J. G. VAN DER CORPUT
G. SCHAAKE

Ungleichungen für Polynome und trigonometrische Polynome

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 321-361
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__321_0>

Ungleichungen für Polynome und trigonometrische Polynome

von

J. G. van der Corput und G. Schaake

Groningen

Einleitung.

In dieser Arbeit werden Formen, gewöhnliche Polynome, trigonometrische Polynome und schließlich noch Laurentpolynome behandelt.

Fangen wir an mit der Besprechung der Formen. Besitzt die reelle n-äre Form m^{ten} Grades $f(x_1, \ldots, x_n)$ die Eigenschaft, daß für alle reellen $x_1, \ldots, x_n$ die Ungleichung

$$(1) \qquad |f(x_1, \ldots, x_n)| \leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}m}$$

gilt, dann ist, wie wir in Satz 9 zeigen werden, die erste Polarform

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

für alle reellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $x_1, \ldots x_n$ absolut

$$\leqq m(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{\frac{1}{2}} (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

Aus (1) leiten wir also für die erste Polarform eine obere Schranke des Absolutwertes ab. Dasselbe tun wir in Satz 10 für die Hessesche Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix},$$

und in den Sätzen 14 und 15 für alle Polarformen von f.

Sind k n-äre Formen $m_\varkappa^{\text{ten}}$ Grades $f_\varkappa(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben ($\varkappa = 1, 2, \ldots, k$; $1 \leqq k \leqq n$) und bleibt Formel (1) gültig, wenn

f durch $f_\varkappa$ und m durch $m_\varkappa$ ersetzt werden, so finden wir in Satz 11 eine obere Schranke für die Norm der Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix};$$

die Norm dieser Matrix ist die Quadratsumme aller in ihr enthaltenen k-reihigen Determinanten. Im Spezialfall $k = n$ finden wir in Satz 12 eine obere Schranke für den Absolutwert der Jacobischen Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Merkwürdig ist das folgende Resultat (vgl. Satz 6): Eine binäre Form m^{ten} Grades $F(x, y)$, die für jedes reelle Zahlenpaar (x, y) absolut $\leqq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}$ ist, besitzt sogar die Eigenschaft

$$F^2(x, y) + \frac{1}{m^2}\left(y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \leqq (x^2+y^2)^m.$$

Jetzt die Resultate über gewöhnliche Polynome. Wie Herr S. Bernstein [1]) bewiesen hat, gilt für ein reelles Polynom $P(u)$, das für jedes reelle u der Ungleichung

$$|P(u)| \leqq (1+u^2)^{\frac{1}{2}m} \tag{2}$$

genügt, die Eigenschaft, daß für jedes reelle u

$$|P'(u)| \leqq m(1+u^2)^{\frac{1}{2}(m-1)}$$

ist. Wir werden in Satz 4 beweisen, daß dann sogar

$$(P'(u))^2 + (mP(u) - uP'(u))^2 \leqq m^2(1+u^2)^{m-1} \tag{3}$$

ist. Satz 5 lehrt uns, wann in (3) das Gleichheitszeichen gilt, also

$$(P'(u))^2 + (mP(u) - uP'(u))^2 = m^2(1+u^2)^{m-1} \tag{4}$$

ist. Ist nämlich $P(u)$ das Polynom $\pm (1+u^2)^{\frac{1}{2}m}$ (also m gerade), oder ist $P(u)$ identisch gleich dem reellen Teil von $(a+ib)(u+i)^m$

---

1) S. Bernstein, Leçons sur les propriétés extrémales [Paris, Gauthier-Villars (1926)], p. 56.

mit $|a+ib|=1$, so gilt Beziehung (4) für jedes u. Ist aber das die Ungleichung (2) erfüllende Polynom $P(u)$ nicht identisch gleich dem reellen Teil von $(a+ib)(u+i)^m$ mit $|a+ib|=1$, so gilt (4) für ein reelles u dann und nur dann, wenn in (2) das Gleichheitszeichen gilt.

Ein reelles Polynom $P(u)$, das für jedes reelle u der Ungleichung (2) genügt, besitzt für jedes reelle u sogar die Eigenschaft

$$P^2(u)+\left(\frac{(u^2+1)P'(u)}{m}-uP(u)\right)^2 \leqq (1+u^2)^m$$

(vergl. Satz 7).

In Satz 20 beweisen wir: Ist $F(z)$ ein Polynom höchstens m^{ten} Grades (dessen Koeffizienten nicht reell zu sein brauchen), dessen Wert für jedes auf dem Einheitskreise E liegende z zu einer konvexen Menge M gehört, dann besitzt jedes auf E liegende z die Eigenschaft, daß der Punkt $\zeta=f(z)-\frac{z}{m}f'(z)$ der Menge M angehört und vom Rande von M einen Abstand $\geqq\frac{|f'(z)|}{m}$ besitzt. Als Spezialfälle finden wir u. a. die folgenden Resultate, wobei $f(z)$ ein Polynom höchstens m^{ten} Grades bezeichnet: Ist $f(z)$ auf E beständig absolut $\leqq 1$, dann ist auf E stets

$$\left|f(z)-\frac{z}{m}f'(z)\right|+\frac{1}{m}|f'(z)|\leqq 1. \tag{5}$$

Hat $f(z)$ überall auf E einen reellen Teil $\Re f(z)\leqq K$, dann ist auf E beständig

$$\Re\left(f(z)-\frac{z}{m}f'(z)\right)+\frac{1}{m}|f'(z)|\leqq K. \tag{6}$$

Auf entsprechende Weise leiten wir in Satz 24 auf E zwei Schranken für $\arg\left(mf(z)-zf'(z)\right)$ ab, unter der Voraussetzung, daß auf E zwei Schranken für $\arg f(z)$ gegeben sind. Außerdem untersuchen wir noch, wann in den Ungleichungen (5) und (6) und in den entsprechenden das genannte Argument betreffenden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt.

Jetzt kommen die Resultate über trigonometrische Polynome an die Reihe. Herr S. Bernstein [2]) hat für ein trigonometrisches Polynom $f(\varphi)$ höchstens m^{ten} Grades, das stets absolut $\leqq 1$ ist, die Ungleichung

---

[2]) S. Bernstein [1]), 39. Vergl. M. Riesz, Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome [Jahresbericht DMV **23** (1914), 354—368 (357)].

$$|f'(\varphi)| \leqq m$$

abgeleitet; wir finden in Satz 8 die schärfere Ungleichung

$$|f'(\varphi)| \leqq m\sqrt{1-f^2(\varphi)}.$$

Für jedes trigonometrische Polynom $f(\varphi)$ höchstens m^{ten} Grades, das stets absolut $\leqq 1$ ist, ist also sogar

$$|f(\varphi)| \leqq \sqrt{1-\frac{1}{m^2}(f'(\varphi))^2}.$$

In Satz 16 beweisen wir:

Ist $F(x_1, y_1; \ldots; x_m, y_m)$ eine reelle Form der Gestalt

$$a_0 x_1 \ldots x_m + a_1 \Sigma_1 x_1 \ldots x_{m-1} y_m + a_2 \Sigma_2 x_1 \ldots x_{m-2} y_{m-1} y_m$$
$$+ \ldots + a_{m-1} \Sigma_{m-1} x_1 y_2 \ldots y_m + a_m y_1 \ldots y_m,$$

wo Σ_μ eine Summe von $\binom{m}{\mu}$ Gliedern bezeichnet, z.B.

$$\Sigma_1 = x_1 \ldots x_{m-1} y_m + x_1 \ldots x_{m-2} y_{m-1} x_m + \ldots + y_1 x_2 \ldots x_{m-1},$$

so nimmt $F(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1; \ldots; \cos\varphi_m, \sin\varphi_m)$ seinen größten Absolutwert an für ein System von Werten $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m$.

Man beachte, daß dieser Satz nur ausgesprochen wird für Formen gewisser Gestalt, nicht für beliebige trigonometrische Formen, die in $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ symmetrisch sind. Denn bezeichnet z.B. $f(x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3)$ das Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks mit den Eckpunten (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3), dann ist

$$f(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1; \cos\varphi_2, \sin\varphi_2; \cos\varphi_3, \sin\varphi_3) = \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 1 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & 1 \\ \cos\varphi_3 & \sin\varphi_3 & 1 \end{vmatrix}^2,$$

und diese symmetrische Form nimmt ihren größten Wert an, nicht für ein System mit $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$, sondern für ein System mit $\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{2\pi}{3} = \varphi_3 + \frac{4\pi}{3}$.

Satz 29 gibt uns die folgende analoge Eigenschaft für gewisse trigonometrische Polynome:

Es werde für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$

$$F_\varrho(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{\mu=0}^{m} a_{\varrho\mu} \Sigma_\mu \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_\mu) +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} b_{\varrho\mu} \Sigma_\mu \sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_\mu)$$

gesetzt, wo $a_{\varrho\mu}$ und $b_{\varrho\mu}$ reelle Zahlen bezeichnen. Ist $\omega(u_1, \ldots, u_r)$

eine reelle Funktion der Variabeln $u_1, \ldots, u_r$, die für alle reellen Systeme $(u_1, \ldots, u_r)$ definiert ist, gilt für jedes reelle φ die Ungleichung

$$\omega(F_1(\varphi, \ldots, \varphi), \ldots, F_r(\varphi, \ldots, \varphi)) \leqq K,$$

und bilden die Punkte $(u_1, \ldots, u_r)$ mit $\omega(u_1, \ldots, u_r) \leqq K$ eine konvexe Menge, so gilt für jedes reelle System $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ die Ungleichung

$$\omega(F_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_m), \ldots, F_r(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)) \leqq K.$$

Wählt man $r = 1$ und $\omega(u) = u$, so findet man: Gilt für das trigonometrische Polynom höchstens m^{ten} Grades

$$F(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} A_\mu \cos \mu\varphi + \sum_{\mu=1}^{m} \binom{m}{\mu} B_\mu \sin \mu\varphi$$

für jedes reelle φ

$$|F(\varphi)| \leqq K,$$

so gilt für alle reellen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$

$$(7) \quad \left| \sum_{\mu=0}^{m} A_\mu \Sigma_\mu \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m} B_\mu \Sigma_\mu \sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_\mu) \right| \leqq K.$$

Hat dabei $F(\varphi)$ nicht identisch die Gestalt

$$A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi + A_0,$$

so gilt, wie wir noch in Satz 30 beweisen werden, für jedes reelle System $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, worin nicht alle φ untereinander gleich sind, in (7) das Ungleichheitszeichen.

Wählt man in Satz 29 dagegen $r = 2$ und $\omega(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$, so bekommt man: Gilt für jedes reelle φ

$$|F_1(\varphi, \ldots, \varphi) + i F_2(\varphi, \ldots, \varphi)| \leqq K,$$

so ist

$$(8) \quad |F_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) + i F_2(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)| \leqq K.$$

Ist es nicht möglich, zwei nicht beide verschwindende Konstanten γ_1 und γ_2 zu finden, derart daß

$$\gamma_1 F_1(\varphi, \ldots, \varphi) + \gamma_2 F_2(\varphi, \ldots, \varphi)$$

identisch gleich

$$a \cos m\varphi + b \sin m\varphi + c$$

ist, so gilt (wiederum nach Satz 30) für jedes reelle System

$(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, wo nicht alle φ untereinander gleich sind, in (8) das Ungleichheitszeichen.

Schließlich noch eine kurze Bemerkung über Laurentpolynome der Gestalt

$$L(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \Sigma_\mu z_1 z_2 \ldots z_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu \Sigma_\mu z_1^{-1} z_2^{-1} \ldots z_\mu^{-1},$$

wo die Koeffizienten a_μ und b_μ nicht reell zu sein brauchen. Die Bemerkung von Satz 27 besagt, daß, wenn $z_1, z_2, \ldots, z_m$ die Peripherie des Einheitskreises durchlaufen, das Laurentpolynom seinen größten Absolutwert für ein System mit $z_1 = z_2 = \ldots = z_m$ annimmt. Im Besonderen gilt dies natürlich auch für gewöhnliche Polynome. Ist das Polynom nicht identisch gleich $a_m z_1 \ldots z_m + a_0$, und liegen die Punkte $z_1, \ldots, z_m$ auf dem Einheitskreise, so wird, wie aus Satz 28 hervorgeht, der maximale Absolutwert nur angenommen für Systeme mit $z_1 = z_2 = \ldots = z_m$.

Nachdem wir im Obigen einen Überblick über die wichtigsten Resultate dieser Arbeit gegeben haben, schließen wir diese Einleitung mit einigen Bemerkungen über die Beweismethoden, die hier Anwendung gefunden haben. Mit Rücksicht auf diese Methoden zerfällt diese Abhandlung in zwei Teile. Der erste Teil stützt sich auf Satz 1, der besagt, daß, wenn das in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ homogene Polynom

$$P(\varphi) = a \cos^m \varphi + mb \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \ldots$$

für jedes reelle φ absolut $\leqq 1$ ist, die Ungleichung $a^2 + b^2 \leqq 1$ gilt. Mittels dieses Satzes und mittels der Tatsache, daß die auftretenden Größen wie Polarformen, Norm einer Funktionalmatrix gewissen Transformationen gegenüber invariant sind, leiten wir die Sätze 2, 3, ..., 16 ab.

Der zweite Teil fängt mit Satz 17 an, der die folgende Identität enthält: Es bezeichne $\Sigma z_1 \ldots z_\mu$ für $0 \leqq \mu \leqq m$ die μ^{te} elementarsymmetrische Funktion von $z_1, \ldots, z_m$ (also $= 1$ für $\mu = 0$), und es werde gesetzt

$$F(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \Sigma z_1 \ldots z_\mu$$

(wo die Koeffizienten a_μ nicht reell zu sein brauchen) und

$$\lambda_m(z_1, \ldots z_m) = \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{\binom{m}{\mu}} \Sigma z_1 \ldots z_\mu .$$

Dann gilt die Identität

$$F(z_1, \ldots, z_m) = \sum_p \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) F(p, \ldots, p),$$

wo die Summe $\sum\limits_p$ erstreckt wird über die m verschiedenen Werte von $p = \sqrt[m]{z_1 \ldots z_m}$.

Außerdem hat man

$$\sum_p \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) = 1.$$

Liegen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ auf dem Einheitskreise mit $z_1 z_2 \ldots z_m = 1$, dann ist nach Satz 18

$$\lambda_m(z_1, \ldots, z_m) \geqq 0,$$

wo das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_m = e^{\frac{2\pi i l}{m}} \qquad (1 \leqq l \leqq m-1)$$

ist.

Mittels dieser Identität leiten wir die Sätze 19, 20, ..., 30 ab.

Erster Teil.

Hilfssatz 1: *Bezeichnet $Q(\varphi)$ ein homogenes Polynom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ mit reellen Koeffizienten und mit der Eigenschaft, daß bei geeignet gewähltem φ_0 die $2m$ Ungleichungen*

$$(9) \qquad (-1)^h\, Q\left(\varphi_0 + \frac{h\pi}{m}\right) \geqq 0 \qquad (0 \leqq h \leqq 2m-1)$$

gelten, dann ist $Q(\varphi)$ identisch gleich Null.

Beweis. Gilt in den $2m$ Ungleichungen (9) stets das Gleichheitszeichen, dann besitzt das homogene Polynom $Q(\varphi)$ $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades im Intervall $0 \leqq \varphi < 2\pi$ mindestens $2m$ Nullstellen, so daß $Q(\varphi)$ dann identisch verschwindet. Es genügt also, einen Widerspruch abzuleiten unter der Voraussetzung, daß in mindestens einer der Ungleichungen (9) das Ungleichheitszeichen gilt. Bei geeignet gewähltem h $(0 \leqq h \leqq 2m-1)$ ist dann

$$(-1)^h\, Q\left(\varphi_0 + \frac{h\pi}{m}\right) > 0.$$

Wird nun

$$(-1)^h Q\left(\varphi + \varphi_0 + \frac{h\pi}{m}\right) = G(\varphi)$$

gesetzt, dann ist $G(\varphi)$ ein homogenes Polynom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ mit

$$G(0)>0 \text{ und } (-1)^l\, G\left(\frac{l\pi}{m}\right) \geqq 0 \qquad (1 \leqq l \leqq 2m-1). \tag{10}$$

Wegen

$$\cos m\varphi = C \prod_{k=0}^{m-1} \sin\left(\varphi + \frac{(2k+1)\pi}{2m}\right)$$

ist

$$H(\varphi) = \frac{\cos m\varphi}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2m}\right)} = C \prod_{k=1}^{m-2} \sin\left(\varphi + \frac{(2k+1)\pi}{2m}\right)$$

ein homogenes Polynom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$. Für jedes $\varphi = \frac{l\pi}{m}$ $(1 \leqq l \leqq 2m-1;\ l \neq m)$ ist der Nenner $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2m}\right)$ positiv, so daß $H(\varphi)$ dann dasselbe Vorzeichen wie $\cos m\varphi$, also wie $(-1)^l$ hat. Folglich ist

$$(-1)^l\, H\left(\frac{l\pi}{m}\right) > 0. \tag{11}$$

Wegen (10) ist es möglich, ein positives ε so zu wählen, daß

$$G(0) + \varepsilon H(0) > 0$$

ist. Dann bezeichnet

$$F(\varphi) = G(\varphi) + \varepsilon H(\varphi)$$

ein homogenes Polynom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ mit

$$F(0)>0, \text{ also } (-1)^m F(\pi) = F(0) > 0;$$

außerdem ist für $1 \leqq l \leqq 2m-1,\ l \neq m$

$$(-1)^l F\left(\frac{l\pi}{m}\right) = (-1)^l\, G\left(\frac{l\pi}{m}\right) + (-1)^l \varepsilon H\left(\frac{l\pi}{m}\right) > 0$$

wegen (10) und (11). Hiermit ist allgemein bewiesen

$$(-1)^k F\left(\frac{k\pi}{m}\right) > 0 \qquad (0 \leqq k \leqq 2m-1),$$

so daß $F(\varphi)$ sein Vorzeichen im Intervall $0 \leqq \varphi < 2\pi$ mindestens $2m$-mal wechselt, womit der Widerspruch gefunden ist, da $F(\varphi)$ eine Form $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ bezeichnet.

Satz 1: *Ist das in cos φ und sin φ homogene reelle Polynom*

$$P(\varphi) = a \cos^m \varphi + m b \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi + \dots$$

für jedes reelle φ absolut $\leqq 1$, so ist $a^2 + b^2 \leqq 1$. Gilt unter den genannten Voraussetzungen in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen, so ist $a = \pm 1$, $b = 0$, oder man hat identisch

$$P(\varphi) = a \cos m\varphi + b \sin m\varphi. \tag{12}$$

Beweis: Wegen

$$\cos m\varphi = \cos^m \varphi - \binom{m}{2} \cos^{m-2} \varphi \sin^2 \varphi + \dots$$

und

$$\sin m\varphi = m \cos^{m-1} \varphi \sin \varphi - \binom{m}{3} \cos^{m-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots$$

ist

$$a \cos m\varphi + b \sin m\varphi - P(\varphi) = \sin^2 \varphi \cdot Q(\varphi), \tag{13}$$

wo $Q(\varphi)$ eine Form $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades in $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ bezeichnet. Es bezeichne φ_0 eine Zahl mit

$$a \cos m\varphi_0 + b \sin m\varphi_0 = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{14}$$

Wäre $a^2 + b^2 > 1$, dann würde die Form $Q(\varphi)$ $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades wegen (13) und $|P(\varphi)| \leqq 1$ in den m Punkten $\varphi = \varphi_0 + \frac{h\pi}{m}$ $(h = 0, 1, \dots, 2m-1)$ abwechselnd positiv und negativ sein, also im Intervall $0 \leqq \varphi < 2\pi$ mindestens $2m$-mal ihr Vorzeichen wechseln, und das ist unmöglich. Folglich ist $a^2 + b^2 \leqq 1$.

Jetzt werden wir unter den Voraussetzungen von Satz 1 aus $a^2 + b^2 = 1$ und $b \neq 0$ ableiten, daß $P(\varphi)$ identisch die in (12) angegebene Gestalt hat.

Formel (14) verwandelt sich hier in

$$a \cos m\varphi_0 + b \sin m\varphi_0 = 1. \tag{15}$$

Wegen $a^2 + b^2 = 1$ und $b \neq 0$ ist $a \neq \pm 1$, also

$$\varphi_0 + \frac{h\pi}{m} \not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \pi) \quad (0 \leqq h \leqq 2m-1),$$

somit

$$\sin^2 \left(\varphi_0 + \frac{h\pi}{m}\right) > 0 \qquad (0 \leqq h \leqq 2m-1). \tag{16}$$

Aus (13) folgt dann für $h = 0, 1, \dots, 2m-1$

$$(-1)^h \sin^2\left(\varphi_0+\frac{h\pi}{m}\right) Q\left(\varphi_0+\frac{h\pi}{m}\right)$$
$$=(-1)^h\left\{a\cos m\left(\varphi_0+\frac{h\pi}{m}\right)+b\sin m\left(\varphi_0+\frac{h\pi}{m}\right)-P\left(\varphi_0+\frac{h\pi}{m}\right)\right\}$$
$$=1-(-1)^h P\left(\varphi_0+\frac{h\pi}{m}\right)\geqq 0$$

wegen (15) und $|P(\varphi)|\leqq 1$. Mit Rücksicht auf (16) folgt hieraus

$$(-1)^h Q\left(\varphi_0+\frac{h\pi}{m}\right)\geqq 0 \qquad (0\leqq h\leqq 2m-1).$$

Hierin bezeichnet $Q(\varphi)$ eine Form in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades, die also nach dem vorigen Hilfssatz identisch verschwindet. Aus (13) geht dann hervor, daß $P(\varphi)$ die in (12) angegebene Gestalt besitzt.

Satz 2: *Bezeichnet $f(X, Y)$ eine reelle binäre Form m^{ten} Grades $(m>0)$, die für reelle X und Y stets einen Absolutwert $\leqq (X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}m}$ besitzt, dann gilt für reelle x, y, ξ und η die Ungleichung*

$$(17) \qquad \left|\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqq m(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

Beweis. Durch eine geeignet gewählte (von x und y abhängige) orthogonale Transformation wird (x, y) übergeführt in $(\bar{x}, \bar{y})$ mit

$$\bar{x}=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \bar{y}=0.$$

Durch diese Transformation geht $f(X, Y)$ über in $F(\overline{X}, \overline{Y})$ und die Polarform $\xi\frac{\partial f}{\partial X}+\eta\frac{\partial f}{\partial Y}$ in $\bar{\xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{X}}+\bar{\eta}\frac{\partial f}{\partial \overline{Y}}$. Nach der Voraussetzung ist

$$|F(\overline{X}, \overline{Y})|=|f(X, Y)|\leqq (X^2+Y^2)^{\frac{1}{2}m}=(\overline{X}^2+\overline{Y}^2)^{\frac{1}{2}m},$$

also

$$|F(\cos\varphi, \sin\varphi)|\leqq 1.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf den vorigen Satz, wenn

$$F(\overline{X}, \overline{Y})=a\overline{X}^m+mb\,\overline{X}^{m-1}\,\overline{Y}+\dots$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$(18) \qquad a^2+b^2\leqq 1.$$

Wegen

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\bar{\xi}\frac{\partial F}{\partial \overline{X}}+\bar{\eta}\frac{\partial F}{\partial \overline{Y}}\right)_{\overline{X}=\bar{x},\,\overline{Y}=0}$$
$$=m\bar{x}^{m-1}(a\bar{\xi}+b\bar{\eta})$$

ist nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right|\leqq m\bar{x}^{m-1}\sqrt{(a^2+b^2)(\bar{\xi}^2+\bar{\eta}^2)}$$
$$=m(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(m-1)}\sqrt{(a^2+b^2)(\xi^2+\eta^2)},$$

so daß die Behauptung aus (18) folgt.

Hilfssatz 2: *Ist*

(19) $$f(x,y)=\pm(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}$$

oder ist $f(x,y)$ *gleich dem reellen Teil von*

$$(A+iB)(x+iy)^m \textit{ mit } |A+iB|=1,$$

so ist

(20) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=m^2(x^2+y^2)^{m-1}.$$

Umgekehrt, ist $f(x,y)$ *ein homogenes Polynom* m^{ten} *Grades in* x *und* y, *das stets* (20) *erfüllt, so ist entweder* $f(x,y)$ *stets gleich dem reellen Teil von* $(A+iB)(x+iy)^m$ *mit* $|A+iB|=1$, *oder* $f(x,y)$ *genügt stets der Beziehung* (19); *im letzten Fall ist* m *natürlich gerade.*

Beweis. Daß (20) aus (19) folgt, ist klar. Ist $f(x,y)$ gleich dem reellen Teil von $(A+iB)(x+iy)^m$ mit $|A+iB|=1$, so ist, falls

$$|A+iB|=e^{i\alpha},\quad x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi$$

gesetzt wird,

$$f(x,y)=r^m\cos(m\varphi+\alpha),$$

so daß aus

(21) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2$$

folgt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=m^2r^{2m-2}\sin^2(m\varphi+\alpha)+m^2r^{2m-2}\cos^2(m\varphi+\alpha)=$$
$$=m^2r^{2m-2}=m^2(x^2+y^2)^{m-1};$$

dann gilt somit (20).

