COMPOSITIO MATHEMATICA

KURT MAHLER

Über transzendente *P*-adische Zahlen

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 259-275

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__259_0>

Über transzendente P-adische Zahlen

von

Kurt Mahler

Groningen

Der schöne Gelfondsche Beweis, daß für zwei reelle oder komplexe algebraische Zahlen α und β, die von 0 und 1 verschieden sind, der Logarithmen-Quotient $\dfrac{\log \alpha}{\log \beta}$ entweder rational oder transzendent ist [C. R. Acad. Sci. URSS. **2** (1934), 1–6], macht Gebrauch von funktionentheoretischen Sätzen über den Zusammenhang zwischen dem Wachstum und der Nullstellen-Anzahl ganzer Funktionen in Kreisen um den Nullpunkt, die sich am einfachsten aus dem Cauchyschen Integralsatz ergeben.

In der P-adischen Funktionentheorie steht einem ein Analogon zum Cauchyschen Satz nicht mehr zur Verfügung. Ich möchte in der vorliegenden Arbeit zeigen, daß sich die Gelfondsche Beweismethode aber trotzdem auf den P-adischen Fall übertragen läßt, indem man geeignete Eigenschaften P-adischer analytischer Funktionen heranzieht. Es wird so gezeigt:

„*Sei P eine natürliche Primzahl, seien ferner α und β zwei von* 0 *und* 1 *verschiedene algebraische P-adische Zahlen mit*

$$0 < |\alpha - 1|_P \leqq \frac{1}{P}, \quad 0 < |\beta - 1|_P \leqq \frac{1}{P}.$$

Wenn dann der Logarithmen-Quotient $\dfrac{\log \alpha}{\log \beta}$ algebraisch ist, so ist er sogar eine rationale P-adische Zahl."

Das 1. Kapitel bringt einen Hilfssatz über die Approximation P-adischer algebraischer Zahlen; im 2. Kapitel werden die erwähnten P-adischen funktionentheoretischen Sätze hergeleitet, und das 3. Kapitel bringt dann die Durchführung des Transzendenzbeweises nach der Methode von Gelfond. —

Nachträglich ist mir der schöne einfache Beweis von Th. Schneider für die Transzendenz von $\dfrac{\log \alpha}{\log \beta}$ bekannt geworden.

Auch dieser Beweis kann mit den Methoden dieser Arbeit auf das P-adische Problem übertragen werden.

I.

1. Sei P eine feste natürliche Primzahl und bedeute

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$$

ein System von endlichvielen algebraischen P-adischen Zahlen. Ein beliebiges Polynom

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = \sum_{h_1=0}^{N_1} \ldots \sum_{h_t=0}^{N_t} A_{h_1 \ldots h_t} \alpha_1^{h_1} \ldots \alpha_t^{h_t}$$

in diesen Zahlen mit ganzen rationalen Koeffizienten ist entweder Null oder von positivem P-adischen Wert; im letzteren Fall wollen wir hierfür eine untere Schranke bestimmen, die abgesehen von den Zahlen α_τ allein von den Gradzahlen

$$N_1, N_2, \ldots, N_t$$

und dem Maximum

$$A = \max_{\substack{h_1 = 0, 1, \ldots, N_1 \\ \vdots \\ h_t = 0, 1, \ldots, N_t}} (|A_{h_1 \ldots h_t}|)$$

abhängt.

2. Da alle Zahlen α_τ algebraisch sind, so erzeugen sie einen endlichen algebraischen Zahlkörper K etwa vom Grad n; dieser Körper läßt sich nach bekannten Sätzen auch durch eine einzige algebraische P-adische Zahl ζ erzeugen, die ohne Einschränkung ganz algebraisch sei und der im Körper der rationalen Zahlen irreduziblen Gleichung

$$S(\zeta) \equiv s_0 + s_1 \zeta + \ldots + s_n \zeta^n = 0 \qquad (s_n = 1)$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten genüge. Zur Abkürzung setzen wir:

$$s = \max (|s_0|, |s_1|, \ldots, |s_n|).$$

Die Zahlen α_τ sind Polynome $(n-1)$-ten Grades in ζ von der Form

$$\alpha_\tau = \frac{a_{\tau 0} + a_{\tau 1} \zeta + \ldots + a_{\tau n-1} \zeta^{n-1}}{a_{\tau n}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t)$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$a_{\tau 0}, a_{\tau 1}, \ldots, a_{\tau n} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t).$$

Sei zur Abkürzung

$$a_\tau = \max\left(|a_{\tau 0}|, |a_{\tau 1}|, \ldots, |a_{\tau n}|\right) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t).$$

3. Werden in $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ die Zahlen α_τ durch ihre Ausdrücke in der Zahl ζ ersetzt, so wird

$$a_{1n}^{N_1} a_{2n}^{N_2} \ldots a_{tn}^{N_t} \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = \Psi(\zeta)$$

offenbar zu einem Polynom in ζ vom Grad

$$(n-1)(N_1 + N_2 + \ldots + N_t) = N$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, etwa

$$\Psi(\zeta) = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1\zeta + \ldots + \mathsf{A}_N\zeta^N.$$

Eine obere Schranke für das Maximum

$$\mathsf{A} = \max\left(|\mathsf{A}_0|, |\mathsf{A}_1|, \ldots, |\mathsf{A}_N|\right)$$

bekommt man leicht durch folgende Majoranten-Rechnung, bei der ζ für den Augenblick als Unbestimmte aufzufassen ist:

Man hat

$$\begin{aligned} a_{\tau 0} + a_{\tau 1}\zeta + \ldots + a_{\tau n-1}\zeta^{n-1} &\ll a_\tau(1 + \zeta + \ldots + \zeta^{n-1}), \\ a_{\tau n} &\ll a_\tau(1 + \zeta + \ldots + \zeta^{n-1}), \end{aligned} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t)$$

und demnach

$$\Psi(\zeta) \ll (N_1+1)\ldots(N_t+1)\, A\, a_1^{N_1}\ldots a_t^{N_t}(1+\zeta+\ldots+\zeta^{n-1})^{N_1+\ldots+N_t},$$

da $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ aus nur

$$(N_1+1)(N_2+1)\ldots(N_t+1)$$

Summanden besteht. Weiter ist gewiß

$$(1+\zeta+\ldots+\zeta^{n-1})^{N_1+\ldots+N_t} \ll n^{N_1+\ldots+N_t}(1+\zeta+\ldots+\zeta^N).$$

Somit bekommt man die Majorante

$$\Psi(\zeta) \ll (N_1+1)\ldots(N_t+1)\, A\, a_1^{N_1}\ldots a_t^{N_t} n^{N_1+\ldots+N_t}(1+\zeta+\ldots+\zeta^N),$$

und folglich gilt die Ungleichung

$$\mathsf{A} \leqq (N_1+1)\ldots(N_t+1)\, A\, a_1^{N_1}\ldots a_t^{N_t} n^{N_1+\ldots+N_t}.$$

4. Als Polynom in ζ läßt sich $\Psi(\zeta)$ formal durch das Polynom $S(\zeta)$ teilen. Alsdann wird

$$\Psi(\zeta) = S(\zeta)\mathsf{X}(\zeta) + \Theta(\zeta),$$

wobei

$$\mathsf{X}(\zeta), \quad \Theta(\zeta)$$

zwei Polynome in ζ mit ganzen rationalen Koeffizienten sind.

Hiervon besitzt das zweite höchstens den Grad $n-1$, ist also von der Form

$$\Theta(\zeta) = \vartheta_0 + \vartheta_1\zeta + \ldots + \vartheta_{n-1}\zeta^{n-1}.$$

Setzt man

$$\vartheta = \max(|\vartheta_0|, |\vartheta_1|, \ldots, |\vartheta_{n-1}|),$$

so folgt aus einem einfachen Hilfssatz, daß die Ungleichung [1])

$$\vartheta \leqq \mathsf{A}(2s)^N$$

besteht; nach dem gefundenen Wert von A ist demnach

$$\vartheta \leqq (N_1+1)\ldots(N_t+1)A\,a_1^{N_1}\ldots a_t^{N_t}(2s)^N n^{N_1+\ldots+N_t}.$$

5. Wegen $S(\zeta) = 0$ ist natürlich

$$a_{1n}^{N_1}\ldots a_{tn}^{N_t}\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = \Psi(\zeta) = \Theta(\zeta).$$

Wir nehmen an, daß $\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ nicht verschwindet; dann ist also mindestens einer der Koeffizienten ϑ_ν nicht Null, und folglich die Resultante R der beiden Polynome

$$S(\zeta) \quad \text{und} \quad \Theta(\zeta)$$

auch von Null verschieden, weil $S(\zeta)$ irreduzibel und von höherem Grad als $\Theta(\zeta)$ ist. Da als Determinante geschrieben

$$R = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \ldots\ldots\ldots, & s_n & & \\ & s_0, & \ldots\ldots\ldots, & s_{n-1}, & s_n & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & s_0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & s_n \\ \vartheta_0, & \vartheta_1, & \ldots\ldots, & \vartheta_{n-1} & & \\ & \vartheta_0, & \ldots\ldots, & \vartheta_{n-2}, & \vartheta_{n-1} & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \vartheta_0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \vartheta_{n-1} \end{vmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} n-1 \text{ Zeilen} \\ \\ \\ \\ \\ n \text{ Zeilen} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ist, so besteht offenbar die Ungleichung

$$|R| \leqq (2n+1)!\, s^{n-1}\vartheta^n,$$

und wegen des Nichtverschwindens der ganzen rationalen Zahl R ist somit

$$|R|_p \geqq \{(2n+1)!\, s^{n-1}\vartheta^n\}^{-1}.$$

Andrerseits gibt es in unserem Fall nach bekannten algebraischen Sätzen zwei Polynome

$$S^*(\zeta) \quad \text{und} \quad \Theta^*(\zeta)$$

---

[1]) S. meine Arbeit: Zur Approximation algebraischer Zahlen I [Math. Ann. **107** (1932), 693], Hilfssatz 1.

mit ganzen rationalen Koeffizienten, so daß identisch

$$S(\zeta)S^*(\zeta) + \Theta(\zeta)\Theta^*(\zeta) = R,$$

also wegen $S(\zeta) = 0$

$$\Theta(\zeta) = \frac{R}{\Theta^*(\zeta)}$$

ist. Nach Voraussetzung ist jedoch ζ eine ganze algebraische, also erst recht ganze P-adische Zahl, und folglich

$$|\,\Theta^*(\zeta)\,|_P \leqq 1.$$

Demnach muß sein:

$$|\,\Theta(\zeta)\,|_P \geqq |\,R\,|_P \geqq \{(2n+1)!\,s^{n-1}\vartheta^n\}^{-1}$$

oder

$$|\Theta(\zeta)|_P \geqq \{(2n+1)!\,s^{n-1}\,((N_1+1)\ldots(N_t+1)\,A\,a_1^{N_1}\ldots a_t^{N_t}(2s)^N n^{N_1+\ldots+N_t})^n\}^{-1}$$

und wir erhalten das Endergebnis:

$$|\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)|_P \geqq$$
$$\{(2n+1)!\;s^{n-1}((N_1+1)\ldots(N_t+1)\,A\,a_1^{N_1}\ldots a_t^{N_t}(2s)^N n^{N_1+\ldots+N_t})^n a_{1n}^{N_1}\ldots a_{tn}^{N_t}\}^{-1}.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 1: *Zu endlichvielen gegebenen algebraischen P-adischen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ existiert eine nur von ihnen abhängige positive Konstante c mit der folgenden Eigenschaft: Ist*

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = \sum_{h_1=0}^{N_1} \ldots \sum_{h_t=0}^{N_t} A_{h_1 \ldots h_t}\,\alpha_1^{h_1}\ldots\alpha_t^{h_t}$$

ein beliebiges Polynom in den α_τ mit ganzen rationalen Koeffizienten, so daß

$$A = \max_{\substack{h_1=0,1,\ldots,N_1 \\ \vdots \\ h_t=0,1,\ldots N_t}} (|A_{h_1 h_2 \ldots h_t}|),$$

so ist entweder

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = 0,$$

oder es besteht die Ungleichung

$$|\,\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)\,|_P \geqq \{c^{N_1+\ldots+N_t+1}A^n\}^{-1}.$$

Dabei bezeichnet n den Grad des durch die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ erzeugten algebraischen Zahlkörpers über dem Körper der rationalen Zahlen.

6. Es möge erwähnt werden, daß sich in ähnlicher Weise wie in den letzten Paragraphen ein Analogon zu Satz 1 für reelle oder komplexe Zahlen finden läßt, nämlich:

SATZ 2: *Zu endlichvielen gegebenen algebraischen reellen oder komplexen Zahlen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ *existiert eine nur von ihnen abhängige positive Konstante* c *mit der folgenden Eigenschaft: Ist*

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = \sum_{h_1=0}^{N_1} \ldots \sum_{h_t=0}^{N_t} A_{h_1 \ldots h_t} \alpha_1^{h_1} \ldots \alpha_t^{h_t}$$

ein beliebiges Polynom in den α_τ *mit ganzen rationalen Koeffizienten, so daß*

$$A = \max_{\substack{h_1=0,1,\ldots,N_1 \\ \vdots \\ h_t=0,1,\ldots,N_t}} (|A_{h_1 h_2 \ldots h_t}|),$$

so ist entweder

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t) = 0,$$

oder es besteht die Ungleichung

$$|\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)| \geqq \{c^{N_1+\ldots+N_t+1} A^{n-1}\}^{-1}.$$

Dabei bedeutet n *den Grad des durch die Zahlen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ *erzeugten algebraischen Zahlkörpers über dem Körper der rationalen Zahlen.*

II.

7. Sei P wie im vorigen Kapitel eine feste natürliche Primzahl. Eine Potenzreihe mit P-adischen Koeffizienten

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + \ldots$$

heiße der Kürze halber eine „*Normalreihe*", wenn gleichzeitig

$$|f_h|_P \leqq 1 \quad \text{für } h = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$\lim_{h \to \infty} |f_h|_P = 0$$

ist. Eine Normalreihe konvergiert demnach, wenn das Argument x eine beliebige ganze P-adische Zahl ist. Übrigens läßt sich offenbar jede P-adische Potenzreihe, die nicht allein im Nullpunkt konvergiert, in eine Normalreihe überführen, indem man sie und ihr Argument mit einer genügend hohen natürlichen Potenz von P multipliziert.

8. Sei x_0 eine ganze P-adische Zahl. Nach dem P-adischen Analogon zum Taylorschen Satz ist die Normalreihe $f(x)$ gleich

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)(x-x_0)^k,$$

wo zur Abkürzung

$$f_k(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \sum_{h=k}^{\infty} \binom{h}{k} f_h x_0^{h-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt ist und

$$f^{(k)}(x_0) = k! \sum_{h=k}^{\infty} \binom{h}{k} f_h x_0^{h-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

die aufeinander folgenden Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle x_0 bedeuten. Aus diesen Ausdrücken folgt sofort

$$|f_k(x_0)|_P \leqq 1 \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(x_0)|_P = 0.$$

Die neue Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)(x-x_0)^k$$

in $x - x_0$ ist demnach ebenfalls eine Normalreihe. Da sich aus ihr durch eine erneute Anwendung des Taylorschen Satzes die ursprüngliche Reihe zurückgewinnen läßt, so folgt also:

„*Wenn eine P-adische analytische Funktion in der Umgebung eines beliebigen ganzen P-adischen Punktes durch eine Normalreihe darstellbar ist, so ist sie es auch in der Umgebung jedes anderen ganzen P-adischen Punktes.*"

Aus diesem Grunde werde eine irgendwo durch eine Normalreihe definierbare Funktion kurz „*Normalfunktion*" genannt; ihre Potenzreihe in der Umgebung einer beliebigen ganzen P-adischen Stelle ist alsdann eine Normalreihe.

9. Habe nun die Normalfunktion $f(x)$ an der ganzen P-adischen Stelle $x = x_0$ eine Nullstelle mindestens von der Ordnung d_0, sei also

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \text{ d.h. } f_k(x_0) = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, d_0 - 1.$$

Dann ist

$$f(x) = (x-x_0)^{d_0} g(x),$$

wobei $g(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ durch die Normalreihe

$$g(x) = \sum_{k=d_0}^{\infty} f_k(x_0)\,(x-x_0)^{k-d_0}$$

definiert wird und also selbst eine Normalfunktion darstellt. Durch das Abspalten des der Nullstelle x_0 entsprechenden Faktors $(x-x_0)^{d_0}$ entsteht somit aus der Normalfunktion $f(x)$ eine neue Normalfunktion $g(x)$, so daß sich dieses Verfahren wiederholen läßt. Auf diese Weise kommt man zu dem Ergebnis:

„*Wenn die Normalfunktion $f(x)$ an den endlichvielen Stellen*

$$x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$$

Nullstellen mindestens von den Ordnungen

$$d_0, d_1, \ldots, d_{\nu-1}$$

hat, so ist

$$f(x) = \psi(x)h(x), \qquad \psi(x) = \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} (x-x_\lambda)^{d_\lambda},$$

mit einer Normalfunktion $h(x)$. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Nullstellen $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$ sämtlich ganze P-adische Zahlen sind."

10. Mit einer Funktion $f(x)$ sind auch ihre sämtlichen Ableitungen $f'(x), f''(x), \ldots$ Normalfunktionen, wie sich durch Differenzieren ihrer Potenzreihen ergibt. In jedem ganzen P-adischen Punkt x ist alsdann demnach

$$|f^{(k)}(x)|_P \leqq 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Bemerkung und das Ergebnis des vorigen Paragraphen führen zu einer oberen Abschätzung für den P-adischen Wert von Normalfunktionen mit vielen Nullstellen, die wir für die Anwendungen im folgenden Kapitel benötigen.

Wir setzen voraus, daß die Normalfunktion $f(x)$ wieder an den Stellen

$$x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$$

der Reihe nach mindestens von den Ordnungen

$$d_0, d_1, \ldots, d_{\nu-1}$$

verschwindet, unterwerfen diese Nullstellen aber jetzt den Bedingungen

$$|x_\lambda|_P \leqq \frac{1}{P} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, \nu-1)$$

und setzen ferner voraus, daß

$$|x|_P \leqq \frac{1}{P}$$

sei. Alsdann ist nach 9

$$f(x) = \psi(x)h(x), \qquad \psi(x) = \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} (x-x_\lambda)^{d_\lambda},$$

mit einer Normalfunktion $h(x)$. Durch k-maliges Differenzieren folgt hieraus die Gleichung

$$f^{(k)}(x) = \sum_{g=0}^{k} \binom{k}{g} \psi^{(g)}(x) h^{(k-g)}(x),$$

und nach der obigen Bemerkung die Ungleichung

$$|f^{(k)}(x)|_P \leqq \max_{g=0,1,\ldots,k} (|\psi^{(g)}(x)|_P).$$

Andrerseits ist offenbar

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{d} \psi_j x^{d-j} \qquad (d = d_0 + d_1 + \ldots + d_{\nu-1}),$$

wobei die Koeffizienten ψ_j den Ungleichungen

$$|\psi_j|_P \leqq P^{-j} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, d)$$

genügen; ferner sind die Ableitungen gleich

$$\psi^{(k)}(x) = k! \sum_{j=k}^{d} \binom{d-j}{k} \psi_j x^{d-j-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wegen der Voraussetzung, daß der P-adische Wert von x höchstens gleich $1/P$ sei, ist demnach

$$|\psi^{(k)}(x)|_P \leqq P^{-(d-k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

und somit bekommen wir das Ergebnis:

Satz 3: *Die Normalfunktion $f(x)$ verschwinde an den Stellen*

$$x_0, x_1, \ldots, x_{\nu-1}$$

der Reihe nach mindestens von den Ordnungen

$$d_0, d_1, \ldots, d_{\nu-1}.$$

Es sei

$$|x_\lambda|_P \leqq \frac{1}{P} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

und x genüge der Ungleichung

$$|x|_P \leqq \frac{1}{P}.$$

Wenn dann $k \geqq 0$ eine beliebige ganze rationale Zahl bedeutet, so ist

$$|f^{(k)}(x)|_P \leqq P^{-(d_0+d_1+\ldots+d_{\nu-1}-k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

11. Das letzte Ergebnis entspricht den bekannten Ungleichungen für den Absolutbetrag gewöhnlicher analytischer Funktionen mit einer großen Anzahl von Nullstellen. In komplexen Gebiet lassen sich diese Formeln entweder ähnlich wie im Vorangehenden mittels der Potenzreihen oder bequemer mittels der Cauchyschen Integralformel herleiten. Während es im P-adischen Fall ein so kräftiges Hilfsmittel wie die Cauchyschen Integralsätze nicht gibt, hat man hier den Vorteil, auf Grund der *nicht-Archimedischen Bewertung* die Rechnungen unmittelbar von den Potenzreihen aus so viel leichter und genauer durchführen zu können.

III.

12. Seien α und β zwei von Null und Eins verschiedene ganze P-adische Zahlen mit

$$|\alpha - 1|_P \leqq \frac{1}{P}, \quad |\beta - 1|_P \leqq \frac{1}{P}$$

und

$$\log \alpha = \mathsf{A}, \quad \log \beta = \mathsf{B}.$$

Alsdann ist

$$0 < |\mathsf{A}|_P \leqq \begin{cases} P^{-2} \text{ für } P = 2, \\ P^{-1} \text{ für } P \geqq 3, \end{cases} \qquad 0 < |\mathsf{B}|_P \leqq \begin{cases} P^{-2} \text{ für } P = 2, \\ P^{-1} \text{ für } P \geqq 3, \end{cases}$$

und also

$$\alpha^x = e^{\mathsf{A}x} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}x)^h}{h!}, \qquad \beta^x = e^{\mathsf{B}x} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{B}x)^h}{h!}$$

für jede ganze P-adische Zahl definiert; denn es ist z.B.

$$\left|\frac{\mathsf{A}^h}{h!}\right|_P = |\mathsf{A}|_P^h P^{\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{h}{P^\nu}\right]} \leqq |\mathsf{A}|_P^h P^{\frac{h}{P-1}},$$

d.h. $\leqq 2^{-h}$ für $P = 2$, $\leqq P^{-\frac{P-2}{P-1}h}$ für $P \geqq 3$ $(h = 0, 1, 2, \ldots)$.

Im Folgenden wird angenommen, daß die drei Zahlen

$$\alpha, \beta, \eta = \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$$

gleichzeitig algebraisch sind. Der von ihnen erzeugte algebraische Zahlkörper K sei vom Grad n, und es bedeute c die positive Konstante, die zu ihnen auf Grund von Satz 1 gehört. Indem man α und β nötigenfalls vertauscht, darf man ohne Einschränkung

voraussetzen, daß

$$|\eta|_P \leqq 1$$

und also

$$|\mathsf{A}|_P \leqq |\mathsf{B}|_P \leqq \begin{cases} P^{-2} & \text{für } P = 2, \\ P^{-1} & \text{für } P \geqq 3 \end{cases}$$

sei.

13. Bei den folgenden Überlegungen treten Ausdrücke der Form

$$F(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk}\, \alpha^{hx} \beta^{kx}$$

eines geeigneten Grades N mit ganzen rationalen Koeffizienten A_{hk} auf, die Ungleichungen der Form

$$|A_{hk}| \leqq A \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, N)$$

mit einer geeigneten natürlichen Zahl A genügen; die Veränderliche x wird dabei als ganze P-adische Zahl vorausgesetzt. Alsdann sind die einzelnen Summanden von $F(x)$

$$A_{hk}\, \alpha^{hx} \beta^{kx} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{hk} \frac{(h\mathsf{A}+k\mathsf{B})^l}{l!} x^l$$

offenbar Normalfunktionen und also ist auch $F(x)$ selbst eine Normalfunktