. VIII.

seits von S' ein hinreichendgroßes beschränktes Stück fort, so bleibt ein Fluchtgebiet S'' übrig, das nicht nur in S', sondern auch in dem Schaft S enthalten, also nach dem erwähnten Satz ein Schaft ist. [4])

6. Es läßt sich leicht zeigen (§ 17), daß es auf jedem Fluchtgebiet U' einen Gürtel R_0 gibt, der ein geodätisches Polygon ist. $U(R_0)$ sei die abgeschlossene Hülle des von R_0 begrenzten in U' enthaltenen Fluchtgebiets; einen solchen Bereich nennen wir (§ 14) einen *Fluchtbereich*; wir rechnen also den Rand mit, den wir als geodätisches Polygon vorausgesetzt haben.

Eine Ecke e eines geodätischen Jordanpolygons P heiße *wesentlich*, wenn von den beiden in e zusammenstoßenden Bögen von P nicht der eine in die Verlängerung des andern fällt. Eine wesentliche Ecke e von P heiße *einspringend* gegen einen an P angrenzenden Bereich B, wenn einer jener Bögen sich über e hinaus ins Innere von B hinein verlängern läßt. Eine wesentliche Ecke von P, die nicht gegen B einspringt, nennen wir gegen B *hohl*.

Einen Gürtel R nennen wir *einspringend*, wenn R ein geodätisches Polygon mit wenigstens einer wesentlichen Ecke ist und alle wesentlichen Ecken von R gegen den von R berandeten Fluchtbereich $U(R)$ einspringen.

Ein Gürtel R heiße *glatt*, wenn R eine (einfachgeschlossene) geodätische Linie ist.

Ein Gürtel R heiße ein *hohles Eineck*, wenn R ein in sich zurücklaufender geodätische Bogen ist, so daß der beide Enden vereinigende Punkt eine gegen $U(R)$ hohle Ecke bildet. Der in $U(R)$ gemessene Winkel der Ecke heiße der Eineckswinkel.

Dann beweisen wir (§ 17) folgenden

Satz 1: *In jedem Fluchtgebiet gibt es zu jedem positiven* ε *einen Gürtel, der entweder einspringend oder glatt oder ein hohles Eineck ist, wobei der Eineckswinkel* w *der Ungleichung* $\pi - \varepsilon \leqq w < \pi$ *genügt* [5]).

Die in diesem Satz enthaltene Fallunterscheidung wird durch folgende beiden Sätze (§ 18) präzisiert:

Satz 2: *Auf jedem Schaft gibt es einen Gürtel, der entweder glatt oder ein hohles Eineck ist.*

Satz 3: *Auf jedem eigentlichen Kelch gibt es einen Gürtel* R,

---

[4]) Die Unterscheidung zwischen Kelch und Schaft hat für die folgende Theorie ähnliche Bedeutung, wie die zwischen parabolischer und hyperbolischer Öffnung in der Koebeschen Uniformisierungstheorie.

[5]) Dieses Ergebnis habe ich bereits in einer Note der C. R. **197** (1933), 1165–1167, veröffentlicht.

der entweder glatt oder einspringend ist. In dem von R berandeten Fluchtbereich gibt es keinen Gürtel, der kürzer als R ist.

An diesen 3 Sätzen ist ihre Iterationsfähigkeit zu beachten. Nachdem man einen Gürtel der geforderten Art bestimmt hat, kann man in dem von diesem Gürtel begrenzten, im ursprünglichen enthaltenen Fluchtgebiet den jeweiligen Satz von neuem anwenden, so daß sich eine unendliche Folge paarweis punktfremder Gürtel der geforderten Eigenschaften ergibt, die das Fluchtgebiet in abzählbarviele Zonen einteilen.

Diese Überlegung in Verbindung mit der Gauß-Bonnetschen Formel führt mit einem kleinen Kunstgriff noch (§ 18) zu folgendem

Satz 4: *Jedes Fluchtgebiet nichtnegativer Gaußscher Krümmung ist ein eigentlicher Kelch.*

Damit ist offenbar äquivalent

Satz 4′: *Auf jedem Schaft gibt es eine Stelle negativer Gaußscher Krümmung.*

Der letzte Satz ist natürlich wieder iterierbar: Es gibt eine unbeschränkte Folge paarweis fremder Gebiete negativer Gaußscher Krümmung auf jedem Schaft.

Aus Satz 4 folgt nachträglich (was natürlich leicht direkt einzusehen), daß das Kreisäußere in der euklidischen Ebene oder auf einem Rotationsparaboloid und der von einem Kreis begrenzte „halbe" Rotationszylinder eigentliche Kelche sind.

Satz 4′ läßt sich nicht etwa so umkehren, daß es auf jedem eigentlichen Kelch eine Stelle positiver, oder auch nur nichtnegativer Gaußscher Krümmung geben müßte. Denn das Kreisäußere in der hyperbolischen Ebene ist offensichtlich ein eigentlicher Kelch.

7. Die Sätze 2 und 3 werden durch Lösung eines Minimumproblems gewonnen: Zu gegebenem nichtnegativem t sei $x(t)$ die untere Grenze der Längen aller derjenigen nichtzusammenziehbaren geschlossenen Kurven eines Fluchtbereichs $U(R_0)$, die vom Randpolygon R_0 des Bereichs höchstens den Abstand t haben. *Unter diesen Kurven ist eine kürzeste, also eine der Länge $x(t)$ gesucht.*

Wir werden zeigen (§ 15, 16), daß eine derartige Kurve $R(t)$ existiert, daß ferner $R(t)$ doppelpunktfrei, also ein Gürtel ist, und daß endlich dieser Gürtel stets entweder einspringend oder glatt oder ein hohles Eineck ist. Und zwar liegt, falls $R(t)$ einspringend ist, jede wesentliche Ecke von $R(t)$ auf R_0, fällt nämlich mit einer gegen $U(R_0)$ einspringenden Ecke von R_0 zusammen.

Man kann diesen Sachverhalt mechanisch veranschaulichen: Auf $U(R_0)$ liege ein geschlossener in R_0 deformierbarer Gummifaden R, der durch einen undehnbaren Faden F der Länge t mit R_0 verbunden sei. Der eine Endpunkt von F darf also auf R_0 gleiten, der andere ist mit einem Punkt p von R fest verknüpft. Im übrigen sei das aus F, R bestehende System frei und ohne Reibung auf $U(R_0)$ beweglich. Dann wird der Faden R entweder durch seine elastische Kraft soweit von R_0 fortgetrieben werden, bis F gestrafft ist und einen Zug auf R ausübt; es dürfte anschaulich plausibel sein, daß dann R die Gestalt eines hohlen Einecks mit der Ecke p annimmt. Oder aber R findet eine stabile Lage, ohne daß F notwendig gestrafft ist; dann wird R entweder eine geschlossene geodätische Linie, also glatt sein, oder R erfährt Knickungen, indem R durch einspringende Ecken von R_0 aufgehalten wird.

Es ist plausibel, daß R bei hinreichender Länge von F nicht zum Rand R_0 des Fluchtbereichs hingleiten wird, wenn der Fluchtbereich auf einem Schaft liegt. Aus einer analogen Überlegung ergibt sich umgekehrt, daß bei hinreichender Länge von F der Fall der Einecksfigur nicht eintritt, wenn der Fluchtbereich keinen Schaft enthält.

Es hat natürlich etwas willkürliches, bedeutet aber eine sichtliche Erleichterung der Aufgabe, daß wir auf den Fluchtgebieten solche Teilbereiche bevorzugen, die von einem geodätischen Polygon berandet sind. Für die Anwendung der Sätze auf offne vollständige Flächen ist unsere spezielle Problemstellung doch schon allgemein genug.

8. Um Satz 1 zu erhalten, bedarf es noch eines besonderen Verfahrens. Das einzig verbleibende Problem ist offenbar die Abschätzung des Winkels bei etwa auftretenden Einecken. Nun steht der Eineckswinkel (vgl. Satz 4 aus § 16) in Beziehung zum Verlauf der im vorigen Abschnitt eingeführten, offensichtlich nicht wachsenden Funktion $x(t)$. Durch eine einfache anschauliche Überlegung findet man: Ist $R(t)$ ein hohles Eineck, so ist der hintere Differenzenquotient von $x(t)$, also der Ausdruck $\dfrac{x(t+d)-x(t)}{d} = D(t, d)$ für positives d umso stärker negativ, je kleiner der Eineckswinkel. Da nun $x(t)$ sich als stetig erweist (§ 16) und für alle positiven t definiert und nicht negativ ist, läßt sich (§ 17) zu jedem positiven ε ein t_0 finden, so daß für alle positiven d gilt: $D(t_0, d) \geqq -\varepsilon$. Der zu diesem Wert t_0 gehörige Gürtel $R(t_0)$ besitzt dann die in Satz 1 geforderten Eigenschaften.

9. Einen kompakten abgeschlossenen Teilbereich B einer Fläche, der von endlichvielen, etwa n, paarweis punktfremden einfachgeschlossenen geodätischen Polygonen R_i berandet wird, nennen wir (§ 6) einen Normalbereich. Wir werden beweisen (§ 13), daß ein Normalbereich B, topologisch beurteilt, eine berandete Fläche ist, und daß für die curvatura integra oder Totalkrümmung $C(B)$ von B die Formel gilt:

$$C(B) = 2\pi \cdot \chi(B) - \sum_{i=1}^{n} S_i, \tag{1}$$

dabei bedeutet S_i die Summe

$$S_i = \sum_{k=1}^{E_i} (\pi - w_k^i),$$

und w_k^i bedeutet den in B gemessenen Winkel an einer Ecke von R_i; es möge E_i solcher Ecken geben. Nur die wesentlichen Ecken von R_i geben demnach von Null verschiedene Summanden von S_i. Diese sind positiv oder negativ, je nachdem die Ecke hohl oder einspringend ist.

Sei nun M eine beschränkte Teilmenge einer vollständigen Fläche F_n. Dann ist M infolge der Vollständigkeit von F_n kompakt. Wir können also gemäß dem 3. und 4. Abschnitt n zueinander und zu M fremde Fluchtgebiete U'_i auf F_n finden. Ist R_i ein Gürtel auf U'_i, so bilden die R_i den Rand einer M enthaltenden berandeten Fläche B mit $\chi(B) = \chi(F_n)$. Sind nun aber bei vorgegebenem positivem ε die R_i gemäß Satz 1 bestimmt, so ist B ein Normalbereich. Ist R_i glatt, so ist in (1) $S_i = 0$ zu setzen. Ist R_i einspringend, sind also die wesentlichen Ecken von R_i einspringend gegen den in U'_i enthaltenen von R_i berandeten Fluchtbereich $U(R_i)$, so sind diese Ecken *hohl* gegen B, denn B und $U(R_i)$ liegen zu verschiedenen Seiten von R_i. In diesem Fall ist also $S_i > 0$. Ist endlich R_i ein hohles Eineck, und w_i der Einneckswinkel, in $U(R_i)$ gemessen, so wird

$$S_i = \pi - (2\pi - w_i) = w_i - \pi.$$

Also in diesem Fall nach Satz 1: $S_i \geqq -\varepsilon$. In den ersten beiden Fällen gilt diese Ungleichung a fortiori, also folgt aus Satz 1, aus Formel (1) und aus den topologischen Vorbemerkungen folgendes

1. Lemma: Zu jeder beschränkten Menge M und jedem positiven ε gibt es auf F_n einen M enthaltenden Normalbereich B, für dessen Totalkrümmung $C(B)$ gilt:

$$C(B) \leqq 2\pi \cdot \chi(F_n) + n\varepsilon.$$

Nehmen wir nun an, alle Fluchtgebiete von F_n seien eigentliche Kelche, oder, negativ ausgedrückt (was den Fall der geschlossenen Flächen mitumfaßt), F_n enthalte keinen Schaft; dann kann man statt Satz 1 Satz 3 anwenden und erhält einen Normalbereich B ohne einspringende Ecken; ein solcher Bereich möge extremalkonvex heißen [6]) und Hülle jeder in ihm enthaltenen Menge [7]). Dann folgt also aus unsern Betrachtungen

Satz 5: Auf einer vollständigen endlichzusammenhängenden Fläche, die keinen Schaft enthält, besitzt jede beschränkte Menge eine extremalkonvexe Hülle, deren Inneres der Fläche homöomorph ist.

Ist B ein extremalkonvexer Bereich, so folgt aus (1) wegen $S_i \geqq 0$ die für manche Anwendung wichtige Formel:

$$C(B) \leqq 2\pi \cdot \chi(B). \tag{2}$$

Für jede von der Kugeloberfläche topologisch verschiedene Fläche T, offen oder geschlossen, berandet oder unberandet, gilt bekanntlich $\chi(T) \leqq 1$. Für jeden von der Kugeloberfläche topologisch verschiedenen extremalkonvexen Bereich B gilt also $C(B) \leqq 2\pi$. Aus dieser Bemerkung folgt leicht die Existenz vollständiger endlichzusammenhängender Flächen, auf der es beschränkte Mengen ohne extremalkonvexe Hülle gibt; natürlich muß eine solche Fläche einen Schaft enthalten. Beispiel: Man verschließe das kreisförmige Loch der weiter oben erwähnten Traktrixfläche durch ein darauf passendes Stück einer Kugelfläche von geeignetem Radius; den Meridian der entstehenden Rotationsfläche kann man (durch beliebig kleine Änderung einer Umgebung der Nahtstelle) so deformieren, daß eine voll-Rotationsfläche K von überall stetiger Gaußscher Krümmung entsteht.

---

[6]) Insbesondere sind alle geschlossnen Flächen extremalkonvex. Der Ausdruck entspricht dem in der Variationsrechnung üblichen; vgl. l.c. [13]).

[7]) In der Theorie der linearen Räume wird „konvexe Hülle" oft in der Bedeutung von „kleinste konvexe Hülle" gebraucht. In unserm Fall soll das Wort Hülle nur die im Text angegebene Bedeutung haben. Die Definition einer „kleinsten" extremalkonvexen Hülle einer Menge ist nicht in so einfacher Weise wie bei konvexen Bereichen linearer Räume möglich. Während der Durchschnitt gewöhnlicher konvexer Bereiche wieder konvex ist, braucht der Durchschnitt extremalkonvexer Bereiche nicht einmal zusammenhängend zu sein. Der Unterschied der beiden Konvexitätsbegriffe rührt daher, daß im Riemannschen Raum zwei Punkte mehrere kürzeste Verbindungen haben können, im linearen Raum dagegen nicht. Ferner kann im Riemannschen Raum ein geodätischer Bogen kürzeste Verbindung seiner Endpunkte sein, wenn man zum Vergleich nur Wege einer gewissen Umgebung des Bogens heranzieht, dagegen diese Minimaleigenschaft bei Vergrößerung der zugelassenen Umgebung einbüßen; in linearen Räumen gibt es dazu kein Analogon.

K ist vollständig, der euklidischen Ebene homöomorph, und K enthält einen Schaft. K hat etwa das Aussehen einer Keule mit unendlichlangen Stiel. Der kugelige Kopf der Keule umfaßt offenbar mehr als eine Halbkugel, und aus der sphärischen Abbildung von K ist leicht ersichtlich, daß jedes beschränkte den Kopf von K umfassende Teilgebiet von K eine Totalkrümmung hat, die 2π übertrifft. Eine Teilmenge von K, die den Kopf enthält, kann also auf K keine extremalkonvexe Hülle besitzen.

Jetzt wollen wir umgekehrt annehmen, daß alle Fluchtgebiete einer endlichzusammenhängenden vollständigen Fläche Schäfte enthalten. Dann können wir für die Ränder eines eine gegebene Menge umfassenden Normalbereichs B solche Gürtel R_i wählen, die Satz 2 erfüllen. Dann hat B keine *hohle* Ecke, in (1) ist also diesmal $S_i \leqq 0$ für alle i. Somit haben wir folgendes

2. *Lemma. Ist F eine endlichzusammenhängende vollständige Fläche, die keinen eigentlichen Kelch besitzt, so gibt es auf F zu jeder beschränkten Menge M einen M enthaltenden Normalbereich B, so daß*

$$C(B) \geqq 2\pi \cdot \chi(F). \tag{3}$$

10. Die beiden Lemmata können wir auf eine Folge beschränkter, also kompakter Mengen anwenden, die F_n erschöpfen, d.h. die die Eigenschaft haben, daß jede kompakte Teilmenge von F_n in fast allen Mengen der Folge enthalten ist. Es ist eine bekannte Tatsache, daß auf jeder topologischen Fläche eine solche erschöpfende Folge existiert.

Sei F eine (differentialgeometrische, nicht notwendig vollständige) Fläche. Ist F geschlossen, so hat F bekanntlich [8]) die Totalkrümmung $2\pi \cdot \chi(F)$. Ist F offen, so kann die Totalkrümmung, wie jedes Gebietsintegral über ein nichtkompaktes Integrationsgebiet, nur als Grenzwert von Integralen über kompakte Teilbereiche erklärt werden, die das Gebiet erschöpfen. Wir wollen uns auf erschöpfende Folgen von *Normalbereichen* beschränken und definieren: Eine differentialgeometrische Fläche F besitzt eine Totalkrümmung dann und nur dann, wenn die Totalkrümmungen jeder Folge von F erschöpfenden Normalbereichen gegen einen Grenzwert konvergieren, der für alle solche Folgen der gleiche ist. Dieser heißt dann die Totalkrümmung $C(F)$ von F.

Dabei nennen wir Folgen reeller Zahlen, die über jede positive

---

[8]) vgl. l.c. [10]) und § 13 der vorliegenden Arbeit.

Schranke wachsen, oder unter jede negative Schranke abnehmen, konvergent gegen $+\infty$, bzw. gegen $-\infty$, lassen also auch diese Werte als Totalkrümmung zu. Unter diesen Umständen ergibt sich aus bekannten Sätzen über monotone Zahlenfolgen: Ist die Gaußsche Krümmung einer Fläche F nirgends negativ oder nirgends positiv, so besitzt F eine Totalkrümmung.

Besitzt eine Fläche keine Totalkrümmung, so lassen sich stets erschöpfende Folgen von Normalbereichen angeben, deren Totalkrümmungen gegen $+\infty$, oder gegen $-\infty$ konvergieren. Wiederum handelt sich um eine auf alle uneigentlichen Gebietsintegrale bezügliche Erscheinung [9]).

Satz 6 [5]): *Wenn eine vollständige endlichzusammenhängende Fläche F eine Totalkrümmung $C(F)$ besitzt, so ist*

$$C(F) \leqq 2\pi \cdot \chi(F). \tag{4}$$

Beweis: M_k sei eine Folge kompakter Teilbereiche von F, die F erschöpfen. Ich wende das 1. Lemma an auf $F = F_n$ und $M_k = M$, wobei ich $\varepsilon = \frac{1}{k}$ setze; B_k sei ein Bereich, der die Forderung des Lemmas erfüllt, es gilt also für alle k:

$$C(B_k) \leqq 2\pi \cdot \chi(F) + \frac{n}{k}. \tag{5}$$

Dabei ist $M_k \subset B_k$, also bilden auch die B_k eine F erschöpfende Folge. Weil $C(F)$ existiert, gilt definitionsgemäß $C(B_k) \to C(F)$. Das in Verbindung mit (5) ergibt (4), wenn man beachtet, daß n eine von F allein abhängige feste Zahl ist.

Satz 7: *Wenn eine vollständige endlichzusammenhängende Fläche F eine Totalkrümmung $C(F)$ besitzt, und wenn F keinen eigentlichen Kelch enthält, so gilt*

$$C(F) = 2\pi \cdot \chi(F). \tag{6}$$

Beweis: Man ändere den vorigen Beweis nur insofern ab, daß man B_k nicht nach dem ersten, sondern nach dem zweiten Lemma bestimmt. Dann folgt $C(F) \geqq 2\pi \cdot \chi(F)$ und hieraus (6) wegen (4).

11. Eine vollständige Fläche E, die der euklidischen Ebene

---

[9]) Sind A_i, B_i erschöpfende Folgen von Normalbereichen der Fläche derart, daß $C(A_i) \to a$, $C(B_i) \to b$, $a > b$, so gibt es für jedes hinreichend große i ein $k(i)$, so daß $A_k \supset B_i$, $C(A_k - B_i) > \frac{a-b}{2}$. Es gibt unendlich viele paarweis punktfremde solche Bereiche $A_k - B_i$. Sie führen leicht zur Konstruktion einer erschöpfenden Folge D_i mit $C(D_i) \to +\infty$. Entsprechende Bereiche $B_k - A_i$ erledigen den andern Fall. (Zusatz bei der Korrektur, 25. Februar 1935.)

homöomorph ist, heiße eine vollständige Riemannsche Ebene. Es ist $\chi(E) = 1$, also nach Satz 6, falls die Totalkrümmung $C(E)$ existiert,

$$C(E) \leqq 2\pi. \tag{7}$$

Die Existenz von $C(E)$ ist gesichert, wenn E überall positive Gaußsche Krümmung hat. Aus dieser Bemerkung folgt in Verbindung mit (7)

Satz 8 [5]): *Jede vollständige Fläche überall positiver Gaußscher Krümmung ist entweder der Kugelfläche oder der projektiven Ebene oder der euklidischen Ebene homöomorph.*

Beweis: Jede vollständige Fläche F, die keiner der drei erwähnten Flächen homöomorph ist, hat eine Riemannsche Ebene E zur unendlichvielblättrigen Überlagerungsfläche. Wie schon in HR [2]) bewiesen und wie wir (§ 12) unter allgemeineren Voraussetzungen beweisen werden, ist jede relativ unberandete Überlagerungsfläche einer vollständigen Fläche wieder vollständig. Hätte also F überall positive Gaußsche Krümmung, so auch E, also existierte $C(E)$ und wäre wegen der Unendlichvielblättrigkeit von E über F notwendig $+\infty$, entgegen (7).

An Satz 8 ist hervorzuheben, daß weder die Existenz der Totalkrümmung noch irgend etwas über die topologische Struktur der Fläche vorausgesetzt wird; es wird umgekehrt vom Verhalten der Fläche im Kleinen (positive Gaußsche Krümmung) auf ihre topologische Struktur geschlossen. [10])

Satz 5 ergibt für den Fall der Riemannschen Ebene

Satz 9: *Auf einer vollständigen Riemannschen Ebene nirgendsnegativer Gaußscher Krümmung besitzt jede beschränkte Menge eine extremalkonvexe Hülle.*

Denn eine solche Fläche enthält nach Satz 4 keinen Schaft.

Natürlich ist nicht das Vorzeichen der Gaußschen Krümmung

---

[10]) Über diesen Problemkreis vergleiche man z.B.: H. Hopf, Differentialgeometrie und topologische Gestalt [Jahresbericht DMV **41** (1932), 209].

Herr H. Hopf hatte mir gegenüber als Vermutung geäußert, daß die Totalkrümmung einer vollständigen Riemannschen Ebene positiver Gaußscher Krümmung $\leqq 2\pi$ sein müsse; er zeigte mir ferner, wie daraus Satz 8 folgen würde. Ich verdanke diesen Äußerungen die Anregung zur vorliegenden Arbeit; auch mehrere andere in dieser Arbeit behandelte Fragen sind durch den Gedankenaustausch mit Herrn H. Hopf angeregt.

Wir hatten nicht erwartet, daß die Abschätzungen in Wirklichkeit nur durch Vollständigkeit und Existenz der Totalkrümmung der Fläche bedingt werden.

In Satz 8 genügt es offenbar vorauszusetzen, daß die Gaußische Krümmung stellenweise positiv und nirgends negativ ist.

sondern die Abwesenheit von Schäften die für die Behauptung wesentliche Eigenschaft der Fläche; denn auch die hyperbolische Ebene hat die Eigenschaft, daß jede auf ihr beschränkte Menge eine extremalkonvexe Hülle besitzt.

Satz **10:** *Auf einer vollständigen Riemannschen Ebene von überall positiver Gaußscher Krümmung gibt es keine einfachgeschlossene geodätische Linie.*

Beweis: Da die Gaußsche Krümmung auf einer solchen Ebene E das Vorzeichen nicht wechselt, existiert $C(E)$, und es ist $C(E) \leqq 2\pi$; jedes echte Teilgebiet von E hat demnach eine Totalkrümmung $< 2\pi$, während das Innere einer einfachgeschlossenen geodätischen Linie nach der Gauß-Bonnetschen Formel die Totalkrümmung 2π hat. [11])

Ein Beispiel einer Riemannschen Ebene, auf die Satz 7 anwendbar ist, bildet die in 9 erwähnte „Keule" K. Diese besitzt in der Tat einen Schaft und keinen eigentlichen Kelch. Die Totalkrümmung jedes hinreichendgroßen Teilgebiets ist $> 2\pi$, wie wir schon erwähnten; bei erschöpfenden Bereichfolgen nimmt die Totalkrümmung gegen 2π ab.

Daß in Satz 8, und ebenso in Satz 6 und 7, die Voraussetzung der Vollständigkeit nicht fortgelassen werden kann, lehrt das Beispiel irgendeines hinreichendgroßen einfachzusammenhängenden Gebiets der Kugeloberfläche. Man kann aber diese Voraussetzung auch nicht so abschwächen, daß man etwa die „Nichtfortsetzbarkeit" anstelle der Vollständigkeit fordert (Vgl. HR, 211, 221). Z.B. ist die universelle Überlagerungsfläche einer zweifach punktierten Kugelfläche eine nichtfortsetzbare Riemannsche Ebene der Totalkrümmung $+\infty$; natürlich ist diese Fläche nicht vollständig.

12. Die zweifach punktierte Kugel oder der beiderseits unendliche Rotationszylinder dürfte nächst der euklidischen Ebene den einfachsten topologischen Typ einer offnen Fläche darstellen. Sei Z eine dem Rotationszylinder homöomorphe vollständige Fläche. Dann ist $\chi(Z) = 0$, also falls die Totalkrümmung $C(Z)$ existiert, $C(Z) \leqq 0$. Offenbar sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem Z keinen Schaft, einen Schaft und einen eigentlichen Kelch, oder keinen eigentlichen Kelch enthält.

[11]) Man kann übrigens zeigen, daß auf E auch geschlossene geodätische Linien mit Doppelpunkten nicht auftreten können, weil dann entweder ein Teilbogen dieser Linie ein einfachgeschlossenes Eineck mit einer gegen sein Inneres einspringenden Ecke bilden würde oder zwei Einecke ohne gemeinsamen innern Punkt auftreten müßten; in jedem Fall hätte man ein Gebiet einer Totalkrümmung $> 2\pi$.

Der erste Fall tritt z.B. beim einschaligen Hyperboloid ein. Die Gaußsche Krümmung ist überall negativ; man sieht an diesem Beispiel (was ohnehin plausibel sein dürfte), daß im Allgemeinen die Ungleichung (4) nicht durch die Gleichung (6) ersetzt werden kann. [12])

Ein Beispiel des zweiten Falls erhält man, indem man in einem rechtwinkligen ebenen Koordinatensystem die Exponentialkurve $y = e^x$ betrachtet, und diese Kurve um die x-Achse, $y = 0$, im Raum rotieren läßt.

Ein Beispiel des dritten Falls bietet die Rotationsfläche der Kurve $y = e^{-x^2}$ um die x-Achse. In diesem Fall tritt offenbar eine Zone positiver Gaußscher Krümmung auf. Aus Satz 7 und Satz 4 folgt, daß eine dem Rotationszylinder homöomorphe vollständige Fläche Z ohne eigentlichen Kelch *stets* ein Gebiet positiver Gaußscher Krümmung enthält. Denn wäre die Gaußsche Krümmung auf Z nirgends positiv, so existierte $C(Z)$, und nach Satz 7 wäre $C(Z) = 0$. Also wäre die Gaußsche Krümmung auf Z identisch Null, also wären nach Satz 4 alle Fluchtgebiete von Z eigentliche Kelche, gegen die Voraussetzung.

13. Wir haben gezeigt, daß die Sätze 5—10 aus den Sätzen 1—4 sowie drei weiteren Sätzen folgen; nämlich, daß jedes in einem Schaft enthaltene Fluchtgebiet ein Schaft ist, daß die Totalkrümmung eines Normalbereichs durch (1) gegeben wird, und daß die universelle Überlagerungsfläche einer vollständigen Fläche selbst vollständig ist.

Diese sieben Sätze werden in den folgenden drei Teilen dieser Arbeit bewiesen werden. Jedoch sollen noch andere Ergebnisse gewonnen werden, die teils für sich Interesse bieten, teils zur Vorbereitung späterer geplanter Arbeiten dienen. Es handelt sich vor allem um eine gründliche Untersuchung der Existenz und Verteilung kürzester Wege auf Flächen und auf solchen Teilbereichen von Flächen, die, wie z.B. die Fluchtbereiche, von geodätischen Bögen berandet werden. Die bisher bekannten Existenzsätze reichen für unsre Zwecke nicht weit genug. Es ist nicht schwer, aber recht unbefriedigend, aus dem bisher bekannten die jeweils gebrauchte Verallgemeinerung von Fall zu Fall abzuleiten. Ich habe es trotz der dadurch bedingten Breite der Darstellung vorgezogen, die Theorie der kürzesten Wege aus dem

---

[12]) Man kann allgemein verifizieren: Zu jeder vorgegebenen endlichzusammenhängenden offnen topologischen Fläche T und zu jeder reellen Zahl c im Intervall $-\infty \leqq c \leqq 2\pi\chi(T)$ gibt es eine T homöomorphe vollständige Fläche F mit der Totalkrümmung $C(F) = c$.

Verlauf der geodätischen Linien im Kleinen von neuem herzuleiten.

Der Fall der gebrochenen Extremalen wird dabei mit umfaßt, ohne sich besonders herauszuheben. Es sei daher hier auf den Hauptunterschied zwischen den geodätischen Bögen und denjenigen kürzesten Wegen hingewiesen, die an einspringenden Ecken des Bereichrandes geknickt sind: Während ein geodätischer Bogen eines offnen Bereichs über jeden Endpunkt hinaus eine eindeutige bestimmte geodätische Verlängerung besitzt, können geknickte Extremalen offenbar einen von einem Knickpunkt begrenzten Teilbogen gemein haben, ohne zusammenzufallen; über einen Knickpunkt hinaus läßt sich eine Extremale nicht nur in einer Richtung, sondern in allen Richtungen eines gewissen Winkelraums extremal verlängern.

Die ersten beiden Teile der folgenden Darstellung sind ausschließlich der verallgemeinerten Theorie der kürzesten Wege gewidmet. Sie dürfte sich ohne wesentliche Änderung auf allgemeinere als Riemannsche Maßbestimmungen übertragen lassen, aber auch für den Fall der Riemannschen Metrik einiges Neue enthalten; man vergleiche insbesondere §§ 10—12.

Im dritten Teil wird die Theorie auf die Fluchtgebiete angewandt; das in 7 formulierte Minimumproblem wird auf die Diskussion gewisser kürzester Wege auf der universellen Überlagerungsfläche des Fluchtbereichs zurückgeführt.

INHALTSVERZEICHNIS.

I. Betrachtungen im Kleinen.

§ 1. *Differentialgeometrisches Grundgebiet.*

In der ganzen euklidischen (x_1, x_2)-Ebene E seien drei reelle zweimal stetig differenzierbare Funktionen $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ der Koordinaten gegeben, so daß die quadratische Differentialform $ds^2 = \sum\limits_{ik=1,2} g_{ik} dx_i dx_k$ positiv-definit ist. Eine Punktmenge U sei auf E topologisch abgebildet; ist x ein Punkt von U, und hat der Bildpunkt von x in E die Koordinaten x_i, so heißen diese auch Koordinaten von x. Sind $x_i(t)$ für irgendein t-Intervall stückweis stetig differentiierbare Funktionen von t, und ist $x(t) \subset U$ für alle t dieses Intervalles der Punkt mit den Koordinaten $x_i(t)$, so heißt $x(t)$ eine rektifizierbare Kurve in U. Ihre Länge ist gegeben durch $\int ds = \int \sqrt{\sum g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}}\, dt$, erstreckt über jenes t-Intervall.

Die Richtung einer rektifizierbaren Kurve in einem Punkt wird im Fall, daß $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}$ nicht beide verschwinden, durch den Einheitsvektor in E gegeben, dessen Komponenten jenen Zahlen proportional mit einem positiven Faktor sind. Der Winkel zweier Richtungen wird durch die bekannte cosinus-Formel gegeben. Die Festlegung wird eindeutig, wenn man verlangt, daß ein Winkel nur im abgeschlossenen Intervall $(0, \pi)$ variieren darf.

Flächeninhalt, Gaußsche Krümmung, Totalkrümmung in U sind durch die bekannten Formeln bestimmt; die Gaußsche Krümmung ist eine stetige Funktion in U, weil sie keine höheren als zweite Ableitungen der g_{ik} enthält.

Im Sinn dieser Beziehung zu E heißt U ein differentialgeometrisches Grundgebiet D.

§ 2. *Geodätische Linien.*

Die geodätischen Linien in D, d.h. die Bilder der Extremalen des Variationsproblems $\delta \int ds = 0$ in E, haben einige bekannte Eigenschaften, die wir für spätere Zwecke in Erinnerung rufen müssen.

1) Zu jedem Punkt x in D gibt es einen Kreis in E, dessen Mittelpunkt x entspricht, und der folgende Eigenschaft besitzt: Das Innere K dieses Kreises — und damit das Gebiet $U(x)$, das K in D entspricht — läßt sich auf ein anderes Kreisinnere K' so abbilden, daß die x enthaltenden geodätischen Linien von $U(x)$ in die Durchmesser von K' übergehen. Die Abbildung $K \leftrightarrows K'$ ist in beiden Richtungen stetig differenzierbar. [13])

Jedes Gebiet $U(x)$, das die hier beschriebene Abbildung gestattet, heiße eine geodätische Umgebung von x.

Aus der Existenz der Abbildung $K \leftrightarrows K'$ folgt: Jeder Punkt $y \neq x$ in $U(x)$ läßt sich mit x durch genau einen in $U(x)$ verlaufenden doppelpunktfreien geodätischen Bogen [14]) $\overline{xy}$ mit x verbinden. Bei festem x, variablem $y \subset U(x)$ variiert $\overline{xy}$ stetig. Im folgenden soll das Symbol $\overline{ab}$ stets einen geodätischen Bogen bedeuten, der in einer geodätischen Umgebung eines seiner Endpunkte liegt. $s(ab)$ bezeichnet die Länge von $\overline{ab}$. Diese Bezeichnungen haben nicht für alle Punktepaare Sinn, und die Verwendung des Symbols $\overline{ab}$ soll zugleich aussagen, daß a in einer geodätischen Umgebung von b liegt, oder umgekehrt; von jetzt ab nennen wir jeden solchen Bogen „Strecke" und die gewöhnliche Strecke „euklidische Strecke".

Aus der Definitheit von ds^2 folgt (vgl. HR, 213), daß ich ein positives c so klein wählen kann, daß ich auf den von x ausgehenden geodätischen Linien alle Längen $\leqq c$ von x aus abtragen kann, ohne $U(x)$ zu verlassen. Für $0 < c' \leqq c$ ist der Ort der Punkte y mit $s(xy) = c'$ eine stetig differentiierbare Kurve, die in jedem ihrer Punkte y die Strecke $\overline{xy}$ senkrecht schneidet [15]). Wir nennen diese Kurven geodätische Kreise (nur für „Radien", die so klein sind, wie wir gefordert haben!). Liegt y im Innern eines solchen Kreises, so ist $\overline{xy}$ die *einzige kürzeste* Verbindung

---

[13]) Vgl. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (1909) § 33, Satz I, insbesondere den Beweis dieses Satzes.

[14]) Wir nennen „Bogen" stets das stetige Bild eines *abgeschlossenen* Intervalls. Das Bild eines offnen Intervalls heiße „offner Bogen". Rechnet man genau einen Endpunkt mit, so sprechen wir von einem „Strahl".

[15]) l.c. [13]), § 43.

von x, y in D, d.h. jede rektifizierbare Kurve, die x mit y in D verbindet und einen nicht auf $\overline{xy}$ liegenden Punkt enthält, ist länger als $\overline{xy}$.

2) Es ist für das Folgende sehr wichtig, daß die geodätischen Umgebungen in jedem Teilgebiet von D „gleichmäßig hinreichend groß" bleiben; wir meinen damit folgenden Sachverhalt:

Jeder Punkt $z \subset D$ besitzt eine Umgebung $V(z)$ folgender Eigenschaft: Jeder Punkt von $V(z)$ ist Mittelpunkt eines geodätischen Kreises, *der $V(z)$ im Innern enthält* [16]). Hieraus folgt: Sind a, b beliebige Punkte von $V(z)$, so existiert $\overline{ab}$ und ist die einzige kürzeste Verbindung zwischen a und b in D. Denn es gibt einen geodätischen Kreis vom Mittelpunkt a, der $V(z)$, also b, im Innern enthält.

Ferner ergibt sich: $\overline{ab}$ variiert stetig, wenn man die Endpunkte in $V(z)$ stetig variiert. Zum Beweis halte man erst a fest und variiere b, dann umgekehrt.

Wir können nicht allgemein aussagen, daß $\overline{ab}$ in $V(z)$ enthalten, daß also $V(z)$ in bezug auf die von uns betrachtete Streckenmenge konvex ist. Wir zeigen nun, daß es auch konvexe z enthaltende Bereiche gibt.

§ 3. *Kreisscheiben und Sektoren.*

Zunächst eine Hilfsbetrachtung. [17]) Eine geodätische Linie A stehe in a senkrecht auf einer geodätischen Linie B. Wenn die Schar der geodätischen Linien A', die in einer Umgebung von a ebenfalls senkrecht auf B stehen, eine Enveloppe haben, so nennt man bekanntlich den von a aus ersten Schnittpunkt von A mit dieser Enveloppe den Brennpunkt von A bzgl. B; ist x ein Punkt von A derart, daß auf dem Teilbogen (ax) von A kein Brennpunkt von A liegt, so bildet (ax) die „relativ" kürzeste Verbin-

---

[16]) l.c. [13]), § 33, Satz IV. Zunächst gibt es zu jedem beschränkten Teilbereich T von E eine positive Zahl c, so daß es um jeden Punkt p von T als Mittelpunkt einen euklidischen Kreis P vom Radius c gibt, dessen Inneres die in 1) für K geforderten Eigenschaften hat. Ferner gibt es wegen der Definitheit von ds^2 eine Konstante d, $0 < d < c$, derart, daß der mit P konzentrische Kreis vom Radius d einen Teilbereich eines geodätischen Kreises in D abbildet, dessen Mittelpunkt p entspricht; auch die Konstante d bezieht sich gleichmäßig auf alle Punkte von T. Nun sei ein Punkt $z' \subset T$ gegeben. Ist dann $e \leqq \frac{1}{2}d$ und so klein, daß der um z' als Mittelpunkt geschlagene euklidische Kreis Q vom Radius e ganz in T liegt, und ist z der Bildpunkt von z' in D, so hat in D das Bild $V(z)$ des Innern von Q die im Text geforderte Eigenschaft.

[17]) Zum folgenden vergleiche: l.c. [13]), 6. Kapitel; l.c. [3]), 3ième partie, livre 6, chap. V.

dung zwischen x und B, nämlich die einzig kürzeste im Vergleich zu allen Kurven einer gewissen Umgebung des Bogens (ax). Ein geodätischer Bogen (xa'), der B in einen Punkt a' unter einem andern als rechten Winkel trifft, kann niemals eine kürzeste Verbindung von x mit B sein.

Andererseits kann man für den Brennpunkt auf A folgende Kennzeichnung geben:

Sei s die von a aus gemessene Bogenlänge auf A. Sei $k(s)$ die Gaußsche Krümmung längs A als Funktion von s. Dann integriere man die Differentialgleichung $y''+k(s)y=0$ mit der Nebenbedingung $y'=0$ in $s=0$. Der Brennpunkt ist die erste Nullstelle von y oder existiert im zugrundegelegten s-Intervall überhaupt nicht, falls keine Nullstelle von y in diesem Intervall existiert. Nach Sturmschen Sätzen kann man daher (durch Vergleich mit der Differentialgleichung $y''+My=0$) schließen: Ist auf dem betrachteten Bogen A $k(s)<M$, so liegt im Intervall $0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{2\sqrt{M}}$ kein Brennpunkt von A.

Ist also bei unserer Konstruktion und bei dieser Bedeutung von M der Bogen (ax) kürzer als $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$, so liefert er sicher eine relativ kürzeste Verbindung x, B.

Wir kehren nun zu dem in § 2 erklärten Gebiet $V(z)$ zurück. Zunächst wählen wir c positiv so klein, daß die Punkte y mit $s(yz) \leqq c$ Inneres und Peripherie eines *in* $V(z)$ *enthaltenen* geodätischen Kreises K_0 erfüllen. M sei eine so große positive Zahl, daß in K_0 die Gaußsche Krümmung überall $<M$ ist. Nun sei $d \leqq \frac{c}{4}$ und außerdem $\leqq \frac{\pi}{8\sqrt{M}}$. Dann ist in K_0, also in $V(z)$, die geodätische Kreisscheibe $K(z)$: $s(yz) \leqq d$ enthalten. Seien nun y, y' irgend zwei Punkte von $K(z)$, dann haben sie als Punkte von $V(z)$ eine Verbindungsstrecke $\overline{yy'}$. Da sich y mit y' über z durch den Streckenzug $\overline{yz}+\overline{zy'}$ der Länge $\leqq 2d \leqq \frac{c}{2}$ verbinden läßt, ist erst recht $s(yy') \leqq \frac{c}{2}$. Ist also x ein Punkt auf $\overline{yy'}$, so besitzt x die Verbindung $\overline{xy}+\overline{yz}$ der Länge $\leqq \frac{3}{4}c$ mit z. Läge nun $\overline{yy'}$ nicht ganz in K_0, so hätte $\overline{yy'}$ einen Punkt x mit der Peripherie von K_0 gemein. Dann existierte $\overline{xz}$, und $s(xz)$ wäre einerseits $\leqq \frac{3}{4}c$, andererseits $=c$. Also liegt die ganze Strecke $\overline{yy'}$ in K_0, und für jeden Punkt $x \subset \overline{yy'}$ existiert $\overline{xz}$. Läge $\overline{yy'}$ nicht ganz in $K(z)$, gäbe es also auf $\overline{yy'}$ einen Punkt x mit $s(xz)>d$, so gäbe es wegen der in § 2 erwähnten stetigen Abhängigkeit der

Strecken von den Endpunkten einen Punkt u auf $\overline{yy'}$, für den $s(uz)$ ein Maximum wäre, $s(uz) \geqq s(xz)$ für $x \subset \overline{yy'}$. Also insbesondere $s(uz) > d \geqq s(yz)$, und $s(uz) > s(y'z)$; also wäre u innerer Punkt von $\overline{yy'}$, und daher müßte nach § 2 jedenfalls $\overline{uz}$ auf $\overline{yy'}$ in u senkrecht stehen. Nun hat aber nach unserer Annahme über d der Weg $\overline{yz}+\overline{zy'}$, also erst recht $\overline{yy'}$ eine Länge $\leqq 2d \leqq \frac{\pi}{4\sqrt{M}}$, also wäre die Länge des Weges $\overline{uy}+\overline{yz}$, also erst recht die von $\overline{uz} < \frac{\pi}{2\sqrt{M}}$. Dann würde aber nach unsrer Hilfsbetrachtung der Weg uz eine relativ *kürzeste* Verbindung von z mit $\overline{yy'}$ herstellen, es gäbe in der Nähe von u auf $\overline{yy'}$ einen Punkt v mit $s(zv) > s(zu)$, im Widerspruch zur Definition von u.

Die Kreisscheibe $K(z)$ hat also in bezug auf die Wege in D die für die konvexen Mengen charakteristische Eigenschaft: *Zwei Punkte aus der kompakten abgeschlossenen Punktmenge $K(z)$ besitzen eine einzige kürzeste Verbindung in D und diese liegt ganz in $K(z)$.* [18])

Von jetzt an wollen wir geodätische Kreisbereiche von dieser Art kurz Kreisscheiben nennen und, wo euklidische Kreise gemeint sind, dies hervorheben. Es ist zu beachten, daß wir von der Kreisscheibe außer der Konvexität noch mehr wissen und auch fordern, nämlich die stetige Abhängigkeit der in ihr verlaufenden Strecken von den Endpunkten; die Stetigkeit folgt wohl nicht direkt aus der Konvexität, aber jedenfalls daraus, daß nach unsrer Konstruktion jeder Punkt einer Kreisscheibe eine sie enthaltende geodätische Umgebung besitzt. — Radius, Durchmesser, Peripherie einer Kreisscheibe definieren wir wie im euklidischen Fall.

Sind nun allgemein a, b zwei Punkte auf dem Rand eines einfachzusammenhängenden im angeführten Sinn in D konvexen Bereichs B, so wird B durch $\overline{ab}$ in zwei „Segmente" B', B'' zerlegt. Ich behaupte, sie sind wieder konvex (dieser Satz dürfte bekannt sein). Wäre nämlich etwa B' nicht konvex, so gäbe es zwei Punkte x, y in B' derart, daß $\overline{xy}$ nicht ganz in B' läge. Da nun B konvex vorausgesetzt ist, liegt $\overline{xy}$ in B; wenn also nicht ganz in B', so gibt es auf $\overline{xy}$ einen Punkt $z \subset B-B'$; z läge ins-

[18]) J. H. C. Whitehead hat die Existenz konvexer Umgebungen eines Punkts allgemein inbezug auf die Autoparallelen n-dimensionaler affinzusammenhängender Räume gezeigt (Convex regions in the geometry of paths [Quart. J. Math. (Oxford) 3 (1932), 33—42]). Der obige unserm speziellen Fall angepaßte Beweis dürfte trotzdem von Interesse sein.

besondere nicht auf $\overline{ab}$. Da aber diese Strecke B' in B von $B - B'$ trennt, müßte $\overline{zx}$ mindestens einen Punkt x', und ebenso $\overline{zy}$ mindestens einen Punkt y' mit $\overline{ab}$ gemein haben; also hätten $\overline{ab}$ und $\overline{xy}$ zwei Punkte x', y' gemein, diese hätten zwei kürzeste Verbindungen, entgegen der Minimaleigenschaft der Strecke.

Teilen wir demnach eine Kreisscheibe durch einen Durchmesser in zwei Halbkreisflächen (die wir als abgeschlossene Mengen meinen), so ist jede dieser Flächen wieder konvex, und hat außerdem in unserm Fall wieder die Stetigkeitseigenschaft insbezug auf die Strecken. Zerlegen wir die Halbkreisfläche weiter durch einen Radius, so entstehen wieder zwei konvexe Bereiche; jeden solchen Bereich nennen wir einen *hohlen Sektor*; die berandenden Radien nennen wir die *Schenkel*, den Kreismittelpunkt den *Scheitel*, beides zusammen die *Begrenzung* des Sektors (im Gegensatz zur Berandung, zu der natürlich noch ein Peripheriebogen gehört). Wir meinen die Sektoren als abgeschlossne Bereiche. *Überstumpfen Sektor* nennen wir die abgeschlossne Hülle des Komplementärbereichs eines hohlen Sektors einer Kreisscheibe. Schenkel, Scheitel, Begrenzung wird wie beim hohlen Sektor verstanden. Die Halbkreisfläche nennen wir auch einen gestreckten Sektor. Die hohlen Sektoren sind also echter Teil einer Halbkreisfläche von gleichem Scheitel und Radius, während die überstumpfen Sektoren eine Halbkreisfläche gleichen Scheitels und gleichen Halbmessers als echten Teil enthalten.

Wie schon die Anschauung im euklidischen Fall nahelegt, sind die überstumpfen Sektoren nicht konvex. Wir untersuchen jetzt kürzeste Wege in überstumpfen Sektoren.

U sei ein überstumpfer Sektor des Scheitels s. Seine Schenkel seien S, S'. V sei der komplementäre hohle Sektor. Sind dann a, a' zwei Punkte auf S, S', so liegt $\overline{aa'}$ in V, denn V ist konvex, $\overline{aa'}$ fällt also genau dann auch auf U, wenn auf die gemeinsame Begrenzung beider Sektoren. Sind nun a, a' beide von s verschieden, so hat die Verbindung von a mit a' längs der Begrenzung $S + S'$ einen Knick in s, also tritt $\overline{aa'}$ notwendig ins Innere von V ein, womit gezeigt ist, daß U nicht konvex ist.

Natürlich gibt es trotzdem Punktepaare in U, deren Verbindungsstrecke in U liegt. Wir können die verschiedenen Möglichkeiten folgendermaßen übersehen:

Seien x, y irgendzwei verschiedene Punkte in U. Fällt x mit s zusammen, so liegt $\overline{xy}$ in U. Seien nun x, y beide von s verschieden, Dann betrachten wir die Radien X, Y, die $\overline{xs}$ bzw $\overline{ys}$ enthalten. Ist ein von ihnen begrenzter hohler oder gestreckter Sektor V'

in U enthalten, so haben x, y eine kürzeste Verbindung $\overline{xy}$ in V', also a fortiori in U. Tritt dieser Fall nicht ein, so ist der von X, Y begrenzte überstumpfe Sektor U' in U enthalten. In U', also erst recht in U liegt der Radius X', der in die Verlängerung von X über s hinaus fällt. Aus der Figur geht hervor, daß jeder Weg w, der y in U mit x verbindet, einen Punkt z mit X' gemein haben muß; w ist also nicht kürzer als der Streckenzug $\overline{yz}+\overline{zx}$. Ist z von s verschieden, so kann ich weiter zerlegen: $\overline{zx}=\overline{zs}+\overline{sx}$. w ist also nicht kürzer als $\overline{yz}+\overline{zs}+\overline{sx}$. Nun ist $\overline{yz}+\overline{zs}$ für $z \neq s$ länger als $\overline{ys}$. *Der einzig kürzeste Weg von y in U nach x ist somit, falls X, Y keinen hohlen Teilsektor von U beranden*: $\overline{ys}+\overline{sx}$. *Sonst* $\overline{xy}$.

Wir haben damit ein Problem der Variationsrechnung im Kleinen „mit Gebietsbeschränkung" auf durchaus elementare Weise gelöst.

§ 4. *Verkürzungsformeln.*

Die folgenden wohlbekannten Tatsachen [19]) werden in § 16 gebraucht werden und seien hier erwähnt, weil sie sich unmittelbar ans Vorige anschließen.

V sei ein hohler Sektor mit dem Scheitel z und den Schenkeln X, Y. Als Winkel w von V definieren wir die im Intervall $(0, \pi)$ eindeutig bestimmte Zahl w für die $\cos w$ gemäß § 1 durch die Richtungen von X, Y in z bestimmt ist. Dann ist, weil V hohl, $0 < w < \pi$.

x sei ein von z verschiedener fester Punkt von X. y sei ein *laufender* Punkt von Y, den wir durch den Parameter $t = s(zy)$ bestimmt denken. Ist t_0 die Länge des Radius von V, so ist $0 \leqq t \leqq t_0$ das Definitionsintervall einer stetig differentiierbaren Funktion $f(t) = s(xy)$; und zwar gilt, $\frac{df}{dt} = f'(t)$ gesetzt:

$$f'(0) = -\cos w. \tag{8}$$

Daraus folgt zunächst: *Ist $w < \frac{\pi}{2}$, so gibt es zu jedem $x \subset X$, $x \neq z$, einen Punkt y auf Y, so daß $s(xy) < s(xz)$.*

Sei nun w bis auf $0 < w < \pi$ beliebig. Dann zerlegen wir V durch einen Radius Z in zwei Sektoren V', V'' des Winkels $\frac{w}{2} < \frac{\pi}{2}$. Wir wenden (8) auf diese Sektoren an, wobei zu beachten ist, daß $\cos \frac{w}{2} > 0$.

---

[19]) vgl. z.B. l.c. [3]), 2ième partie, livre 5, chap. IV.

Seien also jetzt x, y *feste* von z verschiedene Punkte, so daß $x \subset X$ und $y \subset Y$. Dagegen sei z' ein *laufender* Punkt auf Z, den wir durch den Parameter $t = s(zz')$ festlegen. Dann ist $g(t) = s(xz') + s(z'y)$ für $0 \leqq t \leqq t_0$ stetig nach t differentiierbar, und nach (8) ist

$$g'(0) = -2 \cos \tfrac{1}{2}w.$$

Für jedes positive ε gibt es demnach ein t_1, so daß $0 < t_1 \leqq t_0$ und $g(t_1) < g(0) - 2t_1 \cos \frac{1}{2}w + \varepsilon t_1$.

Wir begnügen uns mit dem Fall $\varepsilon = \cos \frac{1}{2}w$; dann können wir angesichts der Bedeutung von t und $g(t)$ das folgende Ergebnis formulieren, das wir später brauchen:

Sind x, y zwei vom Scheitel z eines hohlen Sektors V verschiedene Punkte auf den beiden Schenkeln dieses Sektors, und ist w der zu V gehörige Winkel, so gibt es in V einen Punkt z', so daß der (notwendig in V verlaufende) Weg $\overline{xz'} + \overline{z'y}$ um mindestens $s(zz') \cos \frac{1}{2}w$ kürzer ist als $\overline{xz} + \overline{zy}$.

II. Differentialgeometrische Flächen und geodätische Bereiche.

§ 5. *Differentialgeometrische Fläche.*

Topologische Fläche nennen wir (fast wörtlich nach HR, 209—210) einen zusammenhängenden topologischen Raum, in dem es ein abzählbares vollständiges System von Umgebungen — im Sinne von Hausdorff [20]) — gibt, und in dem sich jede Umgebung eindeutig und stetig auf die euklidische Ebene abbilden läßt.

Eine topologische Fläche heißt eine differentialgeometrische Fläche F, wenn jede Umgebung U ein differentialgeometrisches Grundgebiet D ist, so daß noch folgende Zusatzforderung erfüllt ist:

Ist ein Gebiet U' der topologischen Fläche in den Umgebungen $U_i = D_i$ und $U_k = D_k$ enthalten, so sind die durch U' bedeckten Teilgebiete $D'_i \subset D_i$ und $D'_k \subset D_k$ isometrisch aufeinander abgebildet.

Dabei mögen zwei Teilgebiete eines oder mehrerer differentialgeometischen Grundgebiete isometrisch aufeinander abgebildet heißen, wenn die Koordinaten der Punkte des einen Gebiets drei-

---

[20]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (1914), Kap. VII, § 1; Kap. VIII, §§ 1—3.

mal stetig differentiierbare Funktionen der Koordinaten der Bildpunkte sind (und umgekehrt), und wenn die in § 1 erklärte quadratische Differentialform ds^2 gegenüber der Koordinatentransformation invariant ist. [21])

Hiernach erhalten für ein Gebiet M in F die Begriffe, bzw. Zahlen „rektifizierbare Kurve", „Richtung", „Länge", „Winkel", Gaußsche Krümmung", „Flächeninhalt", „Totalkrümmung", „geodätischer Bogen", „Strecke", „Kreisscheibe", „Sektor" den gleichen Sinn bzw. Wert in allen M enthaltenden D_i; somit hängen diese Begriffe im Kleinen nur von F selbst ab, und soweit jene Begriffe sich nicht bloß auf Punktmengen beziehen, die ganz in einem D_i enthalten sind (wie z.B. der Begriff der Bogenlänge einer Kurve beliebiger Ausdehnung), kommt man immer durch Zerlegung jener Mengen in kleinere Teilmengen auf die erstgenannten auf ein einziges Grundgebiet bezüglichen Begriffe zurück; eine Kurve heißt im Großen rektifizierbar, wenn sie sich in endlichviele rektifizierbare Teilbögen zerlegen läßt, deren jeder in ein Grundgebiet fällt; die Gesamtlänge ist Summe der Längen der Teilbögen. Die entsprechende Reduktion für die Totalkrümmung werden wir in § 13 ausführlich behandeln.

„Fläche" bedeutet von jetzt ab stets differentialgeometrische Fläche.

§ 6. *Geodätische Bereiche.*

Eine zusammenhängende Punktmenge G einer Fläche F heiße ein *geodätischer Bereich*, wenn zu jedem Punkt $x \subset G$ eine Kreisscheibe $K(x)$ vom Mittelpunkt x existiert, so daß der Durchschnitt $K_G(x)$ von $K(x)$ mit G eine von folgenden 4 Gestalten hat:

1) $K_G(x) = K(x)$.
2) $K_G(x)$ ist eine Halbkreisfläche von $K(x)$.
3) $K_G(x)$ ist ein nichtgestreckter Sektor von $K(x)$.
4) $K_G(x)$ besteht aus mehreren, endlichvielen Sektoren von $K(x)$, die außer x keinen Punkt gemein haben.

Offenbar ist x im ersten Fall innerer Punkt, in den 3 letzten Fällen ein *zu G gehöriger* Randpunkt von G. Man beachte, daß

[21]) Es erheben sich einige axiomatischen Fragen. Z.B. sollte man die Isometrie auch als topologische Abbildung definieren können, bei der rektifizierbare Bögen in rektifizierbare Bögen gleicher Länge übergehen; wahrscheinlich ergibt sich dann die dreimalige Differentiierbarkeit der Koordinatentransformation und die Invarianz von ds^2 von selbst. Ferner dürfte man bei der Definition der differentialgeometrischen Fläche wohl ohne Abzählbarkeitsaxiom auskommen; vgl. T. Radó: Über den Begriff der Riemannschen Fläche [Acta Szeged 2 (1925), 101–121].

auf F Häufungspunkte von G liegen dürfen, die nicht zu G gehören, und über deren Umgebungen wir nichts aussagen.

Im 2. Fall heißt x regulärer Randpunkt, in den beiden letzten Fällen singulärer Punkt von G. Jeder Randpunkt ist Häufungspunkt regulärer Rand- und innerer Punkte, kein Punkt *von* G ist Häufungspunkt singulärer Punkte von G.

Im 3. Fall nennen wir x eine wesentliche Ecke von G, und zwar hohl oder einspringend, je nachdem der Sektor $K_G(x)$ hohl oder überstumpf ist; bisweilen nennen wir x im 2. Fall auch eine unwesentliche Ecke von G.

Im 4. Fall heiße x ein Knotenpunkt von G.

Nach diesen Definitionen sind die Flächen selbst identisch mit der Gesamtheit der geodätischen Bereiche ohne Randpunkte. Wenn dagegen ein geodätischer Bereich G Randpunkte hat, so ist der Rand in abzählbarviele Strecken und Ecken zerlegbar, die in G keinen Häufungspunkt haben. Ist ein geodätischer Bereich in sich kompakt und frei von Knotenpunkten, so nennen wir ihn einen *Normalbereich.* Ein Normalbereich ist entweder eine geschlossene Fläche oder besitzt einen Rand, der aus endlichvielen paarweis punktfremden geodätischen Jordanpolygonen besteht.

Einen geodätischen Bereich, der frei von Knotenpunkten und einspringenden Ecken ist, nennen wir geodätisch-konvex. Ist ein solcher Bereich außerdem in sich kompakt, also Normalbereich, so nennen wir ihn extremalkonvex im Einklang mit der von Bolza [13]) eingeführten Bezeichnung.

Läßt man von den $K(x)$ die Peripherieen fort, so sind die „offnen Kreisscheiben" $K'(x)$, die übrig bleiben, offenbar ein vollständiges Umgebungssystem in F. Infolgedessen erhält G die Struktur eines topologischen Raums, wenn wir als Umgebungen in G den Durchschnitt $K'_G(x)$ der $K'(x)$ mit G zugrundelegen [22]). Die $K'_G(x)$ entstehen offenbar aus den $K_G(x)$ durch Fortlassen der Peripheriebögen. Stetigkeit einer Funktion in G, Häufungspunkte, Konvergenz und Divergenz, Abgeschlossenheit und Kompaktheit von Punktmengen *in* G werde von jetzt ab stets in bezug auf das Umgebungssystem K'_G oder ein gleichwertiges System verstanden [23]).

Nach unsern Definitionen ist z.B. die Menge der singulären Punkte eines geodätischen Bereichs G stets entweder endlich

---

[22]) Vgl. l. c. [20]), Kap. VII, § 6, S. 242.

[23]) Wegen der Terminologie vgl. l. c. [20]), Kap. VII, § 4.

oder in G divergent. Demgegenüber werden wir in § 12 einen geodätischen Teilbereich G der euklidischen Ebene E angeben, so daß in E (nicht in G) die singulären Punkte von G Häufungspunkte haben.

Wir brauchen noch folgende Definition: Eine abzählbar unendliche Menge von Punktmengen $M_i \subset G$ heiße „in G konvergent gegen eine Menge M", Bezeichnung $M_i \overset{G}{\to} M$, wenn eine Menge $M \subset G$ folgender Eigenschaft existiert: 1) Jede Umgebung jedes Punkts von M hat mit *fast allen* M_i mindestens je einen Punkt gemein. 2) Jeder Punkt von $G - M$ besitzt eine Umgebung, die mit *höchstens endlichvielen* M_i einen Punkt gemein hat.

Hieraus läßt sich leicht schließen: Aus $M_i \overset{G}{\to} M$, $M_i \overset{G}{\to} M'$ folgt, daß die Mengen M, M' identisch sind.

§ 7. *Die geodätischen Bereiche als metrische Räume.*

Wir wollen $K_G(x)$, bzw. $K'_G(x)$ eine G-Kreisscheibe, bzw. eine offne G-Kreisscheibe vom Mittelpunkt x nennen. Der Radius wird wie bei $K(x)$ definiert. Dann folgt aus unsern Voraussetzungen: Jeder Punkt einer G-Kreisscheibe läßt sich in ihr, also in G, längs eines Radius mit dem Mittelpunkt verbinden. Hieraus folgt weiter, *daß sich zwei beliebige Punkte a, b von G durch einen in G liegenden Streckenzug aus endlichvielen Strecken verbinden lassen.* Ich überdecke zunächst die G enthaltende Fläche durch abzählbarviele offne Kreisscheiben $K^{i\prime}$, wodurch eine Überdeckung von G durch abzählbarviele $K_G^{i\prime}$ entsteht; aus den zugehörigen K_G^i wähle ich zwei, A, B, so daß $a \subset A$, $b \subset B$. Dann muß es eine „Kette" von endlichvielen K_G^i geben, die mit A beginnt und mit B aufhört, und in der jedes Glied mit dem folgenden wenigstens einen Punkt gemein hat; andernfalls zerfiele G in mindestens zwei Komponenten (eine mit A, eine mit B zusammenhängende) anstatt zusammenhängend zu sein. Nun verbinde ich a längs eines Radius, also durch eine Strecke, mit dem Mittelpunkt von A, hierauf diesen durch eine radiale Strecke mit einem Punkt, den A mit dem nächsten Kettenglied A' gemein hat, dann diesen Punkt mit dem Mittelpunkt von A' usw.

Wir nennen G-Abstand $\varrho_G(ab)$ von a, b die untere Grenze der Längen aller rektifizierbaren Wege, die a mit b in G verbinden. Ist A eine G-Kreisscheibe vom Mittelpunkt a und vom Radius r, und ist b ein Punkt von A, so ist $\varrho_G(ab)$ identisch mit der Länge $s(ab)$ der Strecke $\overline{ab}$, die ja in A, also in G liegt, also zur Konkurrenz zugelassen ist; $\overline{ab}$ ist, wie früher bewiesen, jedenfalls kürzer als jede andere in A gelegene Verbindung zwischen a und b.

Jeder Weg aber, der a mit b verbindet und A verläßt, besitzt einen von a aus ersten Peripheriepunkt x von A, und schon der Teilbogen $\widehat{ax}$ jenes Weges hätte mindestens die Länge $r \geqq s(ab)$. Hiernach stellt in G die Ungleichung $\varrho_G(az) \leqq r$ genau die Punkte $z \subset A$ dar, was den Ausdruck G-Kreisscheibe rechtfertigt. Die Ungleichung $\varrho_G(az) < r$ stellt in G die offne Kreisscheibe von Radius r und Mittelpunkt a dar; demnach ist G vermöge dieses G-Abstandsbegriffs ein metrischer Raum derart, daß die metrisch-sphärischen Umgebungen mit den früher G als topologischen Raum konstituierenden Umgebungen identisch sind. Daß nämlich der G-Abstand den ersten beiden Entfernungsaxiomen (vgl. HR, 213) genügt, ist durch die eben gefundene Eigenschaft der G-Kreisscheiben gezeigt; das dritte Axiom, die Dreiecksungleichung, ist wegen der Definition des G-Abstands als untere Grenze der Längen verbindender Kurven trivial. Infolge der Axiome ist bekanntlich jede Entfernungsfunktion in einem metrischen Raum, also insbesondere der G-Abstand in G eine stetige Funktion seiner Bezugspunkte.

Wir ziehen aus unserm Entfernungsbegriff die üblichen Konsequenzen. Sind A, B in G irgend zwei Punktmengen, die auch einzelne Punkte sein dürfen, so nennen wir ihren G-Abstand $\varrho_G(AB)$ die untere Grenze von $\varrho_G(ab)$ für $a \subset A$, $b \subset B$. Ist A kompakt und abgeschlossen in G, so gibt es ein $a_0 \subset A$ mit $\varrho_G(a_0 B) = \varrho_G(AB)$.

Eine Menge $M \subset G$ heißt beschränkt in G, wenn die G-Abstände aller in M enthaltenen Punktepaare eine endliche obere Grenze haben. Andernfalls heißt M unbeschränkt. Wir werden in § 12 einen geodätischen Teilbereich G der euklidischen Ebene E angeben, in dem eine Menge liegt, die in E beschränkt ist, in G aber nicht.

Wir brauchen für später einen Hilfssatz, der etwas Ähnliches leistet, wie der Borelsche Überdeckungssatz:

Hilfssatz. Ist N kompakt in G, so gibt es ein positives $r = r(N)$ mit folgender Eigenschaft: Ist a ein Punkt von N, so gibt es stets eine kleine G-Kreisscheibe, die a enthält, und von deren Peripherie a den G-Abstand $\geqq r$ hat. — Dabei heißt eine G-Kreisscheibe klein, wenn es eine konzentische G-Kreisscheibe von mindestens dreifachem Radius gibt.

Beweis des Hilfssatzes: Jedem Punkt $a \subset G$ kann ich folgende Zahl $f(a)$ zuordnen: Ich betrachte alle kleinen G-Kreisscheiben, die a enthalten; von den G-Abständen des Punkts a von der Peripherie aller dieser Kreisscheiben bilde ich die obere Grenze, falls es eine gibt, und setze sie $f(a)$. Andernfalls setze ich $f(a) = 1$. $f(a)$ ist jedenfalls positiv; denn um a als Mittelpunkt gibt es eine G-Kreisscheibe vom Radius x; die dazu konzentrische vom Radius $\frac{x}{3}$ ist eine a enthaltende kleine G-Kreisscheibe, und a hat von ihrer Peripherie den G-Abstand $\frac{x}{3}$, also $f(a) \geqq \frac{x}{3}$. Ich setze $\underline{\lim} f(a) = 2r$, wobei a die Menge N durchläuft. Ich habe nur noch zu zeigen, daß $r > 0$.

Wäre $r = 0$, so gäbe es eine Punktfolge $a_i \subset N$, mit $f(a_i) \to 0$. Nun haben aber infolge der Kompaktheit von N die a_i einen Häufungspunkt $a \subset G$. Sei A irgendeine kleine Kreisscheibe um a als Mittelpunkt, und sei $2y > 0$ der Radius von A. Dann wäre für unendlichviele a_i, nämlich für alle a_i mit $\varrho_G(aa_i) \leqq y$: $f(a_i) \geqq y$, und nicht $f(a_i) \to 0$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Er entspringt natürlich einem für alle metrischen Räume gültigen Sachverhalt.

§ 8. *G-Strecken, G-Strahlen, Normalmengen von G-Strecken.*

Einen rektifizierbaren Bogen in G mit den Endpunkten a, b bezeichnen wir als G-Strecke $\widehat{ab}$, wenn er eine kürzeste Verbindung von a mit b in G darstellt, wenn also die Länge $s(\widehat{ab})$ von $\widehat{ab}$ den Wert $\varrho_G(ab)$ hat. Wir lassen Punkte als G-Strecken verschwindender Länge gelten.

Die in G enthaltenen Strecken sind auch G-Strecken. Im allgemeinen braucht aber eine G-Strecke nicht die *einzige* kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte zu sein, wie das bekannte Beispiel der Halb-Großkreise auf der Kugelfläche lehrt. Dagegen folgt aus der Minimaldefinition der G-Strecke: Jeder Teilbogen einer G-Strecke ist G-Strecke. Für alle Punkte $x \subset \widehat{ab}$ besteht daher die Gleichung

$$\varrho_G(ax) + \varrho_G(xb) = \varrho_G(ab). \tag{9}$$

Die Bedeutung von (9) reicht über den betrachteten Fall hinaus; wir werden sehen, daß der durch (9) bestimmte geometrische Ort für x auch dann eine nichttriviale Figur ergibt, wenn a, b keine kürzeste Verbindung in G haben.

G-Strahl nennen wir einen Strahl [14]) in G, wenn jeder in ihm enthaltene Bogen G-Strecke ist. Ist ein G-Strahl beschränkt, so bezeichnen wir als seine Länge die obere (notwendig endliche) Grenze der Längen seiner Teilstrecken.

Man erhält einen (beschränkten) G-Strahl, wenn man von einer

G-Strecke den einen Endpunkt wegläßt. Demgegenüber nennen wir einen G-Strahl divergent, wenn er nicht Teil einer G-Strecke ist. Jeder unbeschränkte G-Strahl ist divergent. Daß es auch geodätische Bereiche mit beschränkten divergenten G-Strahlen gibt, lehrt folgendes einfache Beispiel:

Das Innere I eines euklidischen Kreises K ist (mit seiner euklidischen Metrik) eine Fläche, also ein geodätischer Bereich G. Die G-Strecken sind diejenigen euklidischen Strecken, deren Endpunkte in I liegen. Verbindet man einen Punkt von I geradlinig mit einem Punkt von K und läßt aus der euklidischen Verbindungsstrecke den auf K liegenden Punkt fort, so bleibt ein beschränkter divergenter G-Strahl übrig. Unbeschränkte G-Strahlen gibt es in I nicht.

In Anlehnung an die Gedankengänge von HR werden wir nun die Gesamtheit der G-Strecken eines allgemeinen geodätischen Bereichs auf ihre Kompaktheit hin untersuchen; dabei werden die beschränkten divergenten G-Strahlen mehrfach eine Rolle spielen.

Wir definieren: Eine Menge (L) von G-Strecken L heißt „normal", wenn es zu jeder unendlichen Teilmenge $(L') \subset (L)$ eine G-Strecke $\widehat{ab}$ und eine abzählbar-unendliche Teilmenge $L_i = \widehat{a_i b_i}$ in (L') gibt, so daß im Sinn von § 6: $\widehat{a_i b_i} \xrightarrow{G} \widehat{ab}$.

Man beachte, daß wir nicht nur Existenz konvergenter Teilmengen von G-Strecken fordern, sondern auch, daß diese Teilmengen *gegen G-Strecken* konvergieren. Wir werden sehen, daß G-Strecken auch gegen divergente G-Strahlen konvergieren können.

Wir wollen den Konvergenzbegriff, für den Fall, daß G-Strecken gegen eine G-Strecke konvergieren, in Zusammenhang mit der Konvergenz von Punktfolgen bringen. Zunächst behaupten wir: Aus $\widehat{a_i b_i} \xrightarrow{G} \widehat{ab}$ folgt $a_i \to a$, $b_i \to b$. Aus dieser Behauptung folgt wegen der Minimaldefinition der G-Strecken und der Stetigkeit der Abstandsfunktion: $s(\widehat{a_i b_i}) \to s(\widehat{ab})$. Ferner folgt: Die Endpunktmenge einer normalen Menge von G-Strecken ist kompakt. Die Längen aller G-Strecken einer Normalmenge liegen unter einer festen Schranke. — Wir beweisen nun die zuerst aufgestellte Behauptung.

Da in jede Umgebung von a fast alle gegebenen G-Strecken $\widehat{a_i b_i} = L_i$ eindringen, gibt es zu jedem i einen Punkt $a_i' \subset L_i$ mit $a_i' \to a$. Entsprechend $b_i' \to b$, $b_i' \subset L_i$. Um zu zeigen $a_i \to a$, genügt es, zu zeigen $\varrho_G(a_i a_i') \to 0$. Wäre die letzte Limesrelation falsch, so gäbe es ein $d_0 > 0$ und eine Teilfolge $(k) \subset (i)$ [24]), mit $\varrho_G(a_k a_k') \geqq d_0$. Sei nun A eine G-Kreisscheibe vom Mittelpunkt a. r sei der Radius von A. d sei irgendeine positive Zahl $< \frac{1}{2} r$, $< d_0$. Dann tragen wir auf den Teil-G-Strecken $\widehat{a_k a_k'} \subset L_k$ von a_k' aus die Länge d ab bis a_k''. Sei (m) die Teilfolge von (k), für welche $\varrho_G(a a_m') \leqq \frac{1}{2} r$. Dann folgt: $\varrho_G(a a_m'') \leqq \varrho_G(a a_m') + \varrho_G(a_m' a_m'') \leqq r$. Also wäre für alle $m \subset (m)$: $a_m'' \subset A$. Dann hätten die a_m'' einen Häufungspunkt $a'' \subset A$. Sei (n) die Teilfolge von (m), für die $a_n'' \to a''$ Dann ist $s(\widehat{a_n'' b_n'}) \to \varrho_G(a'' b)$, andererseits $s(\widehat{a_n'' b_n'}) = = d + s(\widehat{a_n' b_n'})$, und $s(\widehat{a_n' b_n'}) \to \varrho_G(ab)$. Folglich wäre $\varrho_G(a'' b) = = \varrho_G(ab) + d > \varrho_G(ab)$. Demnach könnte a'' nach (9) nicht auf $\widehat{ab}$ liegen, während es noch nach der Definition der Punktmengenkonvergenz (§ 6) außerhalb $\widehat{ab}$ keinen Häufungspunkt von Punkten der L_i geben darf. Also in der Tat $a_i \to a$. Genauso folgt $b_i \to b$.

Nun beziehe ich den laufenden Punkt $c_i \subset L_i$, und ebenso den laufenden Punkt $c \subset \widehat{ab}$ auf einen Parameter t, $0 \leqq t \leqq 1$, auf dieselbe Weise, wie es beim Verfahren von Hilbert-Caratheodory geschieht [25]). Ich bezeichne nämlich mit $c_i(t)$, bzw. $c(t)$ den Punkt, der L_i, bzw. $\widehat{ab}$, im Verhältnis $t:(1-t)$ teilt, so daß z.B. für $c = c(t)$ gilt: $s(\widehat{ac}) = ts(\widehat{ab})$. Dann gibt es zu jedem t, $0 \leqq t \leqq 1$ eine Folge t_i, so daß

$$c_i(t_i) \to c(t). \tag{10}$$

Dies folgt aus dem ersten Postulat für Mengenkonvergenz (§ 6). Dann haben wir aber $s(\widehat{a_i c_i}) \to s(\widehat{ac})$, andererseits $s(\widehat{a_i c_i}) = = t_i s(\widehat{a_i b_i})$, $s(\widehat{ac}) = ts(\widehat{ab})$, $s(\widehat{a_i b_i}) \to s(\widehat{ab})$. Also für $s(\widehat{ab}) > 0$:

$$t_i \to t. \tag{11}$$

Betrachten wir nun neben den Punkten $c_i(t_i)$ die Punkte $c_i(t)$, so ist $\varrho_G[c_i(t_i), c_i(t)] = |t_i - t| \cdot s(\widehat{a_i b_i})$, also $\varrho_G(c_i(t_i) c_i(t)) \to 0$, und damit

$$c_i(t) \to c(t). \tag{12}$$

Offenbar wird durch (10), (11), (12) das Verhalten der ein-

[24]) Um das Aussondern von Teilfolgen übersichtlicher schreiben zu können, verabreden wir von jetzt ab: Die Indices i einer Folge (x_i) müssen nicht notwendig alle natürlichen Zahlen durchlaufen, sondern irgendeine unendliche Folge (i) monoton wachsender natürlicher Zahlen.

[25]) Literaturangaben bei HR, 216.

zelnen Punkte einer konvergenten Folge von G-Strecken in der Weise erfaßt, wie es der Anschauung entspricht, und wie es bei der Hilbert-Caratheodoryschen Methode von vornherein angesetzt wird. Wir mußten die G-Streckenkonvergenz dem allgemeineren in § 6 gegebenen Begriff unterordnen, um nachher auch z.B. den Fall erfassen zu können, daß eine Folge immer längerer euklidischer Strecken in der euklidischen Ebene gegen eine Halbgerade konvergiert. Die einheitliche Parameterdarstellung ist auf diesen Fall offenbar nicht übertragbar.

Die allgemeine Untersuchung der normalen und nicht-normalen Mengen von G-Strecken stützen wir auf eine Betrachtung im Kleinen.

§ 9. *G-Strecken im Kleinen.*

Kleine G-Kreisscheibe, $k_G(x)$, wollen wir, wie schon in § 7 erwähnt, eine G-Kreisscheibe dann nennen, wenn es eine konzentrische G-Kreisscheibe $K_G(x)$ von mindestens dreifachem Radius gibt.

Die „offnen" kleinen G-Kreisscheiben k'_G, entsprechend K'_G definiert, sind dann wieder ein vollständiges Umgebungssystem für G.

Seien a, b beliebige Punkte von $k_G(x)$, $w(ab)$ irgendein rektifizierbarer a mit b in G verbindender Weg der Länge $T(ab)$, der wenigstens einen Punkt mit der Peripherie der „großen" G-Kreisscheibe $K_G(x)$ gemein hat. Dann kann ich auf der Peripherie von $K_G(x)$ einen Punkt c von $w(ab)$ so bestimmen, daß der Teilbogen $w(ac)$ ganz in $K(x)$ liegt, ferner einen (nicht notwendig von c verschiedenen) Peripheriepunkt c' von $w(ab)$, so daß der Teilbogen $w(c'b)$ ebenfalls ganz in $K(x)$ liegt. Dann ist $w(ab)$ nicht kürzer als $w(ac) + w(c'b)$; wegen der Minimaleigenschaft der Strecken (§ 3) in $K(x)$, haben wir also die Abschätzung $T(ab) \geqq s(ac) + s(c'b)$. Nun seien r, R die Radienlängen von $k(x)$ bzw. $K(x)$, also $3r \leqq R$. Dann ist $s(xa) + s(ac) \geqq s(xc) = R$, $s(xa) \leqq r$, also $s(ac) \geqq 2r > s(ax)$. Entsprechend findet man $s(c'b) > s(xb)$. Also $T(ab) > s(ax) + s(xb)$; das bedeutet aber: Jeder rektifizierbare, a mit b in G verbindende Weg, der nicht ganz im Innern von $K(x)$ liegt, ist länger als der sicher in $K_G(x)$, sogar in $k_G(x)$ verlaufende Weg $\overline{ax} + \overline{xb}$. *Wenn es also eine G-Strecke* $\widehat{ab}$ *gibt, liegt sie in* $K_G(x)$.

Liegt die — jedenfalls in $k(x)$ enthaltene — Strecke $\overline{ab}$ in $k_G(x)$, so ist diese Strecke zugleich G-Strecke, und zwar dann die *einzige*, die a mit b verbindet. Liegt $\overline{ab}$ nicht in $k_G(x)$, so müssen insbesondere a, b beide von x verschieden sein (denn ax,

$\overline{xb}$ liegt in $k_G(x)$ für alle $a \subset k_G(x)$, $b \subset k_G(x)$). Dann sind eindeutig zwei Radien A, B von $K(x)$ bestimmt, so daß $a \subset A$, $b \subset B$. Bildeten diese Radien einen Durchmesser, so wäre $\overline{ab} = \overline{ax} + \overline{xb}$ in $k_G(x)$ enthalten, entgegen unsrer Annahme. Also begrenzen A, B einen hohlen Sektor V und einen überstumpfen Sektor U, deren Vereinigungsmenge $K(x)$ erfüllt; v, u seien die entsprechenden Sektoren aus $k(x)$. Läge v in $k_G(x)$, so auch $\overline{ab}$ (vgl. § 3), entgegen unsrer Annahme. Also gibt es einen in V enthaltenen Sektor V' von $K(x)$, der nicht in $K_G(x)$ enthalten ist; dies folgt aus unsern in § 6 gemachten Voraussetzungen über die Gestalt von $K_G(x)$. Gibt es eine G-Strecke $\widehat{ab}$, so ist sie demnach im zu V' komplementären, U enthaltenden überstumpfen Sektor U' von $K(x)$ enthalten. Nach § 3 wird aber die kürzeste in U' liegende Verbindung zweier Punkte a, b eines überstumpfen Sektors U' entweder durch $\overline{ab}$ (wenn $\overline{ab}$ in U' liegt, was hier nicht der Fall ist), oder durch $\overline{ax} + \overline{xb}$ geliefert. Ergebnis:

Zwei Punkte a, b einer kleinen G-Kreisscheibe $k_G(x)$ besitzen stets eine und nur eine verbindende G-Strecke $\widehat{ab}$. Diese liegt in $k_G(x)$. $\widehat{ab}$ ist identisch mit $\overline{ab}$, falls $\overline{ab} \subset k_G(x)$. Ist das nicht der Fall, so gibt es keinen in $k_G(x)$ enthaltenen hohlen oder gestreckten Sektor von $k(x)$, auf dessen Begrenzung a, b liegen. Dann ist $\widehat{ab}$ der (notwendig bei x geknickte) Streckenzug $\overline{ax} + \overline{xb}$.

Ist also $\widehat{ab}$ keine Strecke, so ist x (vgl. § 6) notwendig entweder einspringende Ecke von G, oder Knotenpunkt von G; jedenfalls Randpunkt, und zwar singulärer.

Wir können das Ergebnis auch so aussprechen: Relativ zu G bilden die offnen kleinen G-Kreisscheiben ein vollständiges System *konvexer* Umgebungen; je zwei Punkte einer solchen Umgebung k'_G haben in G genau eine kürzeste Verbindung, und diese liegt ganz in k'_G. Entsprechend für k_G.

Der Übergang von der Kreisscheibe zur kleinen Kreisscheibe läßt sich nicht sparen; die in § 6 definierten $K_G(x)$ brauchen nicht konvex in G zu sein. Sie sind es nur immer in bezug auf ihren Mittelpunkt („sternkonvex").

Ist x ein Punkt einer beliebig langen G-Strecke L, so kennen wir jetzt den Verlauf von L in der Umgebung von x; der Durchschnitt von L mit einer kleinen Kreisscheibe um x als Mittelpunkt ist notwendig selbst eine G-Strecke, besteht also aus zwei in x zusammenstoßenden Strecken, die dort nur dann einen nichtgestreckten Winkel bilden können, wenn x einspringende Ecke oder Knotenpunkt von G ist; jene Strecken dürfen dann nicht die Begrenzung eines in G enthaltenen hohlen Sektors enthalten. Eine G-Strecke ist demnach stets ein Streckenzug aus endlich vielen Strecken. In einem geodätischen Bereich G sind dann und nur dann alle G-Strecken geodätische Bögen, wenn G geodätisch konvex ist.

Wir zeigen nun: *Jede Menge von G-Strecken, deren Endpunkte in einer festen kleinen G-Kreisscheibe liegen, ist normal.*

Beweis: $\widehat{a_i b_i}$ sei eine Teilfolge der gegebenen Menge von G-Strecken, es gibt also eine kleine G-Kreisscheibe A, so daß für alle $i \subset (i)$: $a_i \subset A$, $b_i \subset A$. Da A kompakt und abgeschlossen ist, besitzen die a_i, b_i Häufungspunkte a, b in A, und es gibt eine Teilfolge $(m) \subset (i)$, so daß $a_m \to a$, $b_m \to b$. Wir haben zu zeigen: $\widehat{a_m b_m} \xrightarrow{G} \widehat{ab}$, wobei ja nach dem vorigen $\widehat{ab}$ eindeutig als in A enthaltene G-Strecke der Endpunkte a, b bestimmt ist.

Wie in § 8 beziehen wir den laufenden Punkt c_m von $\widehat{a_m b_m}$ auf einen Parameter t, $0 \leqq t \leqq 1$, indem wir mit $c_m(t)$ denjenigen Punkt c_m bezeichnen, für den $s(\widehat{a_m c_m}) = ts(\widehat{a_m b_m})$, also $s(\widehat{c_m b_m}) = (1-t)\, s(\widehat{a_m b_m})$. Bei festem t liegt die Punktfolge $c_m(t)$ in A, sie hat also einen Häufungspunkt $c = c(t) \subset A$, der eindeutig eine G-Strecke $\widehat{ac} \subset A$ bestimmt. Für die Teilfolge $(n) \subset (m)$, für die $c_n(t) \to c(t)$, haben wir $s(\widehat{a_n c_n}) \to s(\widehat{ac})$, also wegen $s(\widehat{a_n b_n}) \to s(\widehat{ab})$ und $s(\widehat{a_n c_n}) = ts(\widehat{a_n b_n})$: $s(\widehat{ac}) = ts(\widehat{ab})$. Ebenso folgt aber: $s(\widehat{cb}) = (1-t)s(ab)$, also $s(\widehat{ac}) + s(\widehat{cb}) = s(\widehat{ab})$. Die letzte Gleichung besagt aber wegen der Einzigkeit der G-Strecke $\widehat{ab}$, daß $c \subset \widehat{ab}$. Die vorhergehenden beiden Gleichungen sagen dann aus, daß $\widehat{ab}$ durch $c = c(t)$ im Verhältnis $t : (1-t)$ geteilt wird. Wir können nun schließen, daß auch die ursprüngliche Folge $c_m(t)$ keinen andern Häufungspunkt hat, als diesen wohlbestimmten Punkt $c(t)$ auf $\widehat{ab}$, gegen den sie somit konvergiert. Lassen wir t das Intervall $(0, 1)$ durchlaufen, so folgt, daß für $\widehat{ab}$ das erste Konvergenzpostulat von § 6 erfüllt ist; ferner folgt aus dem vorstehenden, daß die Häufungspunkte jeder Folge $c_m(t_m)$ auf $\widehat{ab}$ liegen, so daß auch das zweite Konvergenzpostulat erfüllt ist.

§ **10.** *G-Strecken im Großen. Verteilungssatz.* Die verschiedenen Konvergenzbetrachtungen über kürzeste Wege und divergente Strahlen, wie sie in HR gemacht und auch von uns im allgemeinern Fall der geodätischen Bereiche gebraucht werden, lassen sich zurückführen auf folgenden

Verteilungssatz: *M sei eine in G kompakte Punktmenge. (L) sei eine unendliche Menge von G-Strecken $L = \widehat{ab}$, wobei stets $a \subset M$. Dann sind nur zwei Fälle möglich:*

1) (L) ist eine Normalmenge.

2) (L) ist keine Normalmenge. Es gibt in (L) eine Teilfolge $L_i = \widehat{a_i b_i}$ folgender Eigenschaft: Auf jedem L_i gibt es einen Punkt t_i, so daß die Folge t_i in G divergiert, und so daß die Teil-G-Strecken $\acute{a_i t_i}$ von L_i gegen einen divergenten G-Strahl S in G konvergieren; dabei konvergieren die a_i gegen den Anfangspunkt von S.

Zum Verständnis des zweiten Falles sei folgendes Beispiel genannt: Der geodätische Bereich G sei das Äußere eine euklidischen Kreises K in einer euklidischen Ebene E. T sei eine Tangente an K, t der Berührungspunkt, a, b zwei Punkte von T, die t zwischen sich lassen. Nun sei (L_i) eine Folge euklidischer Strecken, die in G enthalten (also G-Strecken) sind, und deren Endpunkte a_i, b_i, gegen a, b konvergieren. Ist $t_i \subset L_i$ eine gegen t (in E!) konvergente Punktfolge, so konvergieren in E die Teilstrecken $a_i t_i$ von L_i gegen die Teilstrecke at von T. In G aber divergiert die Folge t_i, da ja $t \not\subset G$, und die $a_i t_i$ konvergieren in G gegen den in G divergenten G-Strahl $S = at - t$.

Bemerkenswert am Verteilungssatz dürfte es sein, daß auch bei unsern recht allgemeinen Voraussetzungen über G nichts wesentlich anderes bei einer nicht-normalen G-Streckenmenge eintreten kann als in dem einfachen Beispiel, das wir nannten.

Der Beweis beruht auf folgender heuristischer Überlegung: Da M kompakt ist, kann man erwarten, daß man hinreichend-kleine Teilstrecken auf den L derart abtragen kann, daß man nach § 9 die Menge dieser Teilstrecken als normal erkennen kann. Bei kontinuierlicher Verlängerung aller dieser Teilstrecken wird die Menge entweder dauernd normal bleiben, bis man alle L ganz durchlaufen hat; dann wird der erste Fall des Satzes eintreten. Oder aber es wird eine Länge geben, bei deren Abtragung die Teilstrecken der L aufhören, eine Normalmenge zu bilden. Genauere Analyse dieses Übergangsfalles wird uns zur Aussonderung der im 2. Fall des Satzes erwähnten Teilfolge L_i führen.

Wir bezeichnen mit $L_T = \widehat{at}$ die auf $L = \widehat{ab}$ von a aus abgetragene Teil-G-Strecke der Länge T, unter der Voraussetzung $s(\widehat{ab}) > T$. Andernfalls bedeute t den Punkt b und L_T die ganze G-Strecke L. Unter L_0 verstehen wir den Punkt a, als G-Strecke der Länge Null aufgefaßt. Stets bedeutet L eine G-Strecke der vorgegebenen Menge (L).

Mit $V(T)$ bezeichnen wir die Menge aller G-Strecken L_{T_1} für $0 \leqq T_1 \leqq T$.

Mit (T) bezeichnen wir nunmehr die Menge aller nichtnegativen Zahlen T derart, *daß $V(T)$ eine Normalmenge ist und unendlichviele G-Strecken der Länge T enthält.*

Die Zahlenmenge (T) ist nicht leer, sondern enthält sicher die Zahl $T = 0$. Denn $V(0)$ ist normal, weil M kompakt, und enthält unendlichviele G-Strecken (der Länge Null), weil vorausgesetzt war, daß (L) eine unendliche Menge von G-Strecken ist.

(T) hat die Eigenschaft: Aus $T_1 \subset (T)$, $0 \leqq T_2 \leqq T_1$, folgt $T_2 \subset (T)$.

T_0 sei die obere Grenze der $T \subset (T)$; falls (T) unbeschränkt ist, bedeute T_0 das Symbol ∞, und $T_i \to T_0$ bedeute, daß die endlichen Zahlen T_i fast alle über jeder gegebenen endlichen Schranke liegen.

N_0 sei die Punktmenge, die von der Vereinigungsmenge der $V(T)$ für alle $T \subset (T)$ bedeckt wird. *Dann unterscheiden wir, ob N_0 in G kompakt ist oder nicht, und werden sehen, daß diese Unterscheidung sich mit der Fallunterscheidung des Verteilungssatzes deckt.*

Annahme I: *N_0 ist kompakt.* Dann sei N die in G abgeschlossene Hülle von N_0. Als abgeschlossene Hülle einer kompakten Menge in einem metrischen Raum ist auch N kompakt [26]). Wir können also ein positives $r(N)$ gemäß dem in § 7 aufgestellten Hilfssatz bestimmen.

Nun muß T_0 endlich sein, sonst gäbe es in (T) eine Folge unbegrenzt wachsender Zahlen, also in der Vereinigungsmenge der $V(T)$ eine Folge unbegrenzt länger werdender G-Strecken, dann wäre aber N_0 nicht einmal beschränkt, geschweige denn kompakt. Hiernach gibt es in (T) eine endliche Zahl $T' \geqq T_0 - \frac{r}{4}$; $V(T')$ ist dann eine Normalmenge und enthält unendlichviele Strecken der Länge T'. Wir setzen ferner für $0 < r' \leqq r$: $T'' = T_0 + \frac{r'}{4}$ und behaupten, daß auch $V(T'')$ normal ist. Sei also eine beliebige Teilfolge $L_i'' = \widehat{a_i x_i''}$ aus $V(T'')$ gegeben, dann haben wir eine Teilfolge $(m) \subset (i)$ und eine G-Strecke $\widehat{ax''}$ derart anzugeben, daß $\widehat{a_m x_m''} \xrightarrow{G} \widehat{ax''}$.

Nun ist $T'' - T' \leqq \frac{r}{2}$. Auf jedem L_i'' gibt es also eine (echte

[26]) l.c. [20]) Kap. VII, § 5, S. 234.

oder unechte) Teilstrecke $L_i' = \widehat{a_i x_i'}$, die um höchstens $\frac{r}{2}$ kürzer ist als L_i'' und die zu $V(T')$ gehört. Wir denken uns auf jedem L_i'' ein solches L_i' abgetragen; dann gibt es, weil $V(T')$ normal, eine Teilfolge $(k) \subset (i)$ und eine G-Strecke $\widehat{ax'}$, so daß $\widehat{a_k x_k'} \overset{G}{\rightarrow} \widehat{ax'}$; also nach § 8: $x_k' \rightarrow x'$. Da $x_k' \subset N_0$, folgt $x' \subset N$. Also gibt es wegen der Definition von $r(N)$ eine kleine G-Kreisscheibe A, die x' enthält, und von deren Peripherie x' mindestens den G-Abstand r hat. Da nun für alle $k \subset (k)$ die Punkte x_k' und x_k'' voneinander höchstens den G-Abstand $\frac{r}{2}$ haben, und $x_k' \rightarrow x'$, so liegen fast alle x_k'' in A, haben also einen Häufungspunkt $x'' \subset A$. Sei nun (m) eine solche Teilfolge von (k), daß $x_m'' \rightarrow x''$. Dann folgt aus § 9: Es gibt eine G-Strecke $\widehat{x'x''} \subset A$, und für die Teil-$G$-Strecken $\widehat{x_m' x_m''}$ der L_m'' gilt: $\widehat{x_m' x_m''} \overset{G}{\rightarrow} \widehat{x'x''}$. Aus $s(\widehat{a_m x_m'}) \rightarrow s(\widehat{ax'})$, $s(\widehat{x_m' x_m''}) \rightarrow s(\widehat{x'x''})$, $s(\widehat{a_m x_m'}) + s(\widehat{x_m' x_m''}) = s(\widehat{a_m' x_m''}) = \varrho_G(a_m' x_m'')$ folgt aber: $s(\widehat{ax'}) + s(\widehat{x'x''}) = \varrho_G(a'x'')$, d.h. der Streckenzug $\widehat{ax'} + \widehat{x'x''}$ ist eine G-Strecke $\widehat{ax''}$. Man überlegt sich leicht, daß aus $\widehat{a_m x_m'} \overset{G}{\rightarrow} \widehat{ax'}$, $\widehat{x_m' x_m''} \overset{G}{\rightarrow} \widehat{x'x''}$, folgt: $\widehat{a_m x_m''} \overset{G}{\rightarrow} \widehat{ax''}$; daß also infolge der ersten beiden Limesrelationen die beiden Konvergenzpostulate erfüllt sind, die nach § 6 die letzte Limesrelation definieren.

$V(T'')$ ist also in der Tat eine Normalmenge. Enthielte $V(T'')$ unendlich viele G-Strecken der Länge T'', so wäre $T'' \subset (T)$, im Widerspruch zu $T'' > T_0$. Somit kann es in der vorgegebenen Menge (L) höchstens endlichviele L einer Länge $\geqq T''$ geben. (L) entsteht also aus der Normalmenge $V(T'')$ durch Hinzufügen höchstens endlichvieler Elemente. Offenbar erhält man aber aus einer Normalmenge durch Hinzufügen höchstens endlichvieler Elemente notwendig wieder eine Normalmenge. Also ist (L) eine Normalmenge. T_0 erweist sich wegen der Willkürlichkeit von r', und damit von T'', als obere Grenze der Längen der $L \subset (L)$.

Annahme II: *N_0 ist nicht kompakt.* Dann gibt es also in N_0 eine in G divergente Punktfolge (t_n). Nach der Definition von N_0 gibt es zu jedem t_n eine G-Strecke $\widehat{a_n t_n}$ der Länge T_n, so daß $T_n \subset (T)$ und $\widehat{a_n t_n} \subset V(T_n)$, so daß also $\widehat{a_n t_n}$ Teil-G-Strecke einer G-Strecke $L_n \subset (L)$ ist.

Die Häufungswerte der Zahlenfolge (T_n) sind jedenfalls $\leqq T_0$. Gäbe es einen solchen Häufungswert T', der $< T_0$ wäre, so gäbe es ein positives d, so daß $T' + d \subset (T)$, ferner gäbe es eine Teilfolge $(n') \subset (n)$, so daß $T_{n'} \leqq T' + d$. Dann lägen aber die G-Strecken $\widehat{a_{n'} t_{n'}}$ alle in der Normalmenge $V(T' + d)$, also wäre nach § 8 die Folge $(t_{n'}) \subset (t_n)$ kompakt, während doch (t_n) divergiert. Somit konvergiert (T_n) gegen T_0; da andererseits $T_n \leqq T_0$, so kann ich eine unendliche Teilfolge $(m) \subset (n)$ derart wählen, daß (T_m) eine mit wachsendem m *nicht abnehmende* gegen T_0 konvergente Zahlenfolge ist. Der Einfachheit halber denke ich mir die Bezeichnung so geändert, daß in (T_m), (a_m), (t_m) die Indices m wieder alle natürlichen Zahlen durchlaufen. Die Folge (t_m) ist wieder divergent.

Ich trage nun für jedes natürliche k und alle natürlichen $m \geqq k$ die Länge T_k von a_m aus auf $\widehat{a_m t_m}$ ab bis t_m^k; die Teil-G-Strecke $\widehat{a_m t_m^k}$ von $\widehat{a_m t_m}$ nenne ich L_m^k; also $L_m^m = \widehat{a_m t_m^m} = \widehat{a_m t_m}$. Dann liegen für jedes *feste* k die L_m^k *für alle* $m \geqq k$ in der G-Streckenmenge $V(T_k)$, die wegen $T_k \subset (T)$ normal ist. Somit gibt es eine Teilfolge $(m_1) \subset (m)$ und eine G-Strecke $S^1 = \widehat{a t^1}$ derart, daß $a_{m_1} \to a$ und $L_{m_1}^1 \overset{G}{\to} S^1$. Sei allgemein für $k \geqq 2$ schon die Teilfolge $(m_{k-1}) \subset (m)$ definiert, dann wähle ich eine Teilfolge $(m_k) \subset (m_{k-1})$ und eine G-Strecke $S^k = \widehat{a t^k}$ derart, daß $L_{m_k}^k \overset{G}{\to} S^k$. Aus $L_{m_k}^{k-1} \subset L_{m_k}^k$ folgt natürlich $S^{k-1} \subset S^k$.

Die Vereinigungsmenge S der S^k ist ein G-Strahl mit dem Anfangspunkt a. Wir bilden nun die Diagonalfolge (i) der Folgen (m_k). Dann ist wegen $(i) \subset (m_1)$: $a_i \to a$. Wir behaupten ferner: $L_i^i \overset{G}{\to} S$.

Zum Beweis prüfen wir zuerst nach, ob das erste Konvergenzpostulat aus § 6 erfüllt ist. Sei also x ein beliebiger Punkt von S. Dann gibt es ein k, so daß $x \subset S^k$. Also dringen in jede Umgebung von x fast alle $L_{m_k}^k$ ein, also auch fast alle L_i^i, denn für fast alle $i \subset (i)$ gilt $i > k$, $i \subset (m_k)$. Das erste Konvergenzpostulat ist also erfüllt.

Nehmen wir nun an, das zweite Postulat wäre nicht erfüllt. Dann gibt es einen Punkt $c \not\subset S$, eine Teilfolge $(r) \subset (i)$, sowie auf jedem L_r^r einen Punkt c_r derart, daß $c_r \to c$. Wir setzen $\varrho_G(ac) = C$ und bezeichnen mit C_r die Länge der Teil-G-Strecke $\widehat{a_r c_r}$ von L_r^r. Dann ist $C_r \to C$ und $C_r \leqq T_r \leqq T_0$. Also $C \leqq T_0$. Wäre $C < T_0$, so gäbe es ein k, so daß $T_k > C$. Dann wäre für fast alle $r \subset (r)$ auch $C_r \leqq T_k$, also $c_r \subset L_r^k$, also $c \subset S_k \subset S$, im Widerspruch zur Voraussetzung $c \not\subset S$. Somit ist $C = T_0$. T_0 ist demnach eine endliche Zahl. Dann folgt aber aus $C_r \to C = T_0$, $T_r \to T_0$, $T_r - C_r = \varrho_G(\widehat{c_r t_r}) : \varrho_G(c_r t_r) \to 0$, also $t_r \to c$, im Widerspruch dazu, daß (t_r) Teilfolge der divergenten Folge (t_m). Das 2. Konvergenzpostulat ist also erfüllt und die Relation $L_i^i \overset{G}{\to} S$ damit bewiesen.

Wäre S kein divergenter G-Strahl, sondern in einer G-Strecke S' enthalten, so enthielte die auf S' abgeschlossene Hülle von S einen Häufungspunkt c der t^k. Dann wäre $\varrho_G(ac) = T_0$ und man könnte wie soeben schließen, daß c auch Häufungspunkt der t_i wäre, entgegen der Divergenz dieser Folge. Damit ist gezeigt, daß unter der Annahme II der 2. Fall des Verteilungssatzes eintritt, und zwar ist T_0 die (vielleicht unendliche) Länge von S.

§ 11. *Folgerungen aus dem Verteilungssatz. Divergente beschränkte G-Strahlen und Verbindbarkeit beliebiger Punkte durch G-Strecken.*

Wir übertragen nun die Betrachtungen, die in HR für Flächen ausgeführt sind, mit unwesentlichen Änderungen auf alle geodätischen Bereiche. Diese Betrachtungen können wir jetzt auf den Verteilungssatz gründen.

1. Folgerung. *Zwei gegebene Punkte a, b eines geodätischen Bereiches G lassen sich entweder durch eine G-Strecke verbinden, oder es gibt einen von a ausgehenden beschränkten divergenten G-Strahl einer Länge $< \varrho_G(ab)$, für dessen laufenden Punkt x gilt:*

$$s(\widehat{ax}) + \varrho_G(xb) = \varrho_G(ab). \tag{13}$$

Beweis. Eine G-Strecke $\widehat{ax}$, deren Endpunkte die Gleichung (13) erfüllen, wollen wir „auf b gerichtet" nennen. Die Länge einer von a ausgehenden auf b gerichteten G-Strecke ist also notwendig $\leqq \varrho_G(ab)$. Wir nennen T_0 die obere Grenze der Längen aller von a ausgehenden auf b gerichteten G-Strecken und bezeichnen die Menge dieser G-Strecken mit (L). Dann ist also $T_0 \leqq \varrho_G(ab)$. Sei nun B eine G-Kreisscheibe vom Mittelpunkt b, und sei c der Radius von B. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) $T_0 > \varrho_G(ab) - c$. Wir behaupten, dann ist a mit b durch eine G-Strecke verbindbar. Dann gibt es nämlich eine von a ausgehende auf b gerichtete G-Strecke $\widehat{ax}$ der Länge $s(\widehat{ax}) >$ $> \varrho_G(ab) - c$. Dann folgt aus (13): $\varrho_G(xb) < c$. Folglich $x \subset B$; somit gibt es (in B) eine G-Strecke $\widehat{xb}$, die sogar eine Strecke $\overline{xb}$ ist. Der aus $\widehat{ax}$ und $\overline{xb}$ zusammengesetzte Weg, der a mit b verbindet, hat die Länge $\varrho_G(ab)$, ist also eine G-Strecke $\widehat{ab}$.

2) $T_0 \leqq \varrho_G(ab) - c$. Wir behaupten, dann tritt die zweite Alternative des zu beweisenden Satzes ein. Wir betrachten eine

Teilfolge $(L_i) \subset (L)$, so daß die Längen T_i der L_i gegen T_0 konvergieren. Auf (L_i) ist der Verteilungssatz anwendbar, die Menge M, von der in der Voraussetzung dieses Satzes die Rede ist, besteht jetzt aus dem Punkt a allein.

Wäre (L_i) normal, so gäbe es eine G-Strecke $\widehat{ax}$ und eine Folge $(k) \subset (i)$, so daß $L_k = \widehat{ax_k} \overset{G}{\to} \widehat{ax}$. Dann wäre $s(\widehat{ax}) = T_0$, und aus $s(\widehat{ax_k}) + \varrho_G(x_k b) = \varrho_G(ab)$ würde folgen $s(\widehat{ax}) + \varrho_G(xb) = \varrho_G(ab)$. Somit wäre $\widehat{ax}$ auf b gerichtet. Wäre $x = b$, so wäre $T_0 = \varrho_G(ab)$ gegen unsere Annahme. Somit ist $x \neq b$, und ich kann um x als Mittelpunkt eine G-Kreisscheibe X schlagen, die b nicht enthält. Sei d der Radius von X, und sei $w_i(xb)$ irgendeine Folge von rektifizierbaren Wegen, die x in G mit b verbinden, und deren Längen t_i gegen $\varrho_G(xb)$ konvergieren. Dann hat jedes w_i einen Punkt x_i' mit der Peripherie von X gemein, und wegen $s(xx_i') = d$ folgt: $t_i \geqq d + \varrho_G(x_i'b)$. Wegen der Kompaktheit und Abgeschlossenheit von X haben die x_i' einen Häufungspunkt $x' \subset X$, und es folgt $s(xx') = d$ (x' liegt also auf der Peripherie von X) und wegen $t_i \to \varrho_G(xb)$: $\varrho_G(xb) \geqq s(xx') + \varrho_G(x'b)$. Hier kann aber nur das Gleichheitszeichen stehen, weil nach der Dreiecksungleichung auch $\varrho_G(xb) \leqq s(xx') + \varrho_G(x'b)$. Somit ist $\overline{xx'}$ eine auf b gerichtete von x ausgehende G-Strecke, und aus (13) folgt, daß der Streckenzug $\widehat{ax} + \overline{xx'}$ ebenfalls eine auf b gerichtete, aber von a ausgehende G-Strecke $\widehat{ax'}$ wäre; diese G-Strecke hätte aber die Länge $T_0 + d$, was der Definition von T_0 widerspricht.

(L_i) ist also nicht normal. Es tritt der zweite Fall des Verteilungssatzes ein, und aus der besonderen Art der Menge (L_i) folgt, daß der divergente G-Strahl, der den Forderungen des Verteilungssatzes entspricht, die Eigenschaften hat, die zu beweisen waren. Die Länge des Strahls ist $\leqq T_0$, also $< \varrho_G(ab)$.

2. Folgerung. *S sei ein divergenter G-Strahl. (x_i) sei eine Punktfolge aus S, die keinen Häufungspunkt auf S hat. Dann ist (x_i) divergent in G.*

Beweis. a sei der Anfangspunkt von S, die Teilstrecken $\widehat{ax_i} \subset S$ nennen wir L_i, ihre Längen T_i. Nehmen wir an, die Folge (x_i) hätte einen Häufungspunkt x, und sei $\varrho_G(ax) = T$. Wir wählen eine Teilfolge $(k) \subset (i)$, so daß $x_k \to x$. Dann ist $T_k \to T$.

Wäre die Folge (L_k) normal, so gäbe es eine Folge $(r) \subset (k)$, so daß L_r gegen eine G-Strecke konvergierte. Diese G-Strecke X

aber müßte S enthalten, da, wegen der vorausgesetzten Divergenz von (x_r) relativ zu S, die L_r S erschöpfen und demnach jedes feste L_k in fast allen L_r enthalten ist. $S \subset X$ steht im Widerspruch zu der vorausgesetzten Divergenz von S.

Somit ist (L_k) nicht normal und nach dem Verteilungssatz gäbe es eine Folge $(m) \subset (k)$ und auf jedem L_m einen Punkt x'_m, so daß die Punktfolge (x'_m) divergierte. Wir bezeichnen die Länge der Teil-G-Strecke $\widehat{ax'_m}$ vom L_m mit T'_m; also $T'_m \leqq T_m$. Wäre andererseits $T'_m \leqq T_{m_0}$ für ein festes $m_0 \subset (m)$ und unendlichviele $m \subset (m)$, so hätten die x'_m einen Häufungspunkt auf L_m, was nicht stimmt. Also besitzt die Folge T'_m keinen Häufungswert $< T$, also $T'_m \to T$, $T_m - T'_m \to 0$. Nun ist aber $T_m - T'_m = \varrho_G(x'_m x_m)$. Also wäre wegen $x_m \to c$ auch $x'_m \to c$, was nicht stimmt. Die Annahme, (x_i) habe in G einen Häufungspunkt, führt also in allen Fällen auf einen Widerspruch.

Bekanntlich [27]) nennt man eine Folge von Punkten (x_i) eine Fundamentalfolge in G, wenn zu jedem positiven d ein N existiert, so daß für alle $k \geqq N$, $m \geqq N$, $k \subset (i)$, $m \subset (i)$ gilt $\varrho_G(x_k x_m) \leqq d$. Nehmen wir nun bei dem soeben bewiesenen Satz noch an, der G-Strahl S habe eine beschränkte Länge T, so folgt aus der Divergenz der Folge (x_i) unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Beweises: $T_i \to T$, also für $k \subset (i)$, $m \subset (i)$ und $k \to \infty$, $m \to \infty$; $|T_k - T_m| = \varrho_G(x_k x_m) \to 0$. Die x_i bilden somit eine Fundamentalfolge. Damit haben wir die

3. Folgerung. *Auf jedem beschränkten divergenten G-Strahl gibt es eine divergente Fundamentalfolge.*

Mit HR beweisen wir nun einen wichtigen Satz, der die Umkehrung dieser Folgerung umfaßt, nämlich die

4. Folgerung. *Gibt es in G irgendeinen Punkt a, von dem kein beschränkter divergenter G-Strahl ausgeht, so sind alle in G beschränkten Mengen kompakt in G.*

Insbesondere gibt es also keine divergente Fundamentalfolge, denn jede Fundamentalfolge ist offenbar beschränkt. Den Beweis führen wir fast wörtlich nach HR: b_i sei irgendeine in G beschränkte unendliche Menge. Ließe sich a mit irgendeinem b_i nicht durch eine G-Strecke verbinden, so gäbe es nach der 1. Folgerung einen beschränkten divergenten G-Strahl durch a, entgegen der Voraussetzung. Somit gibt es zu jedem $i \subset (i)$ eine G-Strecke $L_i = \widehat{ab_i}$. Wäre die G-Streckenmenge L_i nicht normal, so gäbe es wiederum nach dem Verteilungssatz einen divergenten

---

[27]) Vgl. z.B. HR, 214.

G-Strahl durch a, und dieser wäre beschränkt, weil mit den b_i zugleich die Längen der L_i beschränkt sind. Also ist die Menge (L_i) normal; also (b_i) als Endpunktmenge der (L_i) kompakt nach § 8.

Aus der 3. und 4. Folgerung ergibt sich eine bemerkenswerte Aussage, die für Flächen schon vollständig durch HR bewiesen, allerdings dort nicht hervorgehoben ist:

5. Folgerung. *Entweder durch keinen Punkt oder durch alle Punkte eines geodätischen Bereichs laufen beschränkte divergente G-Strahlen.*

Beweis: Nach der 4. Folgerung genügt die Existenz eines einzigen auf keinem beschränkten divergenten G-Strahl gelegenen Punktes, um auf die Kompaktheit aller beschränkten Punktmengen, also die Konvergenz aller Fundamentalfolgen, also nach der 3. Folgerung auf die Nichtexistenz divergenter beschränkter G-Strahlen zu schließen.

6. Folgerung. *Gibt es in G einen divergenten beschränkten G-Strahl, so gibt es zu jedem Punkt $a \subset G$ eine positive Zahl $z(a)$ mit folgenden Eigenschaften:* 1) *Jeder Punkt $b \subset G$ mit $\varrho_G(ab) < z(a)$ ist mit a durch eine G-Strecke verbindbar.* 2) *Ist d eine beliebige positive Zahl $< z(a)$, so ist die Menge aller Punkte b mit $\varrho_G(ab) \leqq d$ kompakt.* 3) *a ist Anfangspunkt eines divergenten G-Strahls der Länge $z(a)$.*

Beweis: Da es in G einen beschränkten divergenten G-Strahl gibt, sind nach der 3. Folgerung nicht alle beschränkten Mengen in G kompakt. Andererseits gibt es um a als Mittelpunkt eine G-Kreisscheibe A. Ist r der Radius von A, so ist die Menge aller Punkte b mit $\varrho_G(ab) \leqq r$ kompakt.

Die Menge (d) aller positiven Zahlen d der Eigenschaft, daß durch $\varrho_G(ab) \leqq d$ eine kompakte Punktmenge (b) definiert wird, ist demnach weder nach oben unbeschränkt, noch leer; also besitzt (d) eine endliche obere Grenze $z(a)$. Definitionsgemäß hat $z(a)$ die zweite im Satz geforderte Eigenschaft. Gäbe es einen Punkt b mit $\varrho_G(ab) = d < z(a)$, der nicht mit a durch eine G-Strecke verbindbar wäre, so wäre a Anfangspunkt eines divergenten G-Strahls S der Länge $< \varrho_G(ab) = d < z(a)$. Auf S läge nach der 3. Folgerung eine divergente Punktfolge b_i mit $\varrho_G(ab_i) \leqq d < z(a)$, entgegen der Definition von $z(a)$. Also hat $z(a)$ auch die erste geforderte Eigenschaft.

Nun sei (L) die Menge aller G-Strecken $\widehat{ab}$ mit $s(\widehat{ab}) \leqq z(a) + x$, wo x eine gegebene positive Zahl. Wäre (L) normal, so wäre die zugehörige Endpunktmenge (b) kompakt, entgegen der Definition von $z(a)$. Somit gibt es nach dem Verteilungssatz einen von a ausgehenden divergenten G-Strahl S der Länge $s \leqq z(a) + x$. $s < z(a)$ ist unmöglich, sonst gäbe es auf S eine divergente Punktfolge b_i mit $\varrho_G(ab_i) \leqq s < z(a)$, entgegen der Definition von $z(a)$. Indem ich nun x die Zahlenfolge $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots.)$ durchlaufen lasse, erhalte ich eine Folge von (nicht notwendig sämtlich voneinander verschiedenen) von a ausgehenden divergenten beschränkten G-Strahlen S_n der Längen s_n, so daß $z(a) \leqq s_n \leqq z(a) + \frac{1}{n}$. Auf jedem S_n wähle ich nun einen Punkt b_n derart, daß die Teil-G-Strecke $L_n = \widehat{ab_n}$ von S_n die Länge $T_n = z(a) - \frac{1}{n}$ hat.

Wäre (L_n) normal, so gäbe es eine Teilfolge $(m) \subset (n)$ und eine G-Strecke $\widehat{ab} = L$ derart, daß $L_m \overset{G}{\rightarrow} L$, also $b_m \rightarrow b$ nach § 8. Dann sei B eine G-Kreisscheibe um b als Mittelpunkt, und es sei r der Radius von B. Wir können ein $k \subset (m)$ so wählen, daß $\frac{2}{k} < \frac{r}{2}$, $\varrho_G(bb_k) < \frac{r}{2}$. Dann läge aber S_k in der kompakten abgeschlossenen Vereinigungsmenge V von L_k und B (wie aus unsern Relationen über die Längen von S_k und L_k leicht zu verifizieren). Also wäre jede Punktmenge auf S_k kompakt, im Widerspruch zur Beschränktheit und Divergenz von S_k und zur 3. Folgerung.

Also ist (L_n) nicht normal. Nach dem Verteilungssatz gibt es somit von a aus einen divergenten G-Strahl S der Länge $s \leqq \overline{\lim}\, T_n = z(a)$. $s < z(a)$ haben wir schon widerlegt. Also hat S die Länge $z(a)$ und $z(a)$ die 3. behauptete Eigenschaft.

Anmerkung: $z(a)$ ist offenbar durch a, G eindeutig bestimmt. Diese Zahl hat in gewissem Sinn ähnliche Eigenschaften wie der Konvergenzradius einer Potenzreihe.

7. Folgerung. *G enthalte einen divergenten beschränkten G-Strahl. $z(a)$ sei für alle Punkte $a \subset G$ gemäß der 6. Folgerung definiert. Dann gilt für ein beliebiges Punktepaar a, b in G:*

$$|z(a) - z(b)| \leqq \varrho_G(ab). \tag{14}$$

Beweis: (x_i) sei eine divergente Punktfolge auf einem von a ausgehenden divergenten Strahl der Länge $z(a)$. Dann ist $\varrho_G(bx_i) \leqq \varrho_G(ab) + \varrho_G(ax_i)$. Wegen der Divergenz von (x_i) und der 2. Eigenschaft der Funktion z gemäß der 6. Folgerung ist $z(b) \leqq \overline{\lim}\, \varrho_G(bx_i)$. Aus der vorletzten Ungleichung folgt aber

$\overline{\lim}\, \varrho_G(bx_i) \leqq \varrho_G(ab) + z(a)$. Also $z(b) \leqq z(a) + \varrho_G(ab)$. Entsprechend $z(a) \leqq z(b) + \varrho_G(ab)$. Diese beiden Ungleichungen sind mit (14) äquivalent.

§ **12.** ***Vollständige Bereiche, wegsame Bereiche. Überlagerungsbereiche.***

Ein geodätischer Bereich G heiße vollständig, wenn er das folgende Postulat erfüllt:

Vollständigkeitspostulat. *Es gibt keine divergente Fundamentalfolge.*

Nach der 3. Folgerung aus dem Verteilungssatz (§ 11) erfüllt jeder vollständige geodätische Bereich auch das folgende

Strahlenpostulat. *Es gibt keinen beschränkten divergenten G-Strahl.* Sei umgekehrt G ein geodätischer Bereich, für den das Strahlenpostulat erfüllt ist, dann erfüllt G nach der 4. Folgerung (§ 11) auch das

Kompaktheitspostulat. *Es gibt keine divergente beschränkte Punktmenge.* Im Kompaktheitspostulat ist aber das Vollständigkeitspostulat enthalten.

Die vollständigen Bereiche können also sowohl durch das Vollständigkeitspostulat, als auch durch das Strahlenpostulat, als auch durch das Kompaktheitspostulat charakterisiert werden; alle diese Postulate sind für geodätische Bereiche äquivalent.

Für die Flächen ist dieses Ergebnis (unter schärferen Voraussetzungen im Kleinen, die jedoch unnötig sind) in HR abgeleitet, wir sind dem Gedankengang von HR gefolgt, jedoch unter erheblichen Abweichungen in den Beweismethoden. Während bei Flächen die Vollständigkeit zugleich die Nichtfortsetzbarkeit aussagt, ist bei den berandeten geodätischen Bereichen von einer ähnlichen Schlußfolgerung keine Rede; z.B. ist die abgeschlossene Quadratfläche in der euklidischen Ebene ein vollständiger (weil kompakter) geodätischer Bereich, jedoch gibt es viele geodätische Bereiche, die eine Quadratfläche als echten Teil enthalten. Der hier auftretende Unterschied zwischen den Flächen und den berandeten geodätischen Bereichen hat uns auch genötigt, das in HR aufgestellte Abtragbarkeitspostulat durch das oben angeführte Strahlenpostulat zu ersetzen, das einen erheblich abweichenden Inhalt hat.

Einen geodätischen Bereich $\underline{G}$ wollen wir einen Überlagerungsbereich des geodätischen Bereichs G nennen, wenn jedem Punkt $\underline{p} \subset \underline{G}$ genau ein Punkt $p \subset G$ zugeordnet ist, den wir den Spurpunkt von $\underline{p}$ nennen, und wenn diese Zuordnung noch folgende Bedingung erfüllt:

Ist A eine G-Kreisscheibe in G, x ein Punkt in A und $\underline{x}$ ein Punkt in $\underline{G}$, dessen Spurpunkt x ist, so gibt es in $\underline{G}$ eine $\underline{x}$ enthaltende $\underline{G}$-Kreisscheibe $\underline{A}$, die isometrisch auf A derart abgebildet ist, daß diese Abbildung jedem Punkt von $\underline{A}$ seinen Spurpunkt zuordnet [28]).

Wir können nun den wichtigen Schluß ziehen:

Jeder Überlagerungsbereich eines vollständigen Bereichs ist vollständig.

Indirekter Beweis: G sei vollständig. $\underline{G}$ ein Überlagerungsbereich von G und nicht vollständig. Dann gibt es auf $\underline{G}$ einen beschränkten divergenten G-Strahl $\underline{S}$. Auf $\underline{S}$ gibt es nach der 3. Folgerung (§ 11) eine divergente Fundamentalfolge $(\underline{x}_i)$. Seien x_i die Spurpunkte der $\underline{x}_i$. Dann ist die Folge (x_i) eine Fundamentalfolge in G, denn sind $\underline{x}_i$, $\underline{x}_k$ zwei Punkte aus $(\underline{x}_i)$, so ist die Spur der Teil-G-Strecke $\widehat{\underline{x}_i\underline{x}_k}$ von $\underline{S}$ ein ebensolanger Bogen in G (der keine G-Strecke in $\underline{G}$ zu sein braucht), also $\varrho_G(x_i x_k) \leqq \varrho_G(\underline{x}_i \underline{x}_k)$. Da G vollständig ist, gibt es in G einen Punkt x, so daß $x_i \to x$. Sei A eine G-Kreisscheibe um x als Mittelpunkt, und vom Radius r. Dann gibt es einen Index $k \subset (i)$ derart, daß 1) $s(\widehat{\underline{x}_k\underline{x}_i}) < \frac{r}{2}$ für alle $i > k$, $i \subset (i)$, 2) $\varrho_G(x_k x) < \frac{r}{2}$. Nun sei $\underline{A}$ in $\underline{G}$ eine $\underline{x}_k$ enthaltende zu A isometrische G-Kreisscheibe, so daß bei der Isometrie jedem Punkt von $\underline{A}$ sein Spurpunkt entspricht. Dann folgt aus unsern Ungleichungen, daß der von $\underline{x}_k$ ausgehende in $\underline{S}$ enthaltene, fast alle $\underline{x}_i$ enthaltende Teil-G-Strahl ganz in $\underline{A}$ liegt (weil seine Spur ganz in A liegt). Also hat die Folge $(\underline{x}_i)$ einen Häufungspunkt in $\underline{A}$, im Widerspruch zu ihrer Divergenz [29]).

Nach der ersten Folgerung (§ 11) genügen die vollständigen Bereiche auch dem

Verbindbarkeitspostulat: *Jedes Punktepaar läßt sich durch eine G-Strecke verbinden.*

Die geodätischen Bereiche, die diesem Postulat genügen, wollen wir die *wegsamen* Bereiche nennen. Diese Klasse geodätischer Bereiche umfaßt also die vollständigen. Es gibt aber auch weg-

---

[28]) l.c. [31]).

[29]) Der entsprechende Schluß für Flächen ist bei Benutzung des Abtragbarkeitspostulats trivial. Vgl. W. Rinow, Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Großen und im Kleinen [Math. Z. **35** (1932), 513].

same Bereiche, die nicht vollständig sind, z.B. das Innere eines Quadrats oder einer Parabel in der euklidischen Ebene.

1. Satz über nichtkompakte geodätische Bereiche. *Durch jeden Punkt geht ein divergenter G-Strahl.*

Beweis: Ist der geodätische Bereich G nicht vollständig, so ist der Satz eine Tautologie. Sei G nun vollständig, also wegsam, a sei ein beliebiger Punkt von G. Da G nichtkompakt, gibt es eine divergente Punktfolge b_i. Da G wegsam, existieren G-Strecken $L_i = \widehat{ab_i}$ für alle b_i. Wäre die Menge (L_i) normal, so wäre die Folge (b_i) kompakt, entgegen der Voraussetzung. Also tritt der zweite Fall des Verteilungssatzes ein; es gibt einen divergenten G-Strahl durch a.

Ist der Bereich vollständig, so ist jener G-Strahl notwendig unbeschränkt. Ist G außerdem eine (vollständige) Fläche, so ist jener G-Strahl ein geodätischer Strahl, der seiner Minimaleigenschaft wegen kein Paar konjugierter Punkte enthält. Für den Fall, daß G eine vollständige Fläche ist, ist Satz 1 von Rinow [30]) bewiesen.

Wir wollen als *G-Gerade* jeden offnen Bogen [14]) eines geodätischen Bereichs bezeichnen, der die Eigenschaft hat, daß jeder in ihm enthaltene Bogen eine G-Strecke ist. Man erhält also eine G-Gerade, indem man von einer G-Strecke die Endpunkte, oder von einem G-Strahl den Anfangspunkt fortläßt. *Divergente G-Gerade* nennen wir demgegenüber eine G-Gerade, die in keinem G-Strahl enthalten ist. Eine G-Gerade nennen wir beschränkt oder unbeschränkt im Sinn der allgemeinen Definition der Beschränktheit von Punktmengen in metrischen Räumen (§ 7). Ist eine G-Gerade g beschränkt, so bezeichnen wir als ihre Länge die (notwendig endliche) obere Grenze der Längen der in g enthaltnen G-Strecken.

Auf kompakten geodätischen Bereichen gibt es natürlich ebensowenig divergente G-Geraden wie divergente G-Strahlen, wie divergente Punktfolgen. Alle diese Bereiche, insbesondere die Normalbereiche, sind vollständig. Aber auch auf nichtkompakten geodätischen Bereichen, sogar wenn sie vollständige offne Flächen sind, braucht es keine divergente G-Gerade zu geben. Z.B. gibt es keine divergente G-Gerade auf dem Rotationsparaboloid. Denn auf dieser Fläche F (die natürlich vollständig und offen ist), wäre eine divergente G-Gerade eine unendlichlange doppelpunktfreie geodätische Linie, die die kürzeste Verbindung jedes

[30]) l. c. [29]), 522.

ihrer Punktepaare ist. Die einzigen in ihrem Gesamtverlauf doppelpunktfreien geodätischen Linien von F sind aber bekanntlich die erzeugenden Parabeln. Nimmt man auf einer solchen Parabel P zwei auf demselben Breitenkreis K von F gelegene Punkte a, b, die hinreichend weit vom Scheitel von P entfernt sind, so erkennt man durch elementare Abschätzung, daß ein von a, b begrenzter Halbkreis von K kürzer ist, als der von a, b begrenzte Teilbogen von P.

Ich hoffe, in einer späteren Arbeit einige Kriterien dafür angeben zu können, wann auf einer der euklidischenEbene homöomorphen Fläche divergente G-Geraden auftreten.

2. Satz über nichtkompakte geodätische Bereiche. *Auf einem wegsamen Bereich G gebe es zwei divergente Punktfolgen (a_i), (b_i) und eine geschlossene Kurve K derart, daß jeder a_i mit b_i in G verbindende Bogen K trifft. Dann gibt es in G eine divergente G-Gerade, die K trifft.*

Die topologische Voraussetzung dieses Satzes ist z.B. für jede Fläche erfüllt, die dem Rotationszylinder homöomorph ist; allgemein für jede Fläche, die mehr als ein Randstück besitzt [31]).

Zum Beweis betrachte ich die G-Strecken $L_i = \widehat{a_i b_i}$. Nach Voraussetzung hat jedes L_i wenigstens einen Punkt c_i mit K gemein. Mit L_i' bzw. L_i'' bezeichne ich die Teil-G-Strecke $\widehat{c_i a_i}$ bzw. $\widehat{c_i b_i}$ von L_i. Da c_i in der kompakten Punktmenge K liegt, ist auf L_i' der Verteilungssatz anwendbar, und zwar muß wegen der vorausgesetzten Divergenz von (a_i) der zweite Fall dieses Satzes eintreten; sei S ein auf diese Weise gefundener divergenter G-Strahl; der Anfangspunkt von S sei c. (k) sei eine Teilfolge von (i) derart, daß Teil G-Strecken (T_k') der (L_k') gegen S konvergieren. Aus $c_k \to c$ und der Abgeschlossenheit von K folgt $c \subset K$. Nun wende ich den Verteilungssatz auf (L_k'') an und erhalte einen divergenten G-Strahl $\underline{S}$ mit dem Anfangspunkt $\underline{c}$ und eine Teilfolge $(m) \subset (k)$ derart, daß Teil-G-Strecken (T_m'') der (L_m'') gegen $\underline{S}$ konvergieren. Da (c_m) eine Teilfolge der (c_k), folgt $\underline{c} = c$. Der offne Bogen $T = S + \underline{S}$, der K in c trifft, hat offenbar die Eigenschaft, daß die G-Strecken $T_m = T_m' + T_m''$ in G gegen T konvergieren, und hieraus folgt leicht in Verbindung mit dem ersten Konvergenzpostulat (§ 6), daß T eine G-Gerade ist. Aus der Divergenz von S und $\underline{S}$ folgt die von T.

---

[31]) Vgl. B. v. Kerekjarto, Vorlesungen über Topologie I (1923), 5. Abschnitt, § 1.

Anmerkungen: In Wirklichkeit ist für die Gültigkeit des Satzes die Voraussetzung, daß G wegsam ist, überflüssig. Ist G nicht nur wegsam, sondern auch vollständig, so sind S und $\underline{S}$ unbeschränkt, also ist T ebenfalls unbeschränkt, und zwar „beiderseits". Ist G außerdem eine Fläche, so ist T natürlich eine doppelpunktfreie geodätische Linie, auf der man von jedem Punkt aus nach beiden Seiten jede Länge abtragen kann, und auf der kein Paar konjugierter Punkte liegt.

Zum Schluß ein Beispiel dafür, daß die Kompaktheit und Beschränktheit eines geodätischen Bereichs *in sich*, wie sie bei unsern Untersuchungen allein eine Rolle spielt, keineswegs dasselbe besagt, wie diese Begriffe, wenn man sie relativ zu einer G tragenden Fläche gebraucht.

Man nehme in der euklidischen Ebene E zunächst Inneres und Rand eines Quadrats der Kantenlänge eins — Normalbereich — und entferne eine Kante K; der entstehende Bereich G ist wegsam, beschränkt und nicht kompakt, also nicht vollständig. Nunmehr ziehe man im Abstand $\frac{1}{n}$ $(n = 2, 3, \ldots.)$ solche Parallelstrecken K_n zu K, die G abzählbar unendlichviele Rechtecke einteilen, die sich, immer schmaler werdend, gegen K häufen. Hierauf verschiebe man alle K_{2n+1} in ihrer Trägergeraden um das Doppelte ihrer Länge nach einer bestimmten Seite, und deformiere gleichzeitig die Rechtecke in Parallelogramme, so daß die auf K senkrechten Kanten von G in zickzackförmige Streckenzüge von abzählbarvielen Strecken übergehen, die sich gegen eine K enthaltende Strecke K' der Länge drei häufen. Die K_n lasse man nun wieder fort. Der entstehende, natürlich dem Bereich G oder der abgeschlossenen Halbebene homöomorphe geodätische Bereich V ist in E beschränkt, also kompakt, dagegen in sich unbeschränkt und vollständig. Denn jede in V divergente Punktfolge muß, als Folge in E betrachtet, alle ihre Häufungspunkte auf K' haben. Verbindet man einen festen Punkt von V der Reihe nach durch *in V liegende* Wege mit allen Punkten der Folge, so kann man elementar (durch Orthogonalprojektion dieser Wege auf K') abschätzen, daß ihre Längen unbegrenzt wachsen. Es gibt also keine in V divergente, in V beschränkte Menge.[32])

---

[32]) Zur Verallgemeinerung von §§ 10—12: G sei zunächst ein beliebiger metrischer Raum mit der Abstandsfunktion ϱ_G. Wenn (9) für irgendwelche Punkte von G gilt, sagen wir, daß x zwischen a und b liegt. Wenn (9) für alle Punkte x eines Bogens ab gilt, heiße dieser eine G-Strecke $\widehat{ab}$. Definition des divergenten G-Strahls wie im Text. Nun stellen wir die Forderung (die z.B. für alle Riemannschen Räume

§ 13. *Zerlegung, Eulersche Charakteristik und Totalkrümmung kompakter geodätischer Bereiche.*

In einem beschränkten Teilbereich eines differentialgeometrischen Grundgebiets läßt sich die Totalkrümmung einerseits als Doppelintegral, andererseits mit Hilfe der Gauß-Bonnetschen Formel als Randintegral ausdrücken, falls der Bereich und sein Rand noch gewisse Stetigkeitseigenschaften hat. Um die Totalkrümmung „im Großen" einzuführen, reduziert man diesen Fall auf den erstgenannten, indem man den Gesamtbereich in hinreichend kleine Teilbereiche zerlegt, auf die man die Bonnetsche Formel anwenden kann. Dadurch, daß sich dann bei der Summierung über die Teilbereiche gewisse Terme fortheben, tritt bekanntlich im Endergebnis die Eulersche Charakteristik des Bereichs auf. Ich will etwas näher darauf eingehen, wie man einen kompakten geodätischen Bereich zu zerlegen hat; es genügt natürlich nicht, irgend eine rein topologische Triangulation anzugeben, weil dann das Integral der geodätischen Krümmung über die zerlegenden Bögen (das sich freilich nacher weg hebt) nicht zu existieren braucht.

Zunächst ordne ich jedem Punkt x eines geodätischen Bereichs G einen kompakten geodätischen Bereich $n(x)$ zu, der ganz in einem differentialgeometrischen Grundgebiet enthalten ist. Zu diesem Zweck wähle ich irgendein solches Grundgebiet $d(x)$ aus, das x enthält, hierauf in $d(x)$ eine G-Kreisscheibe A vom Mittelpunkt x. A ist entweder selber ein hohler Sektor vom Scheitel x, oder läßt sich in endlich viele hohle Sektoren des Scheitels x zerlegen; dabei nenne ich einen Bereich B in Teilbereiche B_i zerlegt, wenn B die Vereinigungsmenge der B_i ist und die B_i paarweise keinen innern Punkt gemein haben. — Ist S einer dieser Sektoren, und sind Y, Z die beiden Schenkel von S, so wähle ich einen Punkt $y \subset Y$, $y \neq x$ und einen Punkt $z \subset Z$, $z \neq x$; dann liegt $\overline{yz}$ in S und berandet mit den Strecken $\overline{xy}$, $\overline{xz}$ einen in S enthaltenen Normalbereich, der einfachzusammenhängend ist und als Rand ein Strecken-Dreieck hat, das x als Ecke enthält. In jedem der hohlen Sektoren, in die A zerlegt ist, denke ich mir diese Konstruktion ausgeführt. Die Vereini-

---

erfüllt ist): zu jedem Punkt $a \subset G$ gibt es ein $r(a) > 0$ folgender Art: 1) Wenn $\varrho_G(ab) \leqq r$, existiert $\widehat{ab}$. 2) Wenn $\varrho_G(ab) > r$, existiert zwischen a und b ein Punkt x mit $\varrho_G(ax) = r$. Für alle solche Räume G gilt die erste Folgerung in § 11. Sie sind wegsam, falls sie keine divergente Fundamentalfolge enthalten.

(Zusatz bei der Korrektur, 25. Februar 1935.)

gungsmenge der so entstehenden Dreiecke, die alle den Punkt x enthalten, und die keinen innern Punkt gemein haben, nenne ich $n(x)$. Also $n(x) \subset d(x)$.

Läßt man von jedem der $n(x)$ erfüllenden Dreiecken die x gegenüberliegende Seite fort, so ist der entstehende Bereich $n'(x)$ eine Umgebung von x in G, und das Umgebungssystem $n'(x)$ für alle Punkte $x \subset G$ ist dem der offnen G-Kreisscheiben gleichwertig, denn $n'(x)$ liegt innerhalb eines offnen G-Kreises um x und enthält einen ebensolchen im Innern.

Ist nun G kompakt, so kann ich G nach dem Borelschen Satz durch endlichviele solcher Bereiche $n(x)$, also auch durch endlichviele der erwähnten Dreiecke bedecken [33]). Ich nummeriere diese Dreiecke d_i, und lasse zunächst, wenn nötig, alle diejenigen d_i fort, die ganz in d_1 liegen; was übrig bleibt, bedeckt G immer noch. Nach erneuter Nummerierung, wobei aber d_1 seine Bezeichnung behalten möge, lasse ich diejenigen d_i (gegebenenfalls auch d_1) fort, die in d_2 enthalten sind. Nach endlichvielen derartigen Schritten erhalte ich eine Bedeckung von G durch endlichviele Dreiecksbereiche, von denen keiner ganz im Innern eines andern liegt; aus diesem Grund, und weil außerdem die d_i im Sinn von § 7 verkettet sind, ist der von den Rändern der d_i gebildete Streckenkomplex s zusammenhängend. Durch s wird G in Teilbereiche t_k zerlegt, von denen jeder im Innern eines d_i, also auch eines differentialgeometrischen Grundgebiets liegt. Als Teilbereich eines schlichtartigen Bereichs d_i ist t_k schlichtartig. Da der Rand jedes t_k zusammenhängend ist, ist das Innere jedes t_k einfachzusammenhängend. t_k kann aber Knotenpunkte enthalten. In solchen Punkten kann ich durch endlichvielfache Anwendung der oben beschriebenen Dreieckskonstruktion t_k weiter zerlegen in endlichviele Dreiecksbereiche und einen einfachzusammenhängenden Normalbereich. Dadurch ist schließlich der kompakte geodätische Bereich G in endlichviele einfachzusammenhängende Normalbereiche N_m zerlegt, deren jeder innerhalb eines differentialgeometrischen Grundgebiets liegt [34]).

---

[33]) Man beachte, daß G von den Dreiecken genau bedeckt wird, und es sich nicht etwa um eine „Über"deckung in dem Sinn handelt, daß man auf einer G enthaltenden Fläche ein beliebiges Bereichssystem aussucht, dessen Vereinigungsmenge G enthält; bei unserm Verfahren liegt jedes der Teildreiecke, also auch jeder der Bereiche $n(x)$ ganz in G.

[34]) Jeder einfachzusammenhängende Normalbereich ist der abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorph, infolgedessen läßt er sich jedenfalls triangulieren, wenn man über die zerlegenden Bögen keine Differentiierbarkeitsvoraussetzung macht. Hieraus ergibt sich leicht eine Triangulation von G in endlichviele Dreiecke; ist

e, k, f seien die Anzahlen der Ecken, Strecken und Bereiche N_m, die bei der eben geschilderten Zerlegung von G auftreten. Dann ist bekanntlich die Zahl $e-k+f$ gleich der Eulerschen Charakteristik $\chi(G)$ von G.

Ist R der Rand von G, so wollen wir mit $X(R)$ die Zahl $e'-k'$ bezeichnen, wo e', k' die Anzahlen der Ecken und Strecken sind, die bei der erwähnten Zerlegung von G auf R fallen. Dann ist $X(R)$ wiederum durch die topologische Struktur von R gegeben, und zwar ist stets $X(R) \leqq 0$. $X(R) = 0$ gilt dann und nur dann, wenn G frei von Knotenpunkten, also ein Normalbereich ist.

Sei e_i $(1 \leqq i \leqq e)$ irgendeine Ecke der Zerlegung von G. Dann bezeichnen wir mit w_i den Gesamtwinkelraum, den ein G-Kreis E_i um e_i als Mittelpunkt enthält. Ist also e_i innerer Punkt von G, so ist $w_i = 2\pi$. Ist e_i regulärer Randpunkt, so ist $w_i = \pi$. Ist e_i eine hohle Ecke des Randes von G, so bestimmen wir w_i, $0 < w_i < \pi$ gemäß § 4 durch den hohlen Sektor, dessen Scheitel e_i ist, dessen Begrenzung auf R fällt, und der in G liegt. Ist e_i einspringende Ecke oder Knotenpunkt, so zerlegen wir E_i in hohle Sektoren und definieren w_i als Summe der Winkel dieser Sektoren, die gemäß § 4 zu behandeln sind; demnach ist $w_i > \pi$, falls e_i einspringende Ecke ist.

Die entsprechende Bezeichnung führen wir für jeden der Normalbereiche N_m ein, in die G zerlegt ist $(1 \leqq m \leqq f)$, die Ecken mögen e_k^m heißen; sie liegen alle auf dem Rand von N_m. Die zugehörigen Winkel seien w_k^m. Da nun N_m innerhalb eines differentialgeometrischen Grundgebiets liegt, können wir die Totalkrümmung $C(N_m)$ von N_m nach der Gauß-Bonnetschen Formel berechnen, die bekanntlich lautet:

$$C(N_m) = 2\pi - \sum_k (\pi - w_k^m) = 2\pi - S_m \tag{15}$$

wobei die Summe S_m über alle Ecken von N_m zu erstrecken ist. Für die Totalkrümmung $C(G)$ von G haben wir nun zunächst:

$$C(G) = \sum_{m=1}^{f} C(N_m) = 2f\pi - \sum_{m=1}^{f} S_m = 2f\pi - S. \tag{16}$$

Die Doppelsumme S berechnen wir so, daß wir die an jeder Ecke e_i auftretenden Beiträge zusammenfassen. Sei x_i die Anzahl

---

G frei von Knotenpunkten, also Normalbereich, so ist hiermit G als „berandete Fläche" im Sinn der Kerekjartoschen Bezeichnung erwiesen. Vgl. l.c. [31]), 4. Abschnitt, § 1, und 2. Abschnitt, § 2, sowie den einleitenden Teil der vorliegenden Arbeit.

der Bereiche N_m, die in e_i zusammenstoßen. Dann ist

$$(17) \qquad S = \pi \sum_{i=1}^{e} x_i - \sum_{i=1}^{e} w_i.$$

Sei nun y_i die Anzahl der in e_i zusammenstoßenden Strecken der Zerlegung, und sei $z_i = x_i - y_i$. Dann ist $\sum_{i=1}^{e} y_i = 2k$, weil jede Strecke in der Summe genau zweimal, nämlich an jedem ihrer Endpunkte, gezählt wird. Setzen wir ferner $v_i = 2\pi - w_i$, so haben wir nach (17):

$$S = 2k\pi + \pi \sum_{i=1}^{e} z_i - 2\pi e + \sum_{i=1}^{e} v_i,$$

also wegen (16):

$$(18) \qquad C(G) = 2\chi(G)\pi - \sum_{i=1}^{e} (z_i\pi + v_i) = 2\chi(G)\pi - S'.$$

Die Summanden von S' sind von Null verschieden höchstens dann, wenn die betreffende Ecke e_i auf dem Rand R von G liegt. Denn liegt e_i im Innern von G, so ist offenbar $x_i = y_i$, und $w_i = 2\pi$ also $z_i = v_i = 0$.

Damit haben wir für den Fall, daß kein Rand auftritt, daß also G eine geschlossene Fläche F_0 ist, die bekannte Formel wiedergefunden:

$$C(F_0) = 2\chi(F_0)\pi.$$

Nehmen wir nun an, es gebe einen Rand, die Zahlen e', k' seien also positiv. Wir dürfen annehmen, die Ecken e_i der Zerlegung von G seien so nummeriert, daß $1 \leqq i \leqq e'$ die auf R liegenden Ecken bezeichnet. Dann genügt es also, die Summation in S' von 1 bis e' zu erstrecken. Unter den y_i Kanten, die von e_i auslaufen, seien nun r_i auf R gelegen ($r_i > 2$ nur in Knotenpunkten), während u_i dieser Kanten nur e_i mit R gemein haben mögen. Dann gehört jede der Kanten u_i zum Rand zweier der in e_i angrenzenden Bereiche N_m, während jede der Kanten r_i nur zum Rand eines dieser Bereiche gehört; jeder der Bereiche schickt einen Sektor nach e_i, enthält also zwei der Kanten y_i, so daß wir haben:

$$\begin{aligned} 2x_i &= 2u_i + r_i = 2y_i - r_i, \\ 2z_i &= -r_i. \end{aligned}$$

Nun ist $\sum_{i=1}^{e'} r_i = 2k'$. Somit ist, wenn wir $v_i - \pi + \pi$ für v_i schreiben:

$$(19) \qquad S' = -k'\pi + e'\pi + \sum_{i=1}^{e'} (v_i - \pi).$$

Nun ist definitionsgemäß $e' - k' = X(R)$ und $v_i - \pi = \pi - w_i$. Also haben wir die Endformel aus (18) und (19):

$$C(G) = 2\chi(G)\pi - X(R)\pi - \sum_{i=1}^{e'} (\pi - w_i). \tag{20}$$

Für Normalbereiche ist hier, wie schon erwähnt, $X(R) = 0$ zu setzen.

III. Fluchtgebiete und Fluchtbereiche.

§ 14. *Definitionen.*

K sei eine euklidische abgeschlossene Kreisscheibe, m der Mittelpunkt, P die Peripherie, K' das Innere von K. Die „punktierte Kreisscheibe", d.h. die Punktmenge $K - m$, nennen wir $\overline{K}$, das punktierte Kreisinnere $K' - m$ nennen wir $\overline{K}'$. Eine in K gegen m konvergente, jedoch m nicht enthaltende Punktfolge, nennen wir eine *Fluchtfolge*. Eine geschlossene Kurve in $\overline{K}$, die in $\overline{K}$ nicht auf einen Punkt zusammenziehbar ist, heiße eine *Schlinge*, eine Schlinge, die zugleich eine Jordankurve ist, heiße ein *Gürtel*. Ein Gürtel ist also eine Jordankurve in K, die m im Innern enthält.

Eine Fläche U' gestatte eine topologische Abbildung H' auf $\overline{K}'$. Fluchtfolge, Schlinge, Gürtel wollen wir die Punktmengen in U' nennen, die durch H' in Fluchtfolgen, Schlingen, Gürtel von K übergehen. Wir nennen nun U' ein *Fluchtgebiet*, wenn eine Punktfolge in U' dann und nur dann unbeschränkt ist, falls sie eine Fluchtfolge ist. Jeder Gürtel eines Fluchtgebiets U' begrenzt hiernach ein in U' enthaltenes Fluchtgebiet.

Fluchtbereich nennen wir jeden geodätischen Bereich U, der eine topologische Abbildung H auf $\overline{K}$ gestattet und der vollständig ist. Schlinge, Gürtel, Fluchtfolge nennen wir wiederum die Figuren in U, die bei H in die gleichnamigen Figuren von K übergehen. Die Punktmenge $R_0 \subset U$, die bei H in P übergeht, muß hiernach ein geodätisches Polygon und ein Gürtel sein. Bisweilen schreiben wir $U(R_0)$ statt U, wenn wir die Beziehung eines Fluchtbereichs zu seinem Rand hervorheben wollen. Das Innere eines Fluchtbereichs ist ein Fluchtgebiet.

Die auf einen Fluchtbereich U bezogene Abstandsfunktion bezeichnen wir mit ϱ_U. Ist R eine Schlinge in U, so setzen wir im folgenden $\varrho_U(RR_0) = a(R)$. Dann gibt es nach § 7 je einen Punkt $p \subset R$ und $p_0 \subset R_0$, sodaß $\varrho_U(pp_0) = a(R)$. Jedes solche Punktepaar bezeichnen wir mit $p(R)$, $p_0(R, p)$. Die G-Strecke

$\widehat{pp_0}$ (ihre Existenz folgt aus der Vollständigkeit von U) nennen wir $F(R)$. Ist $a(R) = 0$, so ist $p = p_0$, und wir fassen dann $F(r)$ als diesen Punkt und als G-Strecke der Länge Null auf. Ist $a(R) > 0$, so ist $F(R)$ ein doppelpunktfreier geodätischer Bogen, der mit R nur p und mit R_0 nur p_0 gemein hat. Denn einen Knick könnte $F(R)$ nur in einem von p_0 verschiedenen Punkt von R_0 haben; enthielte aber $F(R)$ einen solchen Punkt, so würde dieser mit p einen Teilbogen von $F(R)$ begrenzen, der eine kürzere Verbindung als $F(R)$ zwischen R und R_0 herstellen würde, gegen die Definitionen. Aus demselben Grund enthält $F(R)$ außer p keinen Punkt von R.

Ist R rektifizierbar, so bezeichnen wir mit $s(R)$ die Länge von R. Ist R ein Gürtel und überdies ein geodätisches Polygon, so nennen wir $U(R)$, wie schon verabredet, den von R berandeten in $U(R_0)$ enthalten Fluchtbereich. Wir nennen dann R *einspringend*, wenn $U(R)$ nur einspringende Ecken und wenigstens eine wesentliche Ecke hat. Hat dagegen $U(R)$ genau eine, und zwar hohle, wesentliche Ecke, so nennen wir R ein *hohles Eineck* und bezeichnen den an dieser Ecke auftretenden Winkel von $U(R)$, der wie in § 13 gemessen wird, als den Eineckswinkel mit $w(R)$. Ist R eine geschlossene geodätische Linie, so nennen wir R *glatt*.

Mit $x(t)$ bezeichnen wir die untere Grenze der Längen aller rektifizierbaren Schlingen $R \subset U$, unter der Nebenbedingung $a(R) \leqq t$[35]. $x(t)$ ist also eine im Intervall $0 \leqq t < \infty$ definierte Funktion, die offenbar nicht zunimmt.

Wir zeigen, daß $x(t)$ im Definitionsintervall stetig, sogar von beschränktem Differenzenquotienten ist. Seien nämlich $t \geqq 0$, $d > 0$, $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann können wir wegen der Definition von $x(t)$ eine rektifizierbare Schlinge R finden, so daß $a(R) \leqq t + d$, $s(R) \leqq x(t+d) + d\varepsilon$. Wir bestimmen (was unter Umständen auf mehrere Weisen geschehen kann) $p(R)$, $p_0(R, p)$, $F(R)$, wie oben verabredet. Die Länge von $F(R)$ ist $a(R) \leqq t + d$. Wir können also auf $F(R)$ von $p = p(R)$ aus eine Teil-G-Strecke $D = \widehat{pp'}$ (die auch auf einen Punkt zusammenschrumpfen darf) so

[35]) Eine entsprechende Funktion ließe sich leicht auch für Flucht*gebiete* erklären; man hat dann statt $a(R)$ eine Funktion $z(R)$ zugrundezulegen, Verallgemeinerung der in der 6. Folgerung in § 11 eingeführten Funktion $z(p)$ auf Punktmengen; dann kann man wieder die untere Grenze $x'(t)$ der Längen aller rektifizierbaren Gürtel R des Fluchtgebiets, mit der Nebenbedingung $z(R) \leqq t$, einführen. Der Verlauf der Funktion $x'(t)$ gibt eine quantitative Kennzeichnung des Fluchtgebiets, die die qualitative Einteilung in Kelche und Schäfte, wie sie in der Einleitung und in § 18 gegeben wird, in sich enthält.

abtragen, daß die Länge $s(\widehat{pp'})$ von D höchstens d, und $\varrho_U(p'R_0)$ höchstens t beträgt. Nunmehr betrachten wir die geschlossene Kurve R', die aus R und dem doppeltdurchlaufenen Bogen D besteht. Da R' sich (indem man D auf p zusammenzieht) in R deformieren läßt, und R in U nichtzusammenziehbar ist, so ist auch R' nichtzusammenziehbar, also eine Schlinge. Wegen $p' \subset R'$, $\varrho_U(p'R_0) \leqq t$, ist $a(R') \leqq t$. R' ist rektifizierbar, und zwar ist $s(R') = s(R) + 2s(\widehat{pp'}) \leqq x(t+d) + d(2+\varepsilon)$. Andererseits ist definitionsgemäß wegen $a(R') \leqq t$: $s(R') \geqq x(t)$. Somit $x(t) \leqq x(t+d) + d(2+\varepsilon)$. Da andererseits die Funktion $x(t)$ nicht zunimmt, können wir die letzte Ungleichung vervollständigen zu

$$x(t+d) \leqq x(t) \leqq x(t+d) + d(2+\varepsilon).$$

Ziehen wir überall $x(t)$ ab und dividieren durch d, so ergibt sich nach leichter Umstellung:

$$0 \geqq \frac{x(t+d) - x(t)}{d} \geqq -2 - \varepsilon.$$

Da hierin ε beliebig klein sein darf, und $x(t)$ nicht von ε abhängt, haben wir schließlich für den Differenzenquotienten von $x(t)$ im ganzen Definitionsbereich:

$$0 \geqq \frac{\Delta x}{\Delta t} \geqq -2.$$

§ **15.** *Lösung eines Minimumproblems.* Das Problem lautet: *Ein Fluchtbereich U und eine Zahl $t \geqq 0$ gegeben. Eine rektifizierbare Schlinge $R = R(t)$ zu finden, mit $a(R) \leqq t$ und $s(R) = x(t)$.*

Wegen der Bedeutung von $x(t)$ können wir das Problem auch so formulieren:

Unter allen rektifizierbaren Schlingen R mit $a(R) \leqq t$ eine kürzeste zu finden.

Wir führen die Aufgabe auf die Bestimmung gewisser G-Strecken zurück, indem wir zur universellen Überlagerungsfläche übergehen; dabei werden bekanntlich geschlossne nicht zusammenziehbare Kurven auf Bögen abgebildet, die verschiedene Endpunkte haben.

Sei also $\underline{U}$ der universelle Überlagerungsbereich von U. Da U dem abgeschlossenen von einem Breitenkreis berandeten Teil eines Rotationszylinders homöomorph ist, so ist $\underline{U}$ einer euklidischen Halbebene homöomorph, die von einer (zur Halbebene gerechneten) Geraden G berandet wird. Dabei entspricht der

Geraden G der Rand $\underline{R}_0'$ von $\underline{U}$. $\underline{R}_0'$ ist ein offner Bogen, der R_0 unendlichoft überlagert. Als Überlagerungsbereich eines vollständigen Bereichs ist $\underline{U}$ nach § 12 ein vollständiger Bereich.

Wir wollen hier einige Definitionen und einen Hilfssatz einschalten, die für beliebige Überlagerungsbereiche $\underline{U}$ beliebiger geodätischer Bereiche U gelten. Zwei Punkte $\underline{p}$, $\underline{p}'$ von $\underline{U}$ nennen wir *äquivalent*, wenn sie denselben Spurpunkt haben, aber nicht zusammenfallen. Dann gilt folgender naheliegender

Hilfssatz: Sind $\underline{p}_i$, $\underline{p}_i'$ zwei Punktfolgen derart, daß $\underline{p}_i$ äquivalent $\underline{p}_i'$ für alle i, und gilt $\underline{p}_i \to \underline{p}$, $\underline{p}_i' \to \underline{p}'$, so ist $\underline{p}$ äquivalent $\underline{p}'$.

Beweis: p_i, p seien die Spurpunkte von $\underline{p}_i$, $\underline{p}$. A sei eine G-Kreisscheibe vom Mittelpunkt p in U. Dann gibt es nach der Definition des Überlagerungsbereichs (§ 12) eine G-Kreisscheibe $\underline{A}$ um $\underline{p}$ in $\underline{U}$, deren Spurpunkte A erfüllen, so daß die Beziehung zwischen Punkt und Spurpunkt eine isometrische Abbildung $\underline{A} \to A$ bewirkt. Aus $\underline{p}_i \to \underline{p}$ folgt, daß fast alle $\underline{p}_i$ in $\underline{A}$, also fast alle p_i in A liegen, und daß $p_i \to p$.

Nun sind nach Voraussetzung die p_i auch die Spurpunkte der $\underline{p}_i'$. Bezeichnen wir also vorläufig den Spurpunkt von $\underline{p}'$ mit p', so folgt wie eben, weil $\underline{p}_i' \to \underline{p}'$: $p_i \to p'$, also $p' = p$; d.h. $\underline{p}$, $\underline{p}'$ haben denselben Spurpunkt. Um die Äquivalenz von $\underline{p}$ mit $\underline{p}'$ zu zeigen, haben wir nur noch nachzuweisen, daß jene Punkte nicht zusammenfallen. Fielen die beiden Punkte zusammen, so gäbe es wegen $\underline{p}_i' \to \underline{p}'$ und $\underline{p}_i \to \underline{p}$ ein i, so daß $\underline{p}_i' \subset \underline{A}$ und $\underline{p}_i \subset \underline{A}$. Da die Beziehung zwischen Punkt und Spurpunkt eine isometrische, also insbesondere ein-eindeutige Beziehung zwischen $\underline{A}$ und A vermittelt, und da $\underline{p}_i$, $\underline{p}_i'$ denselben Spurpunkt p_i haben, müßten $\underline{p}_i$, $\underline{p}_i'$ zusammenfallen, während diese Punkte doch als äquivalent, also verschieden, vorausgesetzt sind.

Die Menge $m \subset U$ der Spurpunkte einer Punktmenge $\underline{m} \subset \underline{U}$ wollen wir kurz die *Spur* von $\underline{m}$ nennen. Ein Bogen $\underline{S} \subset \underline{U}$, dessen Endpunkte äquivalent sind, heiße ein *Hauptweg*. Dann ist die Spur von $\underline{S}$ eine geschlossene nicht zusammenziehbare Kurve in U. Umgekehrt ist jede derartige Kurve auch Spur eines Hauptwegs.

Nunmehr werde U wieder als der gegebene Fluchtbereich und $\underline{U}$ als der universelle Überlagerungsbereich von U angenommen. Um die Vieldeutigkeit in der Beziehung zwischen Schlingen von U und überlagernden Hauptwegen in $\underline{U}$ einzuschränken, verfahren wir folgendermaßen.

Zunächst sei $\underline{R}_0$ ein in $\underline{R}_0'$ enthaltener Strahl, der R_0 genau einmal überlagert. Ist jetzt R irgendeine Schlinge in U, so bestimmen wir $p(R)$, $p_0(R, p)$, $F(R)$. Auf $\underline{R}_0$ gibt es genau einen Punkt $\underline{p}_0$, dessen Spur p_0 ist. Dann gibt es genau einen $\underline{p}_0$ enthaltenden Bogen $\underline{F} \subset \underline{U}$, dessen Spur $F(R)$ ist. Auf $\underline{F}$ gibt es genau einen Punkt $\underline{p}$, dessen Spur $p(R)$ ist, und es gibt einen (aber nicht nur einen) Hauptweg $\underline{R}$, der $\underline{p}$ enthält, und der alle Punkte von R außer p genau einmal überlagert, während p außer von $\underline{p}$ noch von dem andern, $\underline{p}$ äquivalenten Endpunkt $\underline{p}'$ von $\underline{R}$ überlagert wird. Ist R rektifizierbar, so auch $\underline{R}$, und dann hat $\underline{R}$ gleiche Länge wie R.

Somit ist jeder rektifizierbaren Schlinge R in U ein ebenso langer Hauptweg in $\underline{U}$ zugeordnet, dessen einer Endpunkt durch einen Weg der Länge $a(R)$ mit $\underline{R}_0$ verbindbar ist. Ist umgekehrt $\underline{R}$ ein Hauptweg dieser Art, so ist die Spur von $\underline{R}$ eine Schlinge, die durch einen Weg der Länge $a(R)$ mit R_0 verbindbar ist. Unsere Minimumaufgabe ist daher folgender auf $\underline{U}$ bezüglichen Aufgabe äquivalent: *Unter allen rektifizierbaren Hauptwegen, deren einer Endpunkt höchstens den Abstand t von $\underline{R}_0$ hat, einen kürzesten, $\underline{R}(t)$, zu finden.*

Die Hauptwege der angegebenen Konkurrenz wollen wir $(\underline{R})$ nennen. Die Länge von $\underline{R}(t)$, also die untere Grenze der Längen der Hauptwege $(\underline{R})$, muß $x(t)$ sein, denn wir haben gezeigt, daß die Menge (R) der Spuren der Hauptwege $(\underline{R})$ identisch ist mit der Menge aller Schlingen mit $a(R) \leqq t$.

Wir betrachten nun eine Teilfolge $(\underline{R}_i)$ aus $(\underline{R})$ derart, daß die Längen aller $\underline{R}_i$ höchstens $s_0 = s(R_0)$ betragen, und daß die Längen der $(\underline{R}_i)$ gegen $x(t)$ konvergieren. Die Menge $(\underline{R}_i)$ ist nicht leer, denn die abgeschlossene Hülle von $\underline{R}_0$ ist ein Hauptweg, dessen beide Endpunkte den Abstand $0 \leqq t$ von $\underline{R}_0$ haben, und der die Länge s_0 hat, da seine Spur R_0 ist, und R_0, mit Ausnahme eines Punkts, nur einfach von jenem Hauptweg überlagert wird. Sind $\underline{p}_i$, $\underline{p}'_i$ die Endpunkte von $\underline{R}_i$, so sind diese Punkte für alle i paarweise äquivalent. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß $\underline{p}_i$ den Abstand $\leqq t$ von R_0 hat. Da U vollständig, und die Menge $(\underline{p}_i, \underline{p}'_i)$ beschränkt ist, ist diese Menge kompakt, also gibt es eine Teilfolge $(k) \subset (i)$ und zwei Punkte $\underline{p}$, $\underline{p}'$ in $\underline{U}$ derart, daß $\underline{p}_k \to \underline{p}$, $\underline{p}'_k \to \underline{p}'$. Nach dem Hilfssatz sind $\underline{p}$, $\underline{p}'$ äquivalent. Wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion ist $\varrho_{\underline{U}}(\underline{p}\,\underline{R}_0) \leqq t$. Da die Längen der $\underline{R}_k$ einerseits gegen $x(t)$ konvergieren, andererseits $\geqq \varrho_{\underline{U}}(\underline{p}_k\underline{p}'_k)$ sind, gilt $x(t) \geqq \varrho_{\underline{U}}(\underline{p}\,\underline{p}')$. Da $\underline{U}$ vollständig, also wegsam ist, gibt es eine G-Strecke $\widehat{\underline{p}\,\underline{p}'} = \underline{R}(t)$ der Länge $\varrho_{\underline{U}}(\underline{p}\,\underline{p}') \leqq x(t)$. Wie wir eben gezeigt haben, ist aber $\underline{R}(t)$ ein

Hauptweg der Menge $(\underline{R})$, also der Länge $\geqq x(t)$. Demnach hat $\underline{R}(t)$ genau die Länge $x(t)$, löst also unser Minimumproblem in $\underline{U}$. Die Spur $R(t)$ von $\underline{R}(t)$ ist eine Schlinge der Länge $x(t)$ und des Abstands $\leqq t$ von R_0. $R(t)$ ist also eine Lösung des zu Anfang dieses § 15 formulierten Minimumproblems.

§ **16.** *Gestalt von* $R(t)$.

Satz 1: $R(t)$ *ist ein geodätisch-polygonaler Gürtel.*

Beweis: Als Spur der G-Strecke $\underline{R}(t)$ ist $R(t)$ jedenfalls ein geodätischer Streckenzug. $\underline{R}(t)$ hat als G-Strecke keinen Doppelpunkt. Hätte also $R(t)$ einen mehrfachen Punkt, so könnte das nur daher rühren, daß $\underline{R}(t)$ ein Paar äquivalenter Punkte außer den Endpunkten p, p' enthält.

Sei in diesem Fall $(\underline{q}_i, \underline{q}'_i)$ eine Folge äquivalenter Punktepaare auf $\underline{R}(t)$ derart, daß ihre Abstände, d.h. die Längen s_i der von jedem solchen Paar ausgeschnittenen Teil-G-Strecken von $\underline{R}(t)$, gegen ihre untere Grenze $s < x(t)$ streben; die Paare brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein. Da $\underline{R}(t)$ kompakt und abgeschlossen ist, gibt es eine Teilfolge $(k) \subset (i)$ und zwei Punkte $\underline{q}$, $\underline{q}'$ auf $\underline{R}(t)$ derart, daß $\underline{q}_i \to \underline{q}$, $\underline{q}'_i \to \underline{q}'$. Dann ist $s(\widehat{\underline{q}\underline{q}'}) = s$; zwischen $\underline{q}$ und $\underline{q}'$ liegt also auf $\underline{R}(t)$ kein Paar äquivalenter Punkte. Nach dem Hilfssatz aus § 15 sind aber $\underline{q}$, $\underline{q}'$ äquivalent.

Der von $\underline{q}$, $\underline{q}'$ aus $\underline{R}(t)$ ausgeschnittene Teilbogen sei $\underline{D}$. Die Teil-G-Strecken $\widehat{\underline{p}\underline{q}}$ bzw. $\widehat{\underline{q}'\underline{p}'}$ von $R(t)$ mögen $\underline{B}$, $\underline{B}'$ heißen. Dann ist $\underline{D}$ ein Hauptweg und die Spur D von $\underline{D}$ eine in $R(t)$ enthaltene Schlinge, die den Spurpunkt q von $\underline{q}$, $\underline{q}'$ enthält. Die Spur der Endpunkte $\underline{p}$, $\underline{p}'$ von $\underline{R}(t)$ ist ein Punkt p von $R(t)$, für den nach unsrer Konstruktion gilt: $\varrho_U(pR_0) \leqq t$. q zerlegt $R(t)$ in die Schlinge D und zwei Teilbögen B, B', die beide p mit q verbinden und die Spuren von $\underline{B}$, $\underline{B}'$ sind.

Wäre $a(D) \leqq t$, so wäre D eine Schlinge der Länge $< x(t)$ unter der Nebenbedingung $a(D) \leqq t$, gegen die Minimaldefinition von $x(t)$. Also ist $a(D) > t$, insbesondere ist $a(D) > 0$, insbesondere ist also q ein innerer Punkt von U. Eine G-Kreisscheibe Q um den Mittelpunkt q ist demnach eine volle Kreisscheibe. Wir können wegen $q \neq p$ die Kreisscheibe Q so klein wählen, daß $p \not\subset Q$. Die G-Kreisscheiben $\underline{Q}$, $\underline{Q}'$ in $\underline{U}$, die Q isometrisch überlagern und $\underline{q}$, bzw. $\underline{q}'$ als Mittelpunkte haben, sind ebenfalls Vollkreisscheiben. Der Durchschnitt $\underline{X}$ bzw. $\underline{Y}$ von $\underline{B}$ bzw. $\underline{D}$ mit $\underline{Q}$ ist je ein Radius von $\underline{Q}$. Entsprechend seien $\underline{X}'$ bzw. $\underline{Y}'$ die Radien, die $\underline{Q}'$ mit $\underline{B}'$ bzw. $\underline{D}$ gemein hat. Sind X, X', Y, Y' die Spuren von $\underline{X}$, $\underline{X}'$, $\underline{Y}$, $\underline{Y}'$, so ist X bzw. X' der Durchschnitt von Q

mit B bzw. mit B', und Y, Y' bilden den Durchschnitt von Q mit D. X, X', Y, Y' sind sämtlich Radien von Q. Ich behaupte, Y, Y' fallen nicht zusammen. Andernfalls hätte nämlich D Doppelpunkte (in Q), also gäbe es auf $\underline{D}$ ein von $\underline{q}$, $\underline{q}'$ verschiedenes Paar äquivalenter Punkte, im Widerspruch zu unserer Konstruktion. Offenbar fällt $\underline{X}$ in die Verlängerung von $\underline{Y}$, weil der Streckenzug $\underline{X} + \underline{Y}$ Teil der G-Strecke $\underline{R}(t)$, und weil $\underline{q}$ innerer Punkt von $\underline{U}$ ist. Also fällt X in die Verlängerung von Y, also nicht in die Verlängerung von Y'.

Nun kann die aus B und B' zusammengesetzte in $R(t)$ enthaltene geschlossene Kurve K keine Schlinge sein, sonst wäre diese Schlinge kürzer als $R(t)$ und hätte (weil sie p enthält) von R_0 einen Abstand $\leqq t$, gegen die Minimaleigenschaft von $R(t)$. Also ist K zusammenziehbar. Also erhalte ich eine Schlinge S, die sich mit $R(t)$ deckt, wenn ich von einer bestimmten Durchlaufung von $R(t)$ ausgehe, den Umlaufssin von D unverändert lasse, aber K in entgegengesetzter Richtung durchlaufe, als es bei jener Durchlaufung von $R(t)$ geschah. Dann ist S nämlich auf D zusammenziehbar, weil K auf q zusammenziehbar ist. Da D eine Schlinge ist, so auch S. In S stößt aber Y' mit X aneinander, weil in $R(t)$ Y' mit X' aneinanderstößt und nach unsrer Verabredung B mit B', also X mit X' vertauscht wird, wenn ich von $R(t)$ zu S übergehe. Da nun, wie oben gezeigt, X nicht in die Verlängerung von Y' fällt, fallen beide Radien entweder zusammen oder begrenzen einen in Q enthaltenen hohlen Sektor. Sind in jedem Fall x, y' die von q verschiedenen Endpunkte von X, bzw. Y', so liegt die (vielleicht punktförmige) Strecke $Z = \overline{xy'}$ in Q und ist kürzer als der in Q auf Z zusammenziehbare Streckenzug $X + Y'$. Ich erhalte also aus S eine kürzere Schlinge S_0, wenn ich den Streckenzug $X + Y'$ durch Z ersetze. Da aber $p \not\subset Q$, und da sich S_0 nur in Q von S unterscheidet, wäre $p \subset S_0$, also: $a(S_0) \leqq t$, $s(S_0) < s(S) = x(t)$. Das widerspricht der Definition von $x(t)$. Die Annahme, daß $R(t)$ einen Doppelpunkt hat, führt also auf einen Widerspruch. $R(t)$ ist ein Gürtel.

Wir beweisen nun, unter Benutzung der in § 14 eingeführten Bezeichnungen:

Satz 2. *$R(t)$ ist entweder einspringend, oder glatt, oder ein hohles Eineck.*

Beweis: Sei $R(t)$ weder einspringend noch glatt. Dann gibt es eine Ecke p von $R(t)$, die gegen $U(R(t))$ hohl ist. Also gibt es einen in U, sogar in $U(R(t))$, enthaltenen hohlen Sektor S, dessen Scheitel p ist, und dessen Begrenzung auf $R(t)$ fällt.

Ersetze ich die Begrenzung von S durch die kürzere, in S enthaltene Verbindungsstrecke der von p verschiedenen Endpunkte der Schenkel von S, so geht $R(t)$ in eine kürzere Schlinge R' über. Wegen der Minimaleigenschaft von $R(t)$ muß daher $a(R') > t$ sein. Da sich R' nur in S von $R(t)$ unterscheidet, muß für jeden außerhalb S gelegenen Punkt $q \subset R$ (also $q \subset R'$) gelten: $\varrho_U(qR_0) > t$. Diese Ungleichung muß folglich für jeden Punkt $q \neq p$ von $R(t)$ gelten, denn zu jedem gegebenen solchen Punkt kann ich S so klein wählen, daß $q \not\subset S$.

Insbesondere ist daher jeder Punkt $q \neq p$ von $R(t)$ innerer Punkt von U. Also ist jeder Punkt $\underline{q}$ von $\underline{R}(t)$, der nicht mit den Endpunkten $\underline{p}$, $\underline{p}'$ dieser G-Strecke zusammenfällt, innerer Punkt von $\underline{U}$, also hat $\underline{R}(t)$ keinen Knickpunkt, also hat $R(t)$ außer p keine Ecke, ist daher in der Tat ein hohles Eineck.

Satz 3. Ist $R(t)$ *einspringend, so liegen alle wesentlichen Ecken von* $R(t)$ *auf* R_0.

Indirekter Beweis: p sei eine gegen $U(R(t))$ einspringende Ecke von $R(t)$, und p sei innerer Punkt von U. q sei irgendein von p verschiedener Punkt von $R(t)$. Dann gibt es eine q nicht enthaltende in U enthaltene Kreisscheibe A um p als Mittelpunkt. A wird durch $R(t)$ in zwei Sektoren zerlegt. Der eine, S, ist hohl, der andere, T, ist überstumpf und liegt in $U(R(t))$.

Wäre $\varrho_U(qR_0) \leqq t$, so folgte wie beim vorigen Beweis die Existenz einer Schlinge R', die kürzer als $R(t)$ wäre, sich nur in A von $R(t)$ unterschiede, für die also wegen $q \subset R'$ gälte: $a(R') \leqq t$. Das widerspricht der Minimaldefinition von $R(t)$. Jeder von p verschiedene Punkt von $R(t)$ hat somit von R_0 einen Abstand $> t$, insbesondere > 0; da auch p selbst innerer Punkt von U ist, liegt $R(t)$ ganz im Inneren von U, zerlegt also U in den Fluchtbereich $U(R(t))$ und einen von $R(t)$ und R berandeten Normalbereich N.

Ziehen wir nun $F(R(t)) = F$ gemäß § 14, so muß dieser geodätische Bogen der Länge $\leqq t$ notwendig $R(t)$ im Punkt p treffen, denn kein anderer Punkt von $R(t)$ besitzt eine Verbindung der Länge $\leqq t$ mit R_0. Wie schon in § 14 ausgeführt, hat F keinen Punkt außer p mit $R(t)$ gemein, liegt also entweder ganz in $U(R(t))$, oder ganz in N, folglich ganz in N, da F einen Punkt mit R_0 gemein hat, $U(R(t))$ dagegen nicht.

Der Durchschnitt von F mit A ist ein Radius X von A. X liegt innerhalb S, da T in $U(R(t))$ liegt. Da S hohl ist, muß von den beiden Sektoren, in die S durch X zerlegt wird, der eine, er möge V heißen, einen Winkel $< \frac{\pi}{2}$ besitzen (vgl. § 4). Ist Y der von X

verschiedene, auf $R(t)$ liegende Schenkel von V, und ist x ein von p verschiedener Punkt von X, also von F, so gibt es nach § 4 einen Punkt $y \subset Y$ derart, daß $\overline{xy}$ kürzer ist als $\overline{xp}$. Dann erhalte ich aber eine Verbindung zwischen R_0 und $R(t)$, die kürzer ist als F, wenn ich die in F enthaltene Strecke $\overline{xp}$ durch $\overline{xy}$ ersetze. Das widerspricht der Minimaleigenschaft von F.

Satz 4: *Ist $R(t)$ ein hohles Eineck, und ist w der gemäß* § 14 *bestimmte Einneckswinkel, so gibt es ein positives d derart, daß*

$$x(t+d) \leqq x(t) - d \cos \tfrac{1}{2} w. \tag{21}$$

Beweis: z sei die Ecke von $R(t)$. Dann gibt es einen hohlen Sektor V, des Scheitels z und des Winkels w, der in U, sogar in $U(R(t))$, liegt, und dessen Schenkel X, Y auf $R(t)$ liegen. Wir wenden auf V das Verkürzungsverfahren an, das am Schluß von § 4 angegeben ist. Seien also x, y zwei von z verschiedene Punkte, so daß $x \subset X$, $y \subset Y$. Den auf der Begrenzung von V, also auf $R(t)$ verlaufenden Streckenzug $\overline{xz} + \overline{zy}$ nenne ich S. Nach § 4 gibt es in V einen Punkt $z' \neq z$ derart, daß, $s(zz') = d > 0$ gesetzt, der in V verlaufende Streckenzug $S' = \overline{xz'} + \overline{z'y}$ um mindestens $d \cos \frac{1}{2} w$ kürzer ist als S.

Da nun $R(t)$ ein hohles Eineck ist, ist jeder von z verschiedene Punkt von $R(t)$ um mehr als t von R_0 entfernt (vgl. den Beweis von Satz 2); da andererseits $a(R(t)) \leqq t$, so muß $\varrho_U(zR_0) \leqq t$ (in Wirklichkeit genau $= t$) sein. Also ist $\varrho_U(z'R_0) \leqq t + d$.

Nun betrachten wir die rektifizierbare Schlinge R', die aus $R(t)$ entsteht, wenn ich S durch S' ersetze. Wegen $z' \subset R'$ ist $a(R') \leqq t + d$, also $s(R') \geqq x(t+d)$. Andererseits ist R' infolge der Ersetzung von S durch S' um mindestens $d \cos \frac{1}{2} w$ gegenüber $R(t)$ verkürzt, also $s(R') \leqq s(R(t)) - d \cos \frac{1}{2} w$. Wegen $s(R(t)) = x(t)$ folgt (21) aus den letzten beiden Ungleichungen.

§ 17. *Hauptsatz über Fluchtgebiete.*

Er lautet:

In jedem Fluchtgebiet gibt es zu jedem positiven ε einen Gürtel R_ε folgender Art: R_ε ist ein geodätisches Polygon. Entweder ist R_ε ein hohles Eineck, für dessen Winkel w gilt $0 < \pi - w \leqq \varepsilon$, oder R_ε ist glatt oder einspringend.

Beweis: Zunächst wollen wir zeigen, daß es in einem beliebigen Fluchtgebiet U' einen Gürtel R_0 gibt, der ein geodätisches Polygon ist; von den andern für R_ε geforderten Eigenschaften sehen wir vorläufig ab. Sei $\underline{U}'$ irgendeine Überlagerungsfläche von U', z.B. die zweiblättrige, die übrigens U' homöomorph ist. Dann gibt es zu einem beliebigen Punkt $p \subset U'$ genau zwei äquivalente Punkte $\underline{p}$, $\underline{p}'$ in $\underline{U}'$, deren Spurpunkt p ist. Nun ist $\underline{U}'$ eine Fläche, also ein geodätischer Bereich. Also gibt es nach § 7 einen geödatischen Streckenzug $\underline{R}$, der $\underline{p}$ in $\underline{U}'$ mit $\underline{p}'$ verbindet, also ein Hauptweg ist. Gegebenenfalls durch Fortlassung endlichvieler geschlossener Teilstreckenzüge kann ich $\underline{R}$ in einen doppelpunktfreien Streckenzug $\underline{R}'$ verwandeln. Gibt es auf $\underline{R}'$ außer den Endpunkten $\underline{p}$, $\underline{p}'$ noch ein Paar äquivalenter Punkte, so gibt es eine Folge von (nicht notwendig durchweg verschiedenen) Paaren äquivalenter Punkte $\underline{q}_i$, $\underline{q}_i'$, derart, daß die Längen s_i der von den Paaren begrenzten Teilbögen von $\underline{R}'$ gegen die untere Grenze s der Längen aller solchen Teilbögen, d.h. aller in $\underline{R}$ enthaltenen Hauptwege, konvergieren. Wegen der Kompaktheit und Abgeschlossenheit von $\underline{R}'$ gibt es eine Teilfolge $(k) \subset (i)$ und zwei Punkte $\underline{q}$, $\underline{q}'$ auf $\underline{R}'$ derart, daß $\underline{q}_k \to \underline{q}$, $\underline{q}_k' \to \underline{q}'$. Dann hat der von $\underline{q}$, $\underline{q}'$ begrenzte Teilbogen $\underline{R}_0$ von $\underline{R}'$ die Länge s, enthält also außer höchstens den Endpunkten kein Paar äquivalenter Punkte. Nach dem Hilfssatz aus § 15 sind aber die Endpunte $\underline{q}$, $\underline{q}'$ von $\underline{R}_0$ in der Tat äquivalent. Also ist die Spur R_0 von $\underline{R}_0$ ein Gürtel, und außerdem ein geodätisches Polygon, weil $\underline{R}_0$ ein geodätischer Streckenzug.

Sei nun $U = U(R_0)$ der von R_0 berandete in U' enthaltene Fluchtbereich. $x(t)$ sei bezüglich U gemäß § 14 definiert. Wir betrachten zu unserm gegebenen positiven ε die Funktion $y(t) = x(t) + \frac{\varepsilon}{4}t$. Mit $x(t)$ ist auch $y(t)$ stetig für $0 \leqq t < \infty$. Für $t > \frac{4x(0)}{\varepsilon} = t_1$ ist wegen $x(t) \geqq 0$: $y(t) > y(0)$. Die untere Grenze der Funktion $y(t)$ kann also nur im Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$ approximiert werden. Wegen der Beschränktheit und Abgeschlossenheit dieses Intervalls und der Stetigkeit von $y(t)$ wird diese untere Grenze für ein t_0, $0 \leqq t_0 \leqq t_1$ erreicht, so daß also für alle $0 \leqq t < \infty$: $y(t) \geqq y(t_0)$. Das gibt aber, wenn wir $t = t_0 + d$ $(d \geqq -t_0)$ setzen, nach leichter Umrechnung:

$$x(t_0+d) \geqq x(t_0) - \frac{d\varepsilon}{4}\ \text{[36]}). \tag{22}$$

[36]) Herr H. Hopf teilte mir folgende Verallgemeinerung des hier angewandten Prinzips mit: Sei M irgendein metrischer Raum, in dem das Kompaktheitspostulat gilt: Jede beschränkte Menge ist kompakt. Sei $f(p)$ irgendeine stetige Ortsfunktion der Punkte $p \subset M$, und sei $f(p)$ nach unten beschränkt (in unserm Fall ist M die Zahlenhalbgerade $0 \leqq t < \infty$ und $f(p) = x(t)$).

Behauptung: Es gibt in M zu jedem positiven ε einen Punkt p_0, so daß für alle

$R(t_0)$ hat die für R_ε geforderten Eigenschaften. Jedenfalls ist nämlich $R(t_0)$ nach § 16 einspringend, glatt oder ein hohles Eineck. Liegt nun der letzte Fall vor, und bezeichnet wieder w den Winkel von $R(t_0)$, so gibt es nach Satz 4, § 16, ein $d > 0$, so daß (21) für $t = t_0$ gilt. Aus dieser Formel und (22) folgt $\cos \frac{1}{2} w \leqq \frac{\varepsilon}{4}$. Nun ist $\cos \frac{1}{2} w = \sin \frac{1}{2}(\pi - w)$, und $0 < \frac{1}{2}(\pi - w) < \frac{1}{2}\pi$. Für jedes a im Intervall $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}\pi$ gilt aber, wie leicht zu verifizieren, $\sin a \geqq \frac{1}{2} a$. Also $\frac{\varepsilon}{4} \geqq \cos \frac{1}{2} w \geqq \frac{\pi - w}{4}$, d.h. $0 < \pi - w \leqq \varepsilon$.

§ 18. *Schaft, Kelch, eigentlicher Kelch.*

$g \geqq 0$ sei die untere Grenze der Längen aller rektifizierbaren Gürtel eines gegebenen Fluchtgebiets U'. Minimalfolge wollen wir vorübergehend jede Folge rektifizierbarer Gürtel in U' nennen, deren Längen gegen g streben. Eine Minimalfolge nennen wir beschränkt oder unbeschränkt, je nachdem es die Punktmenge ist, die von allen Gürteln der Folge bedeckt wird. Wir definieren:

Ein Fluchtgebiet heißt ein Schaft, wenn in ihm jede Minimalfolge unbeschränkt ist.

Ein Fluchtgebiet heißt ein Kelch, wenn es in ihm eine beschränkte Minimalfolge gibt.

Hiernach ist jedes Fluchtgebiet entweder ein Schaft oder ein Kelch. Man kann aber Beispiele von Kelchen angeben, die Schäfte enthalten. Daher erweist sich noch die folgende Definition als notwendig:

Ein Fluchtgebiet heißt ein eigentlicher Kelch, wenn es keinen Schaft enthält.

Jeder eigentliche Kelch ist also ein Kelch, und jedes in einem

---

von p_0 verschiedenen Punkte $p \subset M$ gilt

$$\frac{f(p) - f(p_0)}{\varrho(pp_0)} \geqq -\varepsilon,$$

wo $\varrho(pp_0)$ die Entfernung von p, p_0 im Sinn der Metrik von M ist.

Beweis: Man bilde für einen beliebigen Punkt $p_1 \subset M$ die Funktion $g(p) = f(p) + \varepsilon\varrho(pp_1)$. Dann ist mit $f(p)$ auch $g(p)$ stetig, und weil $f(p)$ nach unten beschränkt ist, gibt es ein positives a, so daß im Äußern der Kugel K: $\varrho(p_1 p) \leqq a$, also für $\varrho(pp_1) > a$, gilt: $g(p_1) < g(p)$. Somit wird die untere Grenze von $g(p)$ nur in K approximiert. Nach dem Kompaktheitspostulat ist K, weil beschränkt, kompakt. Da außerdem $g(p)$ stetig ist, gibt es einen Punkt $p_0 \subset M$, so daß für alle $p \subset M$: $g(p) \geqq g(p_0)$. Aus dieser Ungleichung erhält man wegen der Definition von $g(p)$ die behauptete, wenn man noch die Dreiecksungleichung in der Form $\varrho(pp_0) \geqq \varrho(pp_1) - \varrho(p_0 p_1)$ benutzt.

eigentlichen Kelch enthaltene Fluchtgebiet ist ein eigentlicher Kelch.

Daß es nicht nötig ist, einen entsprechenden Begriff des „eigentlichen" Schafts einzuführen, lehrt folgender

Satz 1: *Jedes in einem Schaft enthaltene Fluchtgebiet ist ein Schaft.*

Beweis: U' sei ein Schaft, V' ein in U' enthaltenes Fluchtgebiet. Die untere Grenze der Gürtellängen in U' bzw. in V' seien g, bzw. h. (R_i) sei eine Minimalfolge von Gürteln in U'. Wir dürfen annehmen, daß die Längen aller R_i höchstens $g+1$ betragen.

Die Punktmenge $M=U'-V'$ ist entweder leer, also V' identisch mit U' und nichts zu beweisen, oder aber M ist nicht leer und beschränkt, Gäbe es eine in (R_i) enthaltene Minimalfolge (R_k) derart, daß alle R_k einen Punkt mit M gemein hätten, so wäre (R_k) eine beschränkte Minimalfolge und U' kein Schaft. Da somit fast alle R_i in V' liegen, ist $h \leqq g$. Ist also (S_i) eine Minimalfolge in V', so bilden die S_i, die ja auch Gürtel von U' sind, auch eine Minimalfolge in U' (also ist $g=h$). Wäre (S_i) in V' beschränkt, so auch in U', also wäre U' kein Schaft. Jede Minimalfolge in V' ist also unbeschränkt, d. h. V' ist ein Schaft.

Satz 2: *In jedem Schaft gibt es einen geodätisch-polygonalen Gürtel, der entweder glatt oder ein hohles Eineck ist.*

Beweis: Auf dem Schaft U' gibt es nach § 17 einen Fluchtbereich U. Die Funktion $x(t)$ sei in Bezug auf U gemäß § 14 erklärt. Wäre für alle $t \geqq 0$: $x(t)=x(0)$, so gäbe es in U keine Schlinge, erst recht keinen Gürtel, der kürzer wäre als $R(0)$; $R(0)$ wäre, unendlich oft gesetzt, eine beschränkte Minimalfolge für U', im Widerspruch dazu, daß U' ein Schaft. Somit gibt es ein $t>0$, so daß $x(t)<x(0)$. Hätte $R(t)$ einen Punkt mit dem Rand R_0 von U gemein, so wäre $a(R(t))=0$, also $s(R(t))=x(t) \geqq x(0)$ was nicht stimmt. $R(t)$ hat also keinen Punkt mit R_0 gemein, ist also nach Satz 2 und Satz 3, § 16, glatt oder ein hohles Eineck.

Satz 3. *Auf jedem eigentlichen Kelch gibt es einen Gürtel R folgender Eigenschaft: R ist ein geodätisches Polygon. Im Fluchtbereich $U(R)$ gibt es keinen kürzeren Gürtel als R. R ist einspringend oder glatt.*

Beweis: Auf dem gegebenen eigentlichen Kelch U' gibt es nach § 17 einen Fluchtbereich U. Das Innere V' von U ist ein in U' enthaltenes Fluchtgebiet, also ein Kelch. Es gibt also in V' eine beschränkte Minimalfolge; somit gibt es ein $t_0 \geqq 0$ derart, daß für alle Gürtel R_i jener Folge gilt: $a(R_i) \leqq t_0$, also $s(R_i) \geqq x(t_0)$.

Ist g die untere Grenze der Gürtellängen in V', so ist $s(R_i) \to g$, also auch $g \geqq x(t_0)$; folglich gilt für alle Gürtel $R(t)$: $s(R(t)) = x(t) \geqq g \geqq x(t_0)$. Für $t = t_0$ ergibt sich $x(t_0) \geqq g \geqq x(t_0)$. Mithin $g = x(t_0)$, und wegen der Monotonität von $x(t)$: $x(t) = x(t_0)$ für $t \geqq t_0$.

$R(t_0)$ hat die für R geforderten Eigenschaften. Zunächst hat $R(t_0)$ die Länge g, es gibt also keinen kürzeren Gürtel in $U(R)$. Ferner ist $R(t_0)$ ein geodätisches Polygon. Wäre $R(t_0)$ weder einspringend noch glatt, so wäre $R(t_0)$ nach Satz 2, § 16, ein hohles Eineck. Dann gäbe es aber nach Satz 4, § 16, ein $t > t_0$, so daß $x(t) < x(t_0)$; was nicht stimmt.

Satz 4: *Jedes Fluchtgebiet nichtnegativer Gaußscher Krümmung ist ein eigentlicher Kelch.*

Wir können den Satz auch so formulieren:

Satz 4': *Auf jedem Schaft gibt es eine Stelle negativer Gaußscher Krümmung.*

Beweis (für die Formulierung 4'): Wir unterscheiden, ob es auf dem Schaft U' ein hohles Eineck gibt oder nicht.

Annahme I: Es gibt in U' ein hohles Eineck R_0. w_0 sei der Winkel von R_0, gemäß § 14 gemessen. Auf das Innere V' von $U(R_0)$ wenden wir den Hauptsatz, § 17, an, und zwar für $\varepsilon = \frac{1}{2}(\pi - w_0)$. Der Gürtel R_ε, der die im Hauptsatz geforderten Eigenschaften hat, berandet zusammen mit R_0 einen Normalbereich N, der einem abgeschlossenen von zwei konzentrischen euklidischen Kreisen berandeten ebenen Bereich homöomorph ist. Es gilt also $\chi(N) = 0$. Wir bestimmen die Totalkrümmung $C(N)$ von N gemäß (20) § 13. Dabei ist $\chi(N) = 0$, $X(R) = 0$ zu setzen. w_1 bis w_n seien die Winkel von R_ε, gemessen in N. Da N und $U(R_\varepsilon)$ zu verschiedenen Seiten von R_ε liegen, ist jede wesentliche Ecke von R_ε gleichzeitig hohl gegen den einen Bereich und einspringend gegen den andern. Ist also R_ε einspringend, d.h. einspringend gegen $U(R_\varepsilon)$, so sind alle Ecken von R_ε hohl gegen N, sodaß $\sum_{i=1}^{n} (\pi - w_i) > 0$. Ist R_ε glatt, so ist jene Summe leer. Ist endlich R_ε ein hohles, d.h. gegen $U(R_\varepsilon)$ hohles, Eineck, so ist $n = 1$, und jene Summe hat den Wert:

$$\pi - w_1 \geqq -\varepsilon = -\tfrac{1}{2}(\pi - w_0).$$

Somit folgt in allen für die Gestalt von R_ε möglichen Fällen aus (20):

$$C(N) \leqq -(\pi - w_0) - \left(-\tfrac{1}{2}(\pi - w_0)\right) = -\tfrac{1}{2}(\pi - w_0) < 0.$$

Also gibt es in N, also in U' eine Stelle negativer Gaußscher Krümmung.

Annahme II: Es gibt in U' kein hohles Eineck. Dann gibt es nach Satz 2 einen glatten Gürtel R_0. Wir bilden die Funktion $x(t)$ für den in U' enthaltenen Fluchtbereich $U = U(R_0)$. Wie beim Beweis von Satz 2 ergibt sich die Existenz eines positiven t mit $x(t) < x(0)$; weiter folgt wie beim Beweis von Satz 2, daß $R_1 = R(t)$ entweder ein hohles Eineck oder glatt, also nach unsrer Annahme notwendig glatt ist.

Für den von R_1 und R_0 berandeten, dem ebenen Kreisring homöomorphen Normalbereich N finden wir diesmal nach (20), weil der Rand von N keine wesentliche Ecke hat: $C(N) = 0$.

Wir schließen nun indirekt. Angenommen, es gebe in N keine Stelle negativer Gaußscher Krümmung. Dann folgt aus $C(N) = 0$, daß die Gaußsche Krümmung in N identisch verschwindet, daß also N im Kleinen der euklidischen Ebene isometrisch ist. Wir ziehen nun eine kürzeste Verbindung F zwischen R_1 und R_0 in N; das geht, weil N ein Normalbereich ist und je ein Punkt $p_i \subset R_i$ $(i=0,1)$ existiert, so daß $\varrho_N(p_0 p_1) = \varrho_N(R_0 R_1)$. Weil N keine einspringende Ecke hat, ist F ein geodätischer Bogen. Wie beim Beweis von Satz 3, § 16, schließt man, daß F keinen spitzen Winkel mit R_i bilden kann; F muß also (wie auch aus bekannten Sätzen folgt) auf R_0 und R_1 senkrecht stehen. Schneide ich nun N längs F auf, so entsteht ein einfachzusammenhängender Bereich, den ich in die euklidische Ebene abwickeln kann. Dabei geht aber N, weil F, R_i geodätische Linien sind und F auf den R_i senkrecht steht, in eine Rechtecksfläche über. Zwei Gegenseiten dieses Rechtecks wären mit den R_i isometrisch, also wären R_0, R_1 gleichlang, d.h. $x(0) = x(t)$, während nach unsrer Konstruktion $x(0) > x(t)$.

(Eingegangen den 26. März 1934.)