Es sei schließlich $f(x, y)$ ein homogenes Polynom m^{ten} Grades in x und y, das identisch (20) erfüllt. Wird $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ gesetzt, so ist

$$f(x, y) = r^m F(\varphi),$$

wo $F(\varphi)$ ein homogenes Polynom m^{ten} Grades in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ bezeichnet. Aus (21) und (20) folgt dann

$$m^2 r^{2m-2} F^2(\varphi) + r^{2m-2} F'^2(\varphi) = m^2 r^{2m-2},$$

also

$$m^2 F^2(\varphi) + F'^2(\varphi) = m^2, \tag{22}$$

somit

$$2m^2 F(\varphi) F'(\varphi) + 2 F'(\varphi) F''(\varphi) = 0.$$

Hieraus folgt

$$F'(\varphi) = 0 \ \text{ oder } \ m^2 F(\varphi) + F''(\varphi) = 0,$$

so daß entweder $F(\varphi)$ konstant, oder

$$F(\varphi) = A\cos m\varphi - B\sin m\varphi \tag{23}$$

ist. Ist $F(\varphi)$ konstant, dann ist wegen (22)

$$F(\varphi) = \pm 1,$$

so daß dann (19) gilt. Gilt (23), so folgt aus (22)

$$m^2(A\cos m\varphi - B\sin m\varphi)^2 + m^2(-A\sin m\varphi - B\cos m\varphi)^2 = m^2,$$

also

$$A^2 + B^2 = 1;$$

man hat dann

$$f(x, y) = r^m(A\cos m\varphi - B\sin m\varphi),$$

so daß $f(x, y)$ gleich dem reellen Teil von $(A+iB)(x+iy)^m$ mit $|A+iB| = 1$ ist.

Hiermit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Satz 3: *Erfüllt die reelle binäre Form $f(x, y)$ m^{ten} Grades $(m > 0)$ für jedes reelle Zahlenpaar x und y die Ungleichung*

$$|f(x, y)| \leqq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}, \tag{24}$$

so ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \leqq m^2(x^2+y^2)^{m-1}. \tag{25}$$

Ist $f(x, y) = \pm (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}$ *oder ist* $f(x, y)$ *gleich dem reellen Teil von* $(A+iB)(x+iy)^m$ *mit* $|A+iB| = 1$, *so gilt nach dem vorigen Hilfssatz in* (25) *stets das Gleichheitszeichen. Umgekehrt, gilt in* (25) *stets das Gleichheitszeichen, so ist die Form* $f(x, y)$ *wiederum nach dem vorigen Hilfssatz) entweder gleich* $\pm (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}$ *oder gleich dem reellen Teil von* $(A+iB)(x+iy)^m$ *mit* $|A+iB| = 1$.

Ist $f(x, y)$ *nicht identisch gleich dem reellen Teil von* $(A+iB)(x+iy)^m$ *mit* $|A+iB| = 1$, *so gilt in* (25) *für ein reelles Zahlenpaar* x *und* y *das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn in* (24) *das Gleichheitszeichen gilt, abgesehen vom Spezialfall* $m = 1$, $x = y = 0$.

Beweis: Daß (25) aus (24) folgt, geht aus Satz 2, mit $\xi = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $\eta = \frac{\partial f}{\partial y}$ angewendet, hervor. Wir dürfen also weiter annehmen, daß $f(x, y)$ nicht identisch gleich dem reellen Teil von $(A+iB)(x+iy)^m$ mit $|A+iB| = 1$ ist.

Wird (x, y) so gewählt, daß in (24) das Gleichheitszeichen gilt, dann ist

$$m^2(x^2+y^2)^m = m^2 f^2(x, y) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$
$$\leqq (x^2+y^2)\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}$$

nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Fällt (x, y) nicht mit dem Koordinatenursprung zusammen, so folgt hieraus mit Rücksicht auf (25), daß in (25) das Gleichheitszeichen gilt. Im Spezialfall, daß (x, y) mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, ist es evident, daß für $m > 1$ in (25) das Gleichheitszeichen gilt. Hiermit ist bewiesen: gilt in (24) das Gleichheitszeichen, so auch in (25), abgesehen vom im Satze genannten Spezialfall.

Wird jetzt umgekehrt (x, y) so gewählt, daß in (25) das Gleichheitszeichen gilt, dann gilt auch, wie wir jetzt zeigen werden, in (24) das Gleichheitszeichen. Dabei dürfen wir annehmen, daß (x, y) nicht mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt, da sonst diese Behauptung evident ist. Durch eine geeignete von x und y abhängige orthogonale Transformation geht (x, y) über in $(\bar{x}, \bar{y})$ mit

$$\bar{x} = \sqrt{x^2+y^2} > 0 \quad \text{und} \quad \bar{y} = 0.$$

Durch diese Transformation wird (X, Y) in $(\bar{X}, \bar{Y})$ übergeführt; wird dann

$$f(X, Y) = F(\overline{X}, \overline{Y}) = a\overline{X}^m + mb\overline{X}^{m-1}\overline{Y} + \dots$$

gesetzt, so ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left\{\left(\frac{\partial f(X, Y)}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(X, Y)}{\partial Y}\right)^2\right\}_{X=x,\, Y=y}$$
$$= \left\{\left(\frac{\partial F(\overline{X}, \overline{Y})}{\partial \overline{X}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(\overline{X}, \overline{Y})}{\partial \overline{Y}}\right)^2\right\}_{\overline{X}=\bar{x},\, \overline{Y}=0}$$
$$= m^2(a^2+b^2)\overline{x}^{2(m-1)} = m^2(a^2+b^2)(x^2+y^2)^{m-1}.$$

Da in (25) das Gleichheitszeichen gilt, ist also $a^2 + b^2 = 1$. Das in $\cos \Phi$ und $\sin \Phi$ homogene Polynom m^{ten} Grades

$$F(\cos \Phi, \sin \Phi) = a \cos^m \Phi + mb \cos^{m-1} \Phi \sin \Phi + \dots$$

ist beständig absolut $\leqq 1$, so daß wegen $a^2 + b^2 = 1$ nach Satz 1 entweder $a = \pm 1$, oder identisch

$$F(\cos \Phi, \sin \Phi) = a \cos m\Phi + b \sin m\Phi$$

ist. Im letzten Fall wäre $f(X, Y) = F(\overline{X}, \overline{Y})$ identisch gleich dem reellen Teil von $(a - bi)(\overline{X}+i\overline{Y})^m$; da eine orthogonale Transformation angewendet ist, ist bei geeignet gewähltem reellem ω

$$\overline{X} + i\overline{Y} = e^{i\omega}(X+iY),$$

so daß in diesem Falle $f(X, Y)$ identisch gleich dem reellen Teil von $(A+iB)(X+iY)^m$ mit

$$A + iB = (a-ib)\,e^{m\omega i}, \text{ also } |A+iB| = |a-ib| = 1$$

wäre, in Widerspruch mit den Voraussetzungen. Folglich ist $a = \pm 1$; wegen

$$a\overline{x}^m = F(\bar{x}, \bar{y}) = f(x, y)$$

ist also

$$f(x, y) = \pm (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m},$$

so daß in (24) das Gleichheitszeichen gilt. Hiermit ist alles bewiesen.

Aus diesem Satz werden wir den folgenden Satz ableiten.

Satz 4. *Ist $P(u)$ ein reelles Polynom m^{ten} Grades, und ist stets*

$$|P(u)| \leqq (1+u^2)^{\frac{1}{2}m}, \tag{26}$$

so ist beständig

$$(P'(u))^2 + (mP(u) - uP'(u))^2 \leqq m^2(1+u^2)^{m-1}. \tag{27}$$

Bemerkung. Insbesondere finden wir so das Resultat von Herrn S. Bernstein

$$|P'(u)| \leqq m(1+u^2)^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

Beweis. Wird $u = \dfrac{x}{y}$ gesetzt, wo $y \neq 0$ ist, dann ist die binäre Form m^{ten} Grades

$$f(x, y) = y^m P\left(\frac{x}{y}\right)$$

nach der Voraussetzung absolut $\leqq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}$, so daß nach dem vorigen Satz, mit $\xi = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\eta = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ angewendet,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \leqq m^2 (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(m-1)},$$

somit

$$\left(y^{m-1} P'\left(\frac{x}{y}\right)\right)^2 + \left(m y^{m-1} P\left(\frac{x}{y}\right) - y^{m-2} x P'\left(\frac{x}{y}\right)\right)^2 \leqq m^2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

Setzt man hier $y = 1$, $x = u$, so findet man die Behauptung.

Satz 5. *Ist* $P(u) = \pm (1+u^2)^{\frac{1}{2}m}$, *oder ist* $P(u)$ *gleich dem reellen Teil von* $(a+bi)(u+i)^m$ *mit* $|a+ib| = 1$, *so gilt stets Ungleichung* (26) *und ist beständig*

$$(28) \qquad (P'(u))^2 + (m P(u) - u P'(u))^2 = m^2(1+u^2)^{m-1}.$$

Bezeichnet $P(u)$ *ein Polynom in* u, *das stets der Ungleichung* (26) *genügt und nicht identisch gleich dem reellen Teil von* $(a+bi)(u+i)^m$ *mit* $|a+bi| = 1$ *ist, dann gilt* (28) *für ein reelles* u *dann und nur dann, wenn in* (26) *das Gleichheitszeichen gilt.*

Beweis. Ist $P(u) = \pm (1+u^2)^{\frac{1}{2}m}$, so ist (26) evident, sogar mit dem Gleichheitszeichen, und es ist

$$\begin{aligned}(P'(u))^2 + (m P(u) - u P'(u))^2 &= m^2(1+u^2)^{m-2} u^2 + \left\{m(1+u^2)^{\frac{1}{2}m} - u^2 m(1+u^2)^{\frac{1}{2}m-1}\right\}^2 \\ &= m^2(1+u^2)^{m-2} u^2 + m^2(1+u^2)^{m-2} = m^2(1+u^2)^{m-1},\end{aligned}$$

so daß dann (28) gilt.

Ist $P(u)$ gleich dem reellen Teil von $(a+ib)(u+i)^m$ mit $|a+ib| = 1$, so ist

$$|P(u)| \leqq |(a+bi)(u+i)^m| = (1+u^2)^{\frac{1}{2}m},$$

so daß auch dann (26) gilt; wird $f(x, y) = y^m P\left(\frac{x}{y}\right)$ gesetzt, so ist

$$(29)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(y^{m-1}P'\left(\frac{x}{y}\right)\right)^2+\left(m y^{m-1}P\left(\frac{x}{y}\right)-y^{m-2}P'\left(\frac{x}{y}\right)\right)^2,$$

so daß (28) aus Hilfssatz 2, mit $x = u$, $y = 1$ angewendet, folgt.

Wir dürfen also weiter annehmen, daß $P(u)$ ein Polynom m^{ten} Grades in u bezeichnet, das stets der Ungleichung (26) genügt und nicht identisch gleich dem reellen Teil von $(a+ib)(u+i)^m$ mit $|a+ib| = 1$ ist. Die binäre Form $f(x, y) = y^m P\left(\frac{x}{y}\right)$ m^{ten} Grades ist dann absolut $\leqq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}$.

Gilt in (26) das Gleichheitszeichen, so ist nach Satz 3

$$(30)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = m^2(x^2+y^2)^{m-1},$$

so daß dann (28) aus (29) (mit $x = u$, $y = 1$ angewendet) folgt. Gilt umgekehrt (28), so ist wegen (29) (wiederum mit $x = u$, $y = 1$ angewendet) (30) erfüllt, so daß dann nach Satz 3 in (26) das Gleichheitszeichen gilt.

Satz 6. *Ist die reelle binäre Form m^{ten} Grades $F(x, y)$ für jedes reelle System x und y absolut $\leqq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}$, so ist sogar*

$$F^2(x, y) + \frac{1}{m^2}\left(y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \leqq (x^2+y^2)^m.$$

Beweis. Nach Satz 3 ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \leqq m^2(x^2+y^2)^{m-1},$$

also

$$\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right\}(x^2+y^2) \leqq m^2(x^2+y^2)^m,$$

folglich

$$\left(x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \leqq m^2(x^2+y^2)^m,$$

woraus die Behauptung wegen $x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y} = mF(x, y)$ folgt.

Satz 7. *Ist das reelle Polynom m^{ten} Grades $P(u)$ für jedes reelle u absolut höchstens $(1+u^2)^{\frac{1}{2}m}$, so ist für jedes reelle u sogar*

$$\sqrt{P^2(u) + \left(\frac{(u^2+1)P'(u)}{m} - uP(u)\right)^2} \leqq (1+u^2)^{\frac{m}{2}}.$$

Beweis. Die binäre Form $F(x, y) = y^m P\left(\frac{x}{y}\right)$ ist absolut $\leqq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}m}$, so daß der vorige Satz angewendet werden kann. Hierbei ist:

$$y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y} = y^m P'\left(\frac{x}{y}\right) - mxy^{m-1} P\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 y^{m-2} P'\left(\frac{x}{y}\right),$$

so daß man die Behauptung findet, wenn man $x = u$, $y = 1$ setzt.

Satz 8. *Ist*

$$f(\varphi) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \cos \mu\varphi + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu \sin \mu\varphi$$

ein reelles goniometrisches Polynom höchstens m^{ten} Grades, und ist für alle reellen φ

$$|f(\varphi)| \leqq 1,$$

so ist

$$|f'(\varphi)| \leqq m\sqrt{1-f^2(\varphi)}.$$

Vorbemerkung. Insbesondere erhält man somit die bekannte Rießsche Ungleichung

$$|f'(\varphi)| \leqq m.$$

Beweis. Man hat:

$$f(2\psi) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi)^{m-\mu} \cos 2\mu\psi$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi)^{m-\mu} \sin 2\mu\psi,$$

so daß $f(2\psi)$ ein homogenes Polynom $F(\cos\psi, \sin\psi)$ $2m^{ten}$ Grades in $\cos\psi$ und $\sin\psi$ ist. Wird $x = R\cos\psi$, $y = R\sin\psi$ gesetzt, so ist

$$F(x, y) = R^{2m} F(\cos\psi, \sin\psi) = R^{2m} f(2\psi)$$

eine binäre Form $2m^{ten}$ Grades, die absolut $\leqq (x^2+y^2)^m$ ist. Nach Satz 6 (mit $2m$ statt m angewendet) ist dann sogar

$$F^2(x, y) + \frac{1}{4m^2}\left(y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \leqq (x^2+y^2)^{2m}. \tag{31}$$

Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} = -\frac{\partial F}{\partial x} R\sin\psi + \frac{\partial F}{\partial y} R\cos\psi = -\left(y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

ist somit

$$y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial \psi} = -2R^{2m}f'(2\psi),$$

so daß aus (31) folgt:

$$R^{4m}f^2(2\psi) + \frac{1}{4m^2}\cdot 4R^{4m}f'^2(2\psi) \leqq R^{4m},$$

also, wenn 2ψ durch φ ersetzt wird:

$$f^2(\varphi) + \frac{1}{m^2}f'^2(\varphi) \leqq 1.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Satz 9. *Ist die reelle n-äre Form* $f(x_1, \ldots, x_n)$ m^{ten} *Grades für alle reellen* $x_1, \ldots, x_n$ *absolut* $\leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}m}$, *so erfüllt die Polarform für alle reellen* $y_1, \ldots, y_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ *die Ungleichung*

$$(32) \quad \left|\eta_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + \eta_n\frac{\partial f}{\partial y_n}\right| \leqq m(\eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2)^{\frac{1}{2}}(y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

Beweis. Der Satz ist für $n = 1$ trivial und für $n = 2$ schon in Satz 2 bewiesen, so daß wir $n \geqq 3$ annehmen dürfen. Durch eine geeignet gewählte von $y_1, \ldots, y_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ abhängige orthogonale Transformation wird $(y_1, \ldots, y_n)$ in $(Y_1, \ldots, Y_n)$, und $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ in $(\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_n)$ übergeführt mit

$$Y_3 = Y_4 = \ldots = Y_n = 0; \quad \mathrm{H}_3 = \mathrm{H}_4 = \ldots = \mathrm{H}_n = 0.$$

Durch diese Transformation gehen $f(x_1, \ldots, x_n)$ über in $F(X_1, \ldots, X_n)$; $f(y_1, \ldots, y_n)$ in $F(Y_1, \ldots, Y_n)$ und die Polarform $\sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu \frac{\partial f}{\partial y_\nu}$ in $\mathrm{H}_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + \mathrm{H}_2\frac{\partial F}{\partial y_2}$. Nach Voraussetzung ist

$$|F(X_1, \ldots, X_n)| = |f(x_1, \ldots, x_n)| \leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}m} = (X_1^2 + \ldots + X_n^2)^{\frac{1}{2}m},$$

also insbesondere

$$|F(X_1, X_2, 0, \ldots, 0)| \leqq (X_1^2 + X_2^2)^{\frac{1}{2}m}.$$

Nach Satz 2 ist also

$$\left|\mathrm{H}_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + \mathrm{H}_2\frac{\partial F}{\partial y_2}\right| \leqq m(\mathrm{H}_1^2 + \mathrm{H}_2^2)^{\frac{1}{2}}(Y_1^2 + Y_2^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} = m\left(\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}(m-1)},$$

woraus die Behauptung von Satz 9 folgt.

Satz 10. *Erfüllt die reelle n-äre Form* $f(x_1, \ldots, x_n)$ m^{ten} *Grades für alle reellen* $x_1, \ldots, x_n$ *die Ungleichung*

$$(33) \qquad |f(x_1, \ldots, x_n)| \leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}m},$$

so ist für jedes reelle System $(x_1, \ldots, x_n)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \leqq m^2 (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{m-1}.$$

Bemerkungen: 1. Insbesondere ist dann

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right| \leqq m (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Wendet man den obigen Satz mit $x_1 = 1$, $x_2 = \ldots = x_n = 0$ auf

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a x_1^m + m \sum_{\nu=2}^{n} b_\nu x_1^{m-1} x_2 + \ldots$$

an, so findet man, daß aus (33) folgt

$$a^2 + \sum_{\nu=2}^{n} b_\nu^2 \leqq 1.$$

3. Aus (33) folgt:

$$f^2 + \frac{1}{m^2} \sum_{i,k} \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \leqq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^m$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 2, \ldots, n;\ i < k).$$

Dies folgt aus Satz 10 auf eine Weise, die derjenigen, auf welche Satz 6 aus Satz 3 hergeleitet wurde, ganz analog ist.

Beweis. Man leitet diesen Satz aus dem vorigen ab, indem man $\eta_\nu = \dfrac{\partial f}{\partial y_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ wählt.

Satz 11: *Ist* $1 \leqq k \leqq n$, *bezeichnen* $m_1, \ldots, m_k$ *natürliche Zahlen, ist* $f_\varkappa(x_1, \ldots, x_n)$ *für* $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ *eine reelle Form* $m_\varkappa{}^{ten}$ *Grades, die für jedes reelle Zahlensystem* $x_1, \ldots, x_n$ *der Ungleichung*

$$(34) \qquad |f_\varkappa(x_1, \ldots, x_n)| \leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}m_\varkappa} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq k)$$

genügt, so hat die Funktionalmatrix

$$(35) \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} \cdots \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

für alle reellen $x_1, \ldots, x_n$ *eine Norm*

$$\leqq m_1^2 \ldots m_k^2 (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{m_1 + \ldots + m_k - k}.$$

Beweis. Nach dem verallgemeinerten Hadamardschen Determinantensatz ist die Norm der Matrix (35) höchstens

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i}\right)^2.$$

Nun ist nach Satz 10

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i}\right)^2 \leqq \prod_{\varkappa=1}^{k} m_\varkappa^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{m_\varkappa - 1}.$$

Hieraus folgt der zu beweisende Satz.

Satz 12. *Sind* $m_1, \ldots, m_n$ *natürliche Zahlen, und ist* $f_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ *für* $\nu = 1, 2, \ldots, n$ *eine reelle Form* $m_\nu{}^{ten}$ *Grades, die für alle reellen* $x_1, \ldots, x_n$ *absolut* $\leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2} m_\nu}$ *ist, so ist die Jacobische Determinante*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \textit{ absolut } \leqq m_1 \ldots m_n (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}(m_1 + \ldots + m_n - n)}.$$

Beweis. Diese Behauptung folgt unmittelbar aus dem vorigen Satz, mit $k = n$ angewendet.

Satz 13. *Ist die reelle Form* $f(x_1, \ldots, x_n)$ m^{ten} *Grades für jedes reelle Zahlensystem* $(x_1, \ldots, x_n)$ *absolut* $\leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2} m}$, *so ist die Hessesche Determinante*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_n{}^2} \end{vmatrix} \textit{ absolut } \leqq (m-1)^n m^n (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2} n (m-2)}.$$

Beweis. Man wende zunächst die erste Bemerkung von Satz 10, und dann Satz 12 mit $f_\nu(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}$ und $m_\nu = m - 1$ an.

Satz 14. *Ist die reelle Form* $f(x_1, \ldots, x_n)$ m^{ten} *Grades für alle reellen* $x_1, \ldots, x_n$ *absolut* $\leqq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2} m}$, *so ist für* $l = 1, 2, \ldots, m - 1$ *die* l^{te} *Polarform*

$$(36)\quad \left(x_{11}\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+x_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\dots \left(x_{l1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+x_{ln}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_1,\dots,x_n)$$

für jede Wahl der $l+1$ reellen Systeme $(x_{\lambda 1},\dots,x_{\lambda n})$ $(1\leqq\lambda\leqq l)$ und $(x_1,\dots,x_n)$ absolut

$$\leqq\frac{m!}{(m-l)!}\sqrt{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{m-l}\prod_{\lambda=1}^{l}(x_{\lambda 1}^2+\dots+x_{\lambda n}^2)}.$$

Beweis. Da dieser Satz für $l=1$ schon in Satz 9 bewiesen ist, dürfen wir $l\geqq 2$ voraussetzen. Es sei der Satz für $l-1$ bewiesen und für l zu beweisen. Dann ist:

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\left(x_{11}\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+x_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\dots \left(x_{l-1,1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+x_{l-1,n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_1,\dots,x_n)\right|\\ &\leqq\frac{m!}{(m-l+1)!}\sqrt{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{m-l+1}\prod_{\lambda=1}^{l-1}(x_{\lambda 1}^2+\dots+x_{\lambda n}^2)}.\end{aligned}\right.$$

Links steht der Absolutwert einer Form $(m-l+1)^{\text{ten}}$ Grades; diese Form hat als erste Polarform eine Form, die gleich (36) ist. Nach Satz 9 mit $m-l+1$ statt m angewendet, hat (36) also absolut genommen höchstens den Wert:

$$\frac{m!}{(m-l)!}\sqrt{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{m-l}\prod_{\lambda=1}^{l}(x_{\lambda 1}^2+\dots x_{\lambda n}^2)}.$$

Hiermit ist Satz 14 bewiesen.

Satz 15. *Ist $q(x_1,\dots,x_n)$ eine positiv definite quadratische Form in $x_1,\dots,x_n$ und bezeichnet $f(x_1,\dots,x_n)$ eine reelle Form m^{ten} Grades in $x_1,\dots,x_n$, die für alle reellen $x_1,\dots,x_n$ der Ungleichung*

$$(38)\qquad |f(x_1,\dots,x_n)|\leqq(q(x_1,\dots,x_n))^{\frac{1}{2}m}$$

genügt, so ist die $(m-1)^{te}$ Polarform von f:

$$(39)\quad \left(x_{11}\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+x_{1n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\dots \left(x_{m-1,1}\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+x_{m-1,n}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)f(x_1\dots x_n)$$

für jede Wahl der m reellen Systeme $(x_{\mu 1},\dots,x_{\mu n})$ $(1\leqq\mu\leqq m-1)$

und $(x_1, \ldots, x_n)$ *absolut*

$$(40) \qquad \leqq m! \sqrt{q(x_1, \ldots, x_n) \prod_{\mu=1}^{m-1} q(x_{\mu 1}, \ldots, x_{\mu n})}.$$

Beispiel mit $m = 3$, $n = 2$ und $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$: Ist beständig

$$| ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 | \leqq (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},$$

so ist stets

$$| a\xi X x + b(\xi X y + X x \eta + x \xi Y) + c(\xi Y y + X y \eta + x \eta Y) + d \eta Y y |$$
$$\leqq \sqrt{(x^2+y^2)(\xi^2+\eta^2)(X^2+Y^2)}.$$

Beweis. Durch eine geeignet gewählte lineare Transformation geht die positiv definite quadratische Form $q(x_1, \ldots, x_n)$ über in die Form $X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$. Wird dann $f(x_1, \ldots, x_n) = F(X_1, \ldots, X_n)$ gesetzt, so nimmt (38) die Gestalt

$$| F(X_1, \ldots, X_n) | \leqq (X_1^2 + \ldots + X_n^2)^{\frac{1}{2}m}$$

an, so daß nach dem vorigen Satz, mit $l = m - 1$ angewendet, beständig

$$(41) \begin{cases} \Bigg| \left(X_{11} \dfrac{\partial}{\partial X_1} + \ldots + X_{1n} \dfrac{\partial}{\partial X_n}\right) \ldots \\ \qquad \left(X_{m-1,1} \dfrac{\partial}{\partial X_1} + \ldots + X_{m-1,n} \dfrac{\partial}{\partial X_n}\right) F(X_1, \ldots, X_n) \Bigg| \leqq \\ \qquad m! \sqrt{(X_1^2 + \ldots + X_n^2) \prod_{\mu=1}^{m-1} (X_{\mu 1}^2 + \ldots + X_{\mu n}^2)} \end{cases}$$

ist. Hieraus geht die Behauptung von Satz 15 hervor, da der Absolutwert von (39) mit der linken Seite und der Ausdruck (40) mit der rechten Seite von (41) übereinstimmen.

Satz 16. *Ist* $F(x_1, y_1; \ldots; x_m, y_m)$ *die reelle Form*

$$a_0 x_1 \ldots x_m + a_1 \Sigma_1 x_1 \ldots x_{m-1} y_m + a_2 \Sigma_2 x_1 \ldots x_{m-2} y_{m-1} y_m + \ldots +$$
$$a_{m-1} \Sigma_{m-1} x_1 y_2 \ldots y_m + a_m y_1 \ldots y_m,$$

wo Σ_μ *eine Summe von* $\binom{m}{\mu}$ *Gliedern bezeichnet, z.B.:*

$$\Sigma_1 = x_1 \ldots x_{m-1} y_m + x_1 \ldots x_{m-2} y_{m-1} x_m + \ldots + y_1 x_2 \ldots x_m,$$

so nimmt $F(\cos \varphi_1, \sin \varphi_1; \ldots; \cos \varphi_m, \sin \varphi_m)$ *seinen größten Absolutwert an für ein System von Werten* $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_m$.

Beweis. Wird

$$f(x, y) = a_0 x^m + \binom{m}{1} a_1 x^{m-1} y + \dots + \binom{m}{m-1} a_{m-1} x y^{m-1} + a_m y^m$$

gesetzt, so ist $f(\cos\varphi, \sin\varphi)$ eine Funktion von φ, die einen maximalen Absolutwert M annimmt, so daß stets

$$(42) \qquad |f(\cos\varphi, \sin\varphi)| \leqq M$$

und bei geeignet gewähltem β

$$(43) \qquad |f(\cos\beta, \sin\beta)| = M$$

ist. Aus (42) folgt, daß stets

$$|f(x, y)| \leqq M (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}m}$$

ist, so daß nach dem vorigen Satz

$$|F(x_1, y_1; \dots; x_m, y_m)| \leqq M \sqrt{\prod_{\mu=1}^{m} (x_\mu^2 + y_\mu^2)}$$

ist. Folglich ist

$$|F(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1; \dots; \cos\varphi_m, \sin\varphi_m)| \leqq M,$$

so daß die linke Seite wegen (43) einen maximalen Wert annimmt für $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_m = \beta$.

Zweiter Teil.

Satz 17. *Es bezeichne* $\Sigma z_1 \dots z_\mu$ für $0 \leqq \mu \leqq m$ *die* μ^{te} *elementarsymmetrische Funktion von* $z_1, \dots, z_m$ *(also* $= 1$ *für* $\mu = 0$*), und es werde gesetzt*

$$(44) \qquad F(z_1, \dots, z_m) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \Sigma z_1 \dots z_\mu,$$

(wo die Koeffizienten a_μ *beliebig sind) und*

$$(45) \qquad \lambda_m(z_1, \dots, z_m) = \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{\binom{m}{\mu}} \Sigma z_1 \dots z_\mu.$$

Dann gilt die Identität:

$$(46) \qquad F(z_1, \dots, z_m) = \sum_{p} \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \dots, \frac{z_m}{p}\right) F(p, \dots, p),$$

wo die Summe $\sum\limits_{p}$ *erstreckt wird über die* m *verschiedenen Werte von* $p = \sqrt[m]{z_1 \dots z_m}$.

Außerdem hat man:

$$\sum_p \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) = 1. \tag{47}$$

Beweis. Für jedes Paar ganzer Zahlen ϱ und μ mit $0 \leqq \varrho \leqq m$, $0 \leqq \mu \leqq m-1$ ist

$$\begin{aligned}\sum_p p^{\varrho-\mu} &= m, \text{ falls } \varrho = \mu \\ &= m z_1 \ldots z_m, \text{ falls } \varrho = m,\ \mu = 0, \\ &= 0 \qquad \text{sonst.}\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned}\sum_p \frac{F(p, \ldots, p)}{p^\mu} &= \sum_p \frac{1}{p^\mu} \sum_{\varrho=0}^{m} a_\varrho \binom{m}{\varrho} p^\varrho \\ &= \sum_{\varrho=0}^{m} a_\varrho \binom{m}{\varrho} \sum_p p^{\varrho-\mu}\end{aligned}$$

folgt also

$$\sum_p \frac{F(p, \ldots, p)}{p^\mu} = a_\mu \binom{m}{\mu} m, \text{ falls } \mu \neq 0,$$

und

$$\sum_p \frac{F(p, \ldots, p)}{p^\mu} = a_0 m + a_m m z_1 \ldots z_m, \text{ falls } \mu = 0.$$

Wir finden nun

$$\begin{aligned}&\sum_p \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) F(p, \ldots, p) \\ &= \frac{1}{m} \sum_p \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{\binom{m}{\mu}} \left(\sum \frac{z_1 \ldots z_\mu}{p^\mu}\right) F(p, \ldots, p) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{\binom{m}{\mu}} \left(\sum z_1 \ldots z_\mu\right) \sum_p \frac{F(p, \ldots, p)}{p^\mu} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{\binom{m}{\mu}} \left(\sum z_1 \ldots z_\mu\right) \cdot a_\mu \binom{m}{\mu} m \\ &+ \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\binom{m}{0}} \cdot 1 \cdot a_m m z_1 \ldots z_m = F(z_1, \ldots, z_m),\end{aligned}$$

womit unsere Identität bewiesen ist.

Wählt man in dieser Identität $F(z_1, \ldots, z_m)$ identisch gleich Eins, so findet man (47).

HILFSSATZ 3. *Ist* $z_1 z_2 \ldots z_m = 1$, *so gilt für die in* (45) *definierten Funktionen* $\lambda_m(z_1, \ldots, z_m)$ *die Beziehung*

$$(48)\quad \lambda_m(z_1, \ldots, z_m)$$
$$= \frac{1}{m^2} \sum_\sigma \lambda_{m-1}(z_1\sigma, \ldots, z_{m-1}\sigma)\left(\sigma^{\frac{m-1}{2}} + \sigma^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + \sigma^{-\frac{m-1}{2}}\right)^2,$$

wo die Summe $\sum_\sigma$ *erstreckt wird über die* $m-1$ *verschiedenen Werte von* $\sigma = \sqrt[m-1]{z_m}$.

BEWEIS. Wird in (46) m durch $m-1$ ersetzt, so geht p über in $\sqrt[m-1]{z_1 \ldots z_{m-1}} = \frac{1}{\sigma}$. Wenn wir die so abgeänderte Identität auf $F(z_1, \ldots, z_{m-1}) = \lambda_m(z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m)$ anwenden, so finden wir

$$(49)\quad \lambda_m(z_1, \ldots, z_m) = \sum_\sigma \lambda_{m-1}(z_1\sigma, \ldots, z_{m-1}\sigma)\, \lambda_m\left(\frac{1}{\sigma}, \ldots, \frac{1}{\sigma}, z_m\right).$$

Wegen (45), mit $z_1 = \ldots = z_{m-1} = \frac{1}{\sigma}$ angewendet, ist

$$\lambda_m\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}, \ldots, \frac{1}{\sigma}, z_m\right)$$
$$= \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{\binom{m}{\mu}} \left\{ \binom{m-1}{\mu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\mu} + \binom{m-1}{\mu-1}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\mu-1} \cdot \sigma^{m-1} \right\}$$

(wo $\binom{m-1}{-1}$ die Zahl Null bezeichnet)

$$= \frac{1}{m^2} \sum_{\mu=0}^{m-1} \left\{ (m-\mu)\,\sigma^{-\mu} + \mu\,\sigma^{m-\mu} \right\}$$
$$= \frac{1}{m^2} \left\{ \sigma^{m-1} + 2\,\sigma^{m-2} + \ldots (m-1)\sigma^1 + m\,\sigma^0 + (m-1)\,\sigma^{-1} + \ldots + \sigma^{-(m-1)} \right\}$$
$$= \frac{1}{m^2} \left\{ \sigma^{\frac{m-1}{2}} + \sigma^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + \sigma^{-\frac{m-1}{2}} \right\}^2,$$

womit unser Hilfssatz bewiesen ist.

SATZ 18: *Es seien* $z_1, z_2, \ldots, z_m$ *Punkte auf dem Einheitskreise mit* $z_1 z_2 \ldots z_m = 1$.

Dann ist

$$(50)\quad \lambda_m(z_1, \ldots, z_m) \geqq 0.$$

Hierbei ist

$$\lambda_m(z_1, \ldots, z_m) = 0 \tag{51}$$

dann und nur dann, wenn

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_m = e^{\frac{2\pi i l}{m}} \qquad (1 \leqq l \leqq m-1) \tag{52}$$

ist. Außerdem hat man

$$\lambda_m(z_1, \ldots, z_m) = 1 \tag{53}$$

dann und nur dann, wenn

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_m = 1 \tag{54}$$

ist.

Beweis. Wegen $\lambda_1(1) = 1$ ist die Behauptung für $m = 1$ evident, so daß wir $m \geqq 2$ annehmen dürfen und voraussetzen können, daß der zu beweisende Satz mit $m - 1$ statt m schon bewiesen ist.

Die Identität (48) gibt nun sofort, daß stets (50) gilt, da $\sigma^{\frac{m-1}{2}} + \ldots + \sigma^{-\frac{m-1}{2}}$ hier reell ist.

Gilt (52), dann ist wegen (45)

$$\lambda_m(z_1, \ldots, z_m) = \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{\binom{m}{\mu}} \cdot \binom{m}{\mu} e^{\frac{2\pi i l \mu}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i l \mu}{m}} = 0,$$

so daß dann (51) gilt. Gilt (54), dann folgt aus (45)

$$\lambda_m(z_1, \ldots, z_m) = \frac{1}{m} \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{1}{\binom{m}{\mu}} \cdot \binom{m}{\mu} = 1.$$

Es bleibt uns noch übrig, Formel (52) aus (51) und Formel (54) aus (53) abzuleiten. Wir dürfen annehmen, daß das für $m-1$ statt m schon gelungen ist. Es werde zunächt angenommen, daß (51) gilt. Für jedes σ mit

$$\sigma^{\frac{m-1}{2}} + \sigma^{\frac{m-3}{2}} + \ldots + \sigma^{-\frac{m-1}{2}} = 0 \tag{55}$$

ist $\sigma^m - 1 = 0$. Bei gegebenem z_m gibt es also höchstens einen Wert von $\sigma = \sqrt[m-1]{z_m}$ mit der Eigenschaft (55). Wir werden jetzt zwei Fälle unterscheiden:

1. Für kein $\sigma = \sqrt[m-1]{z_m}$ gilt (55). Dann sind die $m - 1$ in (48) auftretenden Faktoren $\left(\sigma^{\frac{m-1}{2}} + \ldots + \sigma^{-\frac{m-1}{2}}\right)^2$ alle positiv. Wegen

(50) mit $m-1$ statt m angewendet und (51) ist dann in jedem Glied von (48)

$$\lambda_{m-1}(z_1\sigma, \ldots, z_{m-1}\sigma) = 0,$$

so daß wir mindestens $m-1$ verschiedene Systeme $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1})$ mit

$$\lambda_{m-1}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1}) = 0$$

finden. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es nur höchstens $m-2$ verschiedene Systeme mit dieser Eigenschaft. Dieser Fall tritt also nicht auf.

2. Es gibt ein $\sigma_0 = \sqrt[m-1]{z_m}$ mit

$$\sigma_0^{\frac{m-1}{2}} + \ldots + \sigma_0^{-\frac{m-1}{2}} = 0. \tag{56}$$

Für die übrigen in (48) auftretenden σ ist dann wiederum

$$\left(\sigma^{\frac{m-1}{2}} + \ldots + \sigma^{-\frac{m-1}{2}}\right)^2$$

positiv. Wegen (50) (wiederum mit $m-1$ statt m angewendet) und (51) ist dann für jedes in (48) vorkommende $\sigma \neq \sigma_0$

$$\lambda_{m-1}(z_1\sigma, \ldots, z_{m-1}\sigma) = 0.$$

Aus (47) (mit $m-1$ statt m angewendet) folgt dann

$$\lambda_{m-1}(z_1\sigma_0, \ldots, z_{m-1}\sigma_0) = 1. \tag{57}$$

Wegen (56) ist

$$\sigma_0 = e^{-\frac{2\pi i l}{m}} \text{ mit } 1 \leqq l \leqq m-1.$$

Aus (57) folgt mit Rücksicht auf die Induktionsvoraussetzung

$$z_1\sigma_0 = \ldots = z_{m-1}\sigma_0 = 1,$$

also

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_{m-1} = e^{\frac{2\pi i l}{m}}.$$

Wegen $z_1 z_2 \ldots z_m = 1$ ist dann auch $z_m = e^{\frac{2\pi i l}{m}}$, womit bewiesen ist, daß (52) aus (51) folgt.

Schließlich werde vorausgesetzt, daß (53) gilt. Wegen (47) und (50) ist dann

$$\lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) = 0$$

für jedes $p = \sqrt[m]{1}$ mit $p \neq 1$. Dann gilt (51), also auch (52), wenn z_μ durch $\frac{z_\mu}{p}$ ersetzt wird, also

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_m = pe^{\frac{2\pi i h}{m}} \qquad (1 \leqq h \leqq m-1).$$

Wäre $z_1 \neq 1$, dann wäre $z_1 = e^{\frac{2\pi i l}{m}}$ mit $1 \leqq l \leqq m-1$, also

$$\lambda_m(z_1, \ldots, z_m) = 0,$$

in Widerspruch mit (53). Folglich ist

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_m = 1,$$

womit alles bewiesen ist.

Satz 19. *Ist $f(z)$ ein Polynom höchstens m^{ten} Grades, und liegen z und s auf dem Einheitskreise, so ist*

$$mf(z) - zf'(z) + sf'(z) = m \sum_p \lambda_m\left(\frac{z}{p}, \ldots, \frac{z}{p}, \frac{s}{p}\right) f(p), \tag{58}$$

wo die Summe $\sum\limits_p$ erstreckt wird über die m verschiedenen Werte von $p = \sqrt[m]{z^{m-1}s}$.

Vorbemerkung. Aus (47) folgt, daß die Summe der m Koeffizienten $\lambda_m\left(\frac{z}{p}, \ldots, \frac{z}{p}, \frac{s}{p}\right)$ gleich 1 ist.

Nach Satz 18 sind diese Koeffizienten alle $\geqq 0$, und sogar positiv wenn $z \neq s$ ist. Ist $z = s$, so ist der Koeffizient $\lambda_m\left(\frac{z}{p}, \ldots, \frac{z}{p}, \frac{s}{p}\right)$ mit $p = z = s$ gleich 1 und sind die $m-1$ übrigen Koeffizienten alle gleich Null.

Beweis. Es werde

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \binom{m}{\mu} z^\mu$$

gesetzt, so daß für die in (44) definierte Funktion $F(z_1, \ldots, z_n)$ die Beziehung

$$F(z, \ldots, z) = f(z)$$

gilt. Außerdem hat man

$$\begin{aligned} F(z, \ldots, z, s) &= \sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu \left\{\binom{m-1}{\mu} z^\mu + \binom{m-1}{\mu-1} z^{\mu-1} s\right\} \\ &= \sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu \binom{m}{\mu} z^\mu - \sum_{\mu=1}^{m-1} a_\mu \binom{m-1}{\mu-1} z^\mu + \sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu \binom{m-1}{\mu-1} z^{\mu-1} s \\ &= f(z) - \frac{z}{m} f'(z) + \frac{s}{m} f'(z). \end{aligned}$$

Nach unserer Identität (46) ist somit

$$\begin{aligned} mf(z) - zf'(z) + sf'(z) &= mF(z, \ldots, z, s) \\ &= m\sum_p \lambda_m\left(\frac{z}{p}, \ldots, \frac{z}{p}, \frac{s}{p}\right) F(p, \ldots, p) \\ &= m\sum_p \lambda_m\left(\frac{z}{p}, \ldots, \frac{z}{p}, \frac{s}{p}\right) f(p), \end{aligned}$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Hat das reelle trigonometrische Polynom höchstens m^{ten} Grades $F(\varphi)$ für alle reellen φ ein konstantes Vorzeichen, und ist*

$$F\left(\varphi_0 + \frac{\mu \cdot 2\pi}{m}\right) = 0 \text{ für } \mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

so hat $F(\varphi)$ die Gestalt

$$a \cos m\varphi + b \sin m\varphi + c,$$

wo a, b und c reelle Konstanten bezeichnen.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, daß $F(\varphi)$ und $F'(\varphi)$ in den m Punkten $\varphi_0 + \frac{\mu \cdot 2\pi}{m}$ verschwinden. Durch diese Eigenschaft ist das trigonometrische Polynom $F(\varphi)$ m^{ten} Grades bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, da jetzt $2m$ Nullpunkte bekannt sind. Da $1 - \cos m(\varphi - \varphi_0)$ die genannte Eigenschaft besitzt, ist

$$F(\varphi) = C(1 - \cos m(\varphi - \varphi_0)) = a \cos m\varphi + b \sin m\varphi + c.$$

Hilfssatz 5. *Wird die Halbebene H begrenzt durch eine Gerade G, gehören die Werte des Polynoms $f(z)$ höchstens m^{ten} Grades für jedes auf dem Einheitskreise liegende z der Halbebene H an, und liegen bei geeignet auf dem Einheitskreise gewähltem z die m Punkte $f(p)$, wo p die m verschiedenen Werte von $\sqrt[m]{z}$ bezeichnet, auf der Geraden G, so hat $f(z)$ die Gestalt*

$$f(z) = Az^m + B.$$

Beweis. Durch eine geeignet gewählte lineare Transformation

$$W = \alpha w + \beta \qquad (\text{mit } \alpha \neq 0)$$

geht die in der w-Ebene liegende Halbebene H über in die Halbebene $U \geqq 0$, wo $W = U + iV$ gesetzt wird.

Die Funktion

$$\alpha f(z) + \beta$$

hat dann einen nicht-negativen reellen Teil, und in den m Punkten p ist dieser reelle Teil gleich Null. Wird $z = e^{i\varphi}$, $z_0 = e^{i\varphi_0}$ und

$$\alpha f(z) + \beta = F(\varphi) + iK(\varphi)$$

gesetzt, dann ist $F(\varphi)$ ein trigonometrisches Polynom in φ höchstens m^{ten} Grades, das $\geqq 0$ ist und in den m Punkten $\varphi = \frac{\varphi_0 + 2h\pi}{m}$ $(0 \leqq h \leqq m-1)$ verschwindet.

Nach dem vorigen Hilfssatz ist nun

$$F(\varphi) = a \cos m\varphi + b \sin m\varphi + c.$$

Hieraus geht hervor

$$K(\varphi) = a \sin m\varphi - b \cos m\varphi + d,$$

also

$$\alpha f(z) + \beta = (a - ib) z^m + c + id.$$

Wegen $\alpha \neq 0$ folgt hieraus, daß $f(z)$ die angegebene Gestalt besitzt.

Satz 20. *Ist $f(z)$ ein Polynom höchstens m^{ten} Grades, dessen Werte für jedes auf dem Einheitskreis E liegende z zu einer konvexen Menge M gehören, so besitzt jedes auf E liegende z die Eigenschaft, daß der Punkt $\zeta = f(z) - \frac{z}{m} f'(z)$ der Menge M angehört und vom Rande R von M eine Entfernung $\geqq \frac{|f'(z)|}{m}$ besitzt.*

Hat das Polynom $f(z)$ die Gestalt

$$f(z) = A z^m + B,$$

wo B ein Punkt von M ist, dessen Abstand von R gerade gleich $|A|$ ist, dann ist für jedes z auf E die Entfernung des ζ von R genau gleich $\frac{1}{m} |f'(z)|$. Hat $f(z)$ nicht diese Gestalt, so hat ζ von R dann und nur dann den Abstand $\frac{1}{m} |f'(z)|$, wenn $f(z)$ ein Randpunkt von M ist.

Beweis. Wir wenden Satz 19 an. Da für jedes in (58) auftretende p der Punkt $f(p)$ der konvexen Menge M angehört, folgt aus Satz 19 mit der zugehörigen Vorbemerkung, daß auch $f(z) - \frac{z}{m} f'(z) + \frac{s}{m} f'(z)$ dieser Menge angehört, und zwar für jedes auf E liegende Punktepaar (z, s). Hieraus folgt, daß die konvexe Menge M den Kreis K enthält mit dem Mittelpunkte $\zeta = f(z) - \frac{z}{m} f'(z)$ und mit dem Halbmesser $\frac{1}{m} | f'(z) |$; denn durchläuft s den Einheitskreis, so durchläuft $f(z) - \frac{z}{m} f'(z) + \frac{s}{m} f'(z)$ die Peripherie des Kreises K. Hiermit ist bewiesen, daß ζ der Menge M angehört und vom Rande R von M eine Entfernung $\geqq \frac{1}{m} | f'(z) |$ besitzt.

Hat $f(z)$ die Gestalt

$$f(z) = A z^m + B,$$

wo B ein Punkt von M ist, dessen Abstand von R gerade gleich $| A |$ ist, so ist

$$\zeta = f(z) - \frac{z}{m} f'(z) = B,$$

so daß dann die Entfernung des ζ vom Rande R gerade gleich $| A | = \frac{1}{m} |f'(z)|$ ist.

Wir dürfen also jetzt annehmen, daß $f(z)$ diese Gestalt nicht besitzt. Für jedes z auf E mit der Eigenschaft, daß $f(z)$ ein Randpunkt von M ist, hat $\zeta = f(z) - \frac{z}{m} f'(z)$ von diesem Randpunkte eine Entfernung $= \frac{1}{m} | f'(z) |$. Die Entfernung des ζ vom Rande R, die nach dem Obigen nicht kleiner als $\frac{1}{m} | f'(z) |$ sein kann, ist also in diesem Falle gerade gleich $\frac{1}{m} | f'(z) |$.

Wir müssen nun noch unter der Voraussetzung, daß ζ von R einen Abstand $\frac{1}{m} | f'(z) |$ besitzt, beweisen, daß $f(z)$ ein Randpunkt von M ist. Bei geeignet gewähltem auf E liegendem s ist dann der Punkt $f(z) - \frac{z}{m} f'(z) + \frac{s}{m} f'(z)$ ein Randpunkt w von M. Dieser Randpunkt w kann nach Satz 19 auf die Gestalt

$$w = \sum_p \lambda_m\left(\frac{z}{p}, \ldots, \frac{z}{p}, \frac{s}{p}\right) f(p) \tag{59}$$

gebracht werden, wo die Summe erstreckt wird über die m Werte von $p = \sqrt[m]{z^{m-1} s}$.

Es bezeichne G eine (eventuell die) durch w gehende Stützgerade von M. Wie unterscheiden jetzt zwei verschiedene Fälle:

1. Es mögen die in (59) genannten Punkte $f(p)$ alle auf der

Stützgeraden G liegen. Für jedes z auf E gehört $f(z)$ zu der Menge M, also auch zu der durch G begrenzten Halbebene H, die M enthält. Nach Hilfssatz 5 hat $f(z)$ dann die Gestalt $f(z)=Az^m+B$. Nach unserer Voraussetzung ist es dann ausgeschlossen, daß B ein Punkt von M ist, dessen Entfernung von R gerade gleich $|A|$ ist. Der Punkt $\zeta=f(z)-\frac{1}{m}f'(z)$ fällt dann mit B zusammen, und man hat $\frac{1}{m}|f'(z)|=|A|$, so daß dann ζ vom Rande R eine Entfernung $\neq\frac{1}{m}|f'(z)|$, also $>\frac{1}{m}|f'(z)|$ besitzt. Hiermit ist bewiesen, daß dieser Fall nicht auftritt.

2. Es liegen die in (59) genannten Punkte $f(p)$ nicht alle auf G. Diese Punkte liegen alle in der Halbebene H. Wären alle in (59) auftretenden Koeffizienten $\lambda_m\left(\frac{z}{p},\ldots,\frac{z}{p},\frac{s}{p}\right)$ positiv, dann läge der in (59) genannte Punkt w in der offenen Halbebene H, was nicht der Fall ist, da w ein Punkt von G ist. Folglich ist wenigstens einer der Koeffizienten $\lambda_m\left(\frac{z}{p},\ldots,\frac{z}{p},\frac{s}{p}\right)$ gleich Null, so daß nach Satz 18 die Beziehung $z=s$ gilt. Nach unserer Annahme ist der Punkt

$$f(z)-\frac{z}{m}f'(z)+\frac{s}{m}f'(z)=f(z)$$

ein Randpunkt von M, womit alles bewiesen ist.

Die Sätze 21, 22 ,23 und 24 sind Spezialfälle des obigen Satzes. In Satz 21 wählen wir für M einen Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkt zusammenfällt, und in den drei übrigen Sätzen ist M eine Halbebene.

Satz 21: *Ist $f(z)$ ein Polynom höchstens m^{ten} Grades, das überall auf dem Einheitskreise E einen Absolutwert $\leqq 1$ besitzt, so ist auf E*

$$\left|f(z)-\frac{z}{m}f'(z)\right|+\frac{1}{m}|f'(z)|\leqq 1. \tag{60}$$

Hat $f(z)$ die Gestalt

$$f(z)=Az^m+B \qquad \textit{mit} \qquad |A|+|B|=1, \tag{61}$$

so gilt in (60) das Gleichheitszeichen für jedes z auf E. Hat $f(z)$ nicht diese Gestalt, so gilt in (60) für ein auf E liegendes z das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $|f(z)|=1$ ist.

Bemerkung: Insbesondere findet man das Rieszsche Ergebnis, nach dem unter den genannten Voraussetzungen $|f'(z)|\leqq m$ ist.

Beweis. Wir können hier den vorigen Satz anwenden, wobei M den Rand und das Innere des Einheitskreises E bezeichnet. Der Punkt $\zeta = f(z) - \frac{z}{m} f'(z)$ gehört somit der Kreisfläche M an, und hat vom Einheitskreis einen Abstand $\geqq \frac{1}{m} | f'(z) |$, womit (60) bewiesen ist.

Hat $f(z)$ die in (61) angegebene Gestalt, so hat die linke Seite von (60) den Wert $|B| + |A| = 1$, so daß dann in (60) stets das Gleichheitszeichen gilt. Hat $f(z)$ diese Gestalt nicht, so gilt nach dem vorigen Satz in (60) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $f(z)$ ein Randpunkt von M, d.h. $|f(z)| = 1$ ist.

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Satz 22. *Ist $f(z)$ ein Polynom höchstens m^{ten} Grades, dessen reeller Teil $\Re f(z)$ auf dem Einheitskreise E beständig $\leqq K$ ist, dann ist auf E stets*

$$\Re\left(f(z) - \frac{z}{m} f'(z)\right) + \frac{1}{m} | f'(z) | \leqq K. \tag{62}$$

Hat $f(z)$ die Gestalt

$$f(z) = A z^m + B \qquad \text{mit} \quad |A| + \Re B = K,$$

so gilt in (62) für jedes z auf E das Gleichheitszeichen. Hat $f(z)$ nicht diese Gestalt, so gilt für ein auf E liegendes z das Gleichheitszeichen in (62) dann und nur dann, wenn $\Re f(z) = K$ ist.

Beweis. Diese Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 20, wenn M die Halbebene $\Re w \leqq K$ bezeichnet.

Satz 23. *Ist $f(z)$ ein Polynom höchstens m^{ten} Grades, dessen reeller Teil auf dem Einheitskreise E beständig $\geqq K$ ist, so ist auf E stets*

$$\Re\left(f(z) - \frac{z}{m} f'(z)\right) - \frac{1}{m} | f'(z) | \geqq K. \tag{63}$$

Hat $f(z)$ die Gestalt

$$f(z) = A z^m + B \quad \text{mit} \quad -|A| + \Re B = K,$$

so gilt in (63) für jedes z auf E das Gleichheitszeichen. Hat $f(z)$ nicht diese Gestalt, dann gilt für ein auf E liegendes z das Gleichheitszeichen in (63) dann und nur dann, wenn $\Re f(z) = K$ ist.

Beweis. Diese Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 20, wenn M die Halbebene $\Re w \geqq K$ bezeichnet.

Satz 24. *Es sei $f(z)$ ein Polynom höchstens m^{ten} Grades, das* *auf dem Einheitskreise E nirgends verschwindet und dort ein Argument* $\geqq K - \frac{\pi}{2}$ *und* $\leqq K + \frac{\pi}{2}$ *besitzt.*

Behauptungen. 1. *Für jedes z auf E ist $mf(z) - zf'(z) \neq 0$ und*

$$(64)\qquad |f'(z)| \leqq |mf(z) - zf'(z)|.$$

2. *Bezeichnet $\omega(z)$ den im Intervall $0 \leqq \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ liegenden Winkel mit*

$$(65)\qquad \cos \omega(z) = \frac{|f'(z)|}{|mf(z) - zf'(z)|},$$

so gilt auf E die Ungleichung

$$K - \omega(z) \leqq \arg\big(mf(z) - zf'(z)\big) \leqq K + \omega(z).$$

3. *Hat $f(z)$ die Gestalt*

$$(66)\quad f(z) = A z^m + B \text{ mit } |A| \leqq |B| \text{ und } \arg B - \arccos \frac{|A|}{|B|} = K,$$

so ist überall auf E

$$(67)\qquad \arg\big(mf(z) - zf'(z)\big) = K + \omega(z).$$

Hat $f(z)$ nicht diese Gestalt, so gilt (67) für einen auf E liegenden Punkt z dann und nur dann, wenn $\arg f(z) = K + \frac{\pi}{2}$ ist.

4. *Hat $f(z)$ die Gestalt*

$$f(z) = A z^m + B \text{ mit } |A| \leqq |B| \text{ und } \arg B + \arccos \frac{|A|}{|B|} = K,$$

so ist überall auf E

$$(68)\qquad \arg\big(mf(z) - zf'(z)\big) = K - \omega(z).$$

Hat $f(z)$ nicht diese Gestalt, so gilt (68) für einen auf E liegenden Punkt z dann und nur dann, wenn $\arg f(z) = K - \frac{\pi}{2}$ ist.

Beweis. 1. Wir wenden Satz 20 an, wobei M die Halbebene bezeichnet, gebildet durch die Punkte z mit $K - \frac{\pi}{2} \leqq \arg z \leqq K + \frac{\pi}{2}$ (den Nullpunkt rechnen wir noch zu M). Der genannte Satz besagt, daß der Punkt $\zeta = f(z) - \frac{z}{m} f'(z)$ dieser Halbebene angehört und vom Rande von M einen Abstand $\geqq \frac{1}{m} |f'(z)|$ besitzt. Hieraus folgt (64), da ζ vom Nullpunkt einen Abstand $\left| f(z) - \frac{z}{m} f'(z) \right|$ hat; wäre $mf(z) - zf'(z) = 0$, so wäre wegen (64) $f'(z) = 0$, also $f(z) = 0$, was ausgeschlossen ist.

2. Beim Beweis der zweiten Behauptung dürfen wir $\arg \zeta \neq K$ annehmen. Der Kreis C mit dem Mittelpunkt ζ und dem Radius $\frac{1}{m}|f'(z)|$ gehört der Halbebene M an, so daß durch den Nullpunkt zwei in M liegende Tangenten an C gezogen werden können. Der Radiusvektor von ζ bildet mit diesen Tangenten einen Winkel gleich $\frac{\pi}{2} - \omega(z)$, so daß die Argumente der Berührungspunkte die Werte $\arg \zeta \pm \left(\frac{\pi}{2} - \omega(z)\right)$ besitzen. Folglich ist

$$\arg \zeta + \left(\frac{\pi}{2} - \omega(z)\right) \leqq K + \frac{\pi}{2} \text{ und } \arg \zeta - \left(\frac{\pi}{2} - \omega(z)\right) \geqq K - \frac{\pi}{2},$$

womit die zweite Behauptung bewiesen ist.

3. Hat $f(z)$ die in (66) angegebene Gestalt, so ist für jedes auf E liegende z

$$mf(z) - zf'(z) = mB \quad \text{und} \quad |f'(z)| = m|A|,$$

also

$$\omega(z) = \arccos \frac{|A|}{|B|},$$

so daß aus (66) hervorgeht

$$\arg \left(mf(z) - zf'(z)\right) = \arg B = \omega(z) + K,$$

woraus (67) folgt.

Es habe $f(z)$ nicht die in (66) angegebene Gestalt. Ist $\arg f(z) = K + \frac{\pi}{2}$, so ist $f(z)$ ein Randpunkt der Halbebene M, so daß nach Satz 20 der Punkt ζ vom Rande R dieser Halbebene einen Abstand $\frac{1}{m}|f'(z)|$ besitzt. Da die Verbindungsgerade von ζ und $f(z)$ die Länge $\frac{1}{m}|f'(z)|$ hat, steht diese Verbindungsgerade senkrecht auf dem Rande R der Halbebene. Diese Verbindungsgerade bildet also mit diesem Rande und mit dem Radiusvektor von ζ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Winkel beim Nullpunkt $\frac{\pi}{2} - \omega(z)$ ist. Da $f(z)$ das Argument $K + \frac{\pi}{2}$ hat, hat also ζ das Argument $K + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \omega(z)\right) = K + \omega(z)$.

Es sei jetzt umgekehrt gegeben, daß $\arg \zeta = K + \omega(z)$ ist. Der Abstand zwischen $f(z)$ und dem Nullpunkt ist $|\zeta| \sin \omega(z)$, so daß $\omega(z) \neq 0$ ist. Der Abstand des ζ vom Rande von M ist $|\zeta| \cos \omega(z) = \frac{1}{m}|f'(z)|$. Nach Satz 20 ist $f(z)$ dann ein Randpunkt von M, so daß $\arg f(z) = K \pm \frac{\pi}{2}$ ist. Wäre $\arg f(z) = K - \frac{\pi}{2}$, so fände man $\left(\text{auf dieselbe Weise wie oben, mit } K - \frac{\pi}{2} \text{ statt } K + \frac{\pi}{2}\right)$ $\arg \zeta = K - \omega(z)$, was wegen $\omega(z) \neq 0$ der Annahme $\arg \zeta = K + \omega(z)$ widerspricht. Folglich ist $\arg f(z) = K + \frac{\pi}{2}$, womit die dritte Behauptung bewiesen ist.

4. Der Beweis der vierten Behauptung ist analog dem der dritten Behauptung.

Satz 25. *Ist* $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$, *und bezeichnet* $f(z)$ *ein Polynom höchstens* m^{ten} *Grades, dessen Argument auf dem Einheitskreise* E $\geqq L - \alpha$ *und* $\leqq L + \alpha$ *ist, so ist für jedes auf* E *liegende* z:

$$|f'(z)| \leqq |mf(z) - zf'(z)| \sin \alpha . \tag{69}$$

Hierin gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $f(z)$ *die Gestalt*

$$f(z) = A z^m + B$$

mit $\arg B = L$ *und* $|A| = |B| \sin \alpha$ *hat; hat* $f(z)$ *diese Gestalt, so gilt in* (69) *das Gleichheitszeichen für alle auf* E *liegende Punkte* z.

Beweis. Nach dem vorigen Satz, mit $K + \frac{\pi}{2} = L + \alpha$ angewendet, ist

$$\arg \left(mf(z) - zf'(z)\right) \leqq L + \alpha - \frac{\pi}{2} + \omega(z), \tag{70}$$

wo

$$\omega(z) = \arc \cos \frac{|f'(z)|}{|mf(z) - zf'(z)|}$$

ist. Nach demselben Satz, mit $K - \frac{\pi}{2} = L - \alpha$ angewendet, ist

$$\arg \left(mf(z) - zf'(z)\right) \geqq L - \alpha + \frac{\pi}{2} - \omega(z). \tag{71}$$

Aus (70) und (71) folgt:

$$\omega(z) \geqq \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

also

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= |mf(z) - zf'(z)| \cos \omega(z) \\ &\leqq |mf(z) - zf'(z)| \sin \alpha \end{aligned}$$

womit (69) bewiesen ist.

Gilt in (69) das Gleichheitszeichen, so gilt auch in (70) und (71) das Gleichheitszeichen. Hat $f(z)$ nicht die Gestalt $Az^m + B$, so findet man mittels des vorigen Satzes (wieder mit $K + \frac{\pi}{2} = L - \alpha$, bzw. $K - \frac{\pi}{2} = L + \alpha$ angewendet), daß $\arg f(z) = L - \alpha$ und zugleich $\arg f(z) = L + \alpha$ ist; hieraus würde folgen $\alpha = 0$, so daß das Argument von $f(z)$ für jedes auf E liegende z den Wert L haben würde. Aber dann wäre das Polynom $f(z)$ konstant und hätte also doch die Gestalt $Az^m + B$.

Wir finden somit, daß, wenn in (69) das Gleichheitszeichen gilt, $f(z)$ die Gestalt $Az^m + B$ hat. Dann ist

$$mf(z) - f'(z) = mB \quad \text{und} \quad |f'(z)| = m|A|,$$

so daß aus (69) (wo das Gleichheitszeichen gilt) folgt:

$$|A| = |B| \sin \alpha.$$

Durchläuft z den Einheitskreis, so sind die extremen Werte von $\arg(Az^m + B)$ gleich $\arg B \pm \arcsin \frac{|A|}{|B|} = \arg B \pm \alpha$. Dieses Argument ist nach dem vorigen Satz $\geqq L - \alpha$ und $\leqq L + \alpha$, so daß $\arg B = L$ ist. Hiermit ist alles bewiesen, da die Schlußbehauptung evident ist.

Satz 26. *Es werde gesetzt*

$$(72) \qquad L(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \sum z_1 \ldots z_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu \sum z_1^{-1} \ldots z_\mu^{-1},$$

und es bezeichne $\lambda_m(z_1, \ldots, z_m)$ die in (45) definierte Funktion.

Liegen die m Punkte $z_1, \ldots, z_m$ auf dem Einheitskreise E, so ist

$$(73) \qquad L(z_1, \ldots, z_m) = \sum_p \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) L(p, \ldots, p),$$

wo die Summe $\sum_p$ erstreckt wird über die m verschiedenen Werte von $p = \sqrt[m]{z_1 \ldots z_m}$.

Vorbemerkung. Hier gilt dieselbe Vorbemerkung wie in Satz 19.

Beweis. Wir können setzen:

$$L(z_1, \ldots, z_m) = F(z_1, \ldots, z_m) + G\left(\frac{1}{z_1}, \ldots, \frac{1}{z_m}\right),$$

wo F und G geeignet gewählte Polynome bezeichnen.

Nach unserer in Satz 17 abgeleiteten Identität, mit $\overline{G}$ statt

F angewendet, (mit $\overline{G}$ meinen wir die zu G konjugiert komplexe Funktion) ist:

$$\overline{G}(z_1, \ldots, z_m) = \sum_p \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) \overline{G}(p, \ldots, p).$$

Ersetzt man hierin i durch $-i$, so ändert sich die nach Satz 18 reelle Zahl $\lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right)$ nicht, so daß dann folgt:

$$(74) \qquad G(z_1^{-1}, \ldots, z_m^{-1}) = \sum_p \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) G(p^{-1}, \ldots, p^{-1}),$$

da für ein auf E liegendes z die konjugiert komplexe Zahl zu z den Wert z^{-1} hat.

Aus (74) und unserer Identität (46) folgt die Behauptung.

Satz 27. *Es sei $L(z_1, \ldots, z_n)$ das in (72) definierte Laurentpolynom, und es werde*

$$(75) \qquad L(z, \ldots, z) = l(z)$$

gesetzt. Gehört $l(z)$ für jedes z auf dem Einheitskreise E einer konvexen Menge an, so gehört für jedes System von auf E liegenden Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_m$ auch das Laurentpolynom $L(z_1, \ldots, z_m)$ dieser Menge M an.

Beweis. Wir wenden den vorigen Satz an. Da für jedes in (73) auftretende p die Zahl $L(p, \ldots, p) = l(p)$ der konvexen Menge M angehört, folgt aus Satz 26 mit der zugehörigen Vorbemerkung, daß auch $L(z_1, \ldots, z_m)$ dieser Menge angehört.

Satz 28. *Besitzt das Polynom*

$$F(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{\mu=0}^{m} c_\mu \sum z_1 \ldots z_\mu$$

die Eigenschaft, daß für jedes auf dem Einheitskreise E liegende z der Punkt $F(z, \ldots, z)$ einer konvexen Menge M angehört, so enthält diese Menge alle Punkte $F(z_1, \ldots, z_m)$, wo $z_1, \ldots, z_m$ beliebige Punkte auf E bezeichnen.

Ist $F(z_1, \ldots, z_m)$ nicht identisch gleich

$$c_m z_1 \ldots z_m + c_0,$$

und werden auf E die m Punkte $z_1, \ldots, z_m$ so gewählt, daß $F(z_1, \ldots, z_m)$ ein Randpunkt von M ist, so fallen die m Punkte $z_1, \ldots, z_m$ zusammen.

Beweis. Die erste Behauptung ist ein Spezialfall von Satz 27.

Es werde jetzt angenommen, daß $F(z_1, \ldots, z_m)$ nicht identisch gleich $c_m z_1 \ldots z_m + c_0$ ist, und daß auf E die m Punkte $z_1, \ldots, z_m$ so gewählt sind, daß $F(z_1, \ldots, z_m)$ ein Randpunkt r von M ist. Es bezeichne G eine (eventuell die) durch r gehende Stützgerade von M.

Wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle:

1. Es mögen die m in (46) auftretenden Punkte $F(p, \ldots, p)$ alle auf der Stützgeraden G liegen. Für jedes z auf E gehört $F(z, \ldots, z)$ zu der Menge M, also auch zu der durch G begrenzten abgeschlossenen Halbebene, die M enthält. Nach Hilfssatz 5 hat dann $F(z, \ldots, z)$ die Gestalt $A z^m + B$, also $F(z_1, \ldots, z_m)$ die Gestalt $A z_1 \ldots z_m + B$, und dieses haben wir ausgeschlossen.

2. Es liegen die in (46) genannten Punkte $F(p, \ldots, p)$ nicht alle auf der Stützgeraden G. Diese Punkte liegen alle in der abgeschlossenen Halbebene H. Wären alle in (46) auftretende Koeffizienten $\lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right)$ positiv, so läge der Randpunkt

$$r = \sum_p \lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right) F(p, \ldots, p)$$

von M in der offenen Halbebene H, was nicht der Fall ist. Folglich ist wenigstens eine der m Zahlen $\lambda_m\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_m}{p}\right)$ gleich Null, so daß nach Satz 18 die m Werte $z_1, \ldots, z_m$ zusammenfallen. Hiermit ist alles bewiesen.

Satz 29. *Es werde für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$*

$$F_\varrho(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \sum_{\mu=0}^{m} a_{\varrho\mu} \Sigma \cos(\varphi_1 + \ldots + \varphi_\mu) + \sum_{\mu=1}^{m} b_{\varrho\mu} \Sigma \sin(\varphi_1 + \ldots + \varphi_\mu)$$

gesetzt, wo $a_{\varrho\mu}$ und $b_{\varrho\mu}$ reelle Zahlen bezeichnen. Ist $\omega(u_1, \ldots, u_r)$ eine reelle Funktion der Variabeln $u_1, \ldots, u_r$, die für alle reellen Systeme $(u_1, \ldots, u_r)$ definiert ist, gilt für jedes reelle φ die Ungleichung

$$\omega(F_1(\varphi, \ldots, \varphi), \ldots, F_r(\varphi, \ldots, \varphi)) \leqq K,$$

und bilden die Punkte $(u_1, \ldots, u_r)$ mit $\omega(u_1, \ldots, u_r) \leqq K$ eine konvexe Menge M, so gilt für jedes reelle System $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ die Ungleichung:

$$\omega(F_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_m), \ldots, F_r(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)) \leqq K. \tag{76}$$

Beweis. Wir wenden die Identität (46) von Satz 17 an (mit

$a_\mu = a_{\varrho\mu} - i b_{\varrho\mu}$, $z_\varrho = e^{i\varphi_\varrho}$) und nehmen auf beiden Seiten den reellen Teil. Setzen wir dabei $\frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m}{m} = s$, so finden wir für $\varrho = 1, 2, \ldots, r$

$$(77) \quad F_\varrho(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) =$$

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} \lambda_m \left(e^{i\left(\varphi_1 - s - \mu \cdot \frac{2\pi}{m}\right)}, \ldots, e^{i\left(\varphi_m - s - \mu \cdot \frac{2\pi}{m}\right)}\right) F_\varrho\left(s + \frac{\mu \cdot 2\pi}{m}, \ldots, s + \frac{\mu \cdot 2\pi}{m}\right).$$

Die hier auftretenden Koeffizienten λ_m sind nach Satz 18 alle $\geqq 0$ und haben nach Formel (47) von Satz 17 eine Summe gleich Eins.

Die konvexe Menge M enthält nach unserer Voraussetzung die m Punkte:

$$F_1\left(s + \frac{\mu \cdot 2\pi}{m}, \ldots, s + \frac{\mu \cdot 2\pi}{m}\right), \ldots, F_r\left(s + \frac{\mu \cdot 2\pi}{m}, \ldots, s + \frac{\mu \cdot 2\pi}{m}\right)$$
$$(\mu = 0, 1, \ldots, m-1),$$

so daß mit Rücksicht auf (77) diese Menge auch stets den Punkt

$$F_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_m), \ldots, F_r(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$$

enthält. Hieraus folgt die Ungleichung (76).

Satz 30. *Sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes erfüllt, besitzt die Funktion $\omega(u_1, \ldots, u_r)$ nirgends ein relatives Maximum, und ist es unmöglich, r reelle Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$, von denen wenigstens eine von Null verschieden ist, so zu bestimmen, daß $\gamma_1 F_1(\varphi, \ldots, \varphi) + \ldots + \gamma_r F_r(\varphi, \ldots, \varphi)$ identisch gleich $a \cos m\varphi + b \sin m\varphi + c$ ist, so gilt in (76) das Ungleichheitszeichen, wenn die Zahlen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ nicht alle untereinander gleich sind.*

Beweis. Unter der Annahme, daß in (76) das Gleichheitszeichen gilt für ein System $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, wobei die $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ nicht alle untereinander gleich sind, werden wir einen Widerspruch ableiten.

Nach dem vorigen Satz gehört der Punkt w mit den Koordinaten $F_\varrho(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$ zur konvexen Menge M. Wäre w ein innerer Punkt von M, so wäre in einer geeignet gewählten Umgebung von w

$$\omega(u_1, \ldots, u_r) \leqq K,$$

in Widerspruch mit der Voraussetzung, daß $\omega(u_1, \ldots, u_r)$ nirgends ein relatives Maximum besitzt. Folglich ist w ein Randpunkt von M. Im $(u_1, \ldots, u_r)$-Raum legen wir durch w eine (eventuell die)

Stützhyperebene S von M; es sei H der durch S begrenzte m-dimensionale Halbraum, der M enthält.

Wir wenden wiederum die Identität (77) an. Die m Punkte

$$(78)\quad \left(F_1\left(s+\frac{2\pi\mu}{m},\ldots,s+\frac{2\pi\mu}{m}\right),\ldots,\ F_r\left(s+\frac{2\pi\mu}{m},\ldots,s+\frac{2\pi\mu}{m}\right)\right),$$

wo μ das System $0, 1, \ldots, m-1$ durchläuft und s die Zahl $\frac{1}{m}(\varphi_1+\cdots+\varphi_m)$ bezeichnet, gehören alle zur konvexen Menge M, also zum abgeschlossener Halbraum H. Außerdem wissen wir nach Satz 18, daß alle in der Identität (77) vorkommenden Koeffizienten λ_m hier positiv sind. Hieraus folgt: lägen die m in (78) genannten Punkte nicht alle in der Stützhyperebene S, so läge der Punkt w im offenen Halbraum H. Aber das ist ausgeschlossen, da w in S liegt. Folglich liegen die m in (78) erwähnten Punkte alle in der Stützhyperebene. Ist

$$\sum_{\varrho=1}^{r}\gamma_\varrho u_\varrho=\delta$$

die Gleichung dieser Stützhyperebene, so ist somit, wenn

$$\sum_{\varrho=1}^{r}\gamma_\varrho F_\varrho(\varphi,\ldots,\varphi)-\delta=F(\varphi)$$

gesetzt wird, $F(\varphi)$ ein trigonometrisches Polynom höchstens m^{ten} Grades, das ein festes Vorzeichen hat und in den m Punkten $s+\frac{2\pi\mu}{m}$ $(\mu=0,1,\ldots,m-1)$ verschwindet. Nach Hilfssatz 4 hat $F(\varphi)$ dann die Gestalt $a\cos m\varphi+b\sin m\varphi+c-\delta$, womit der Widerspruch gefunden ist.

(Eingegangen den 4. Mai 1934.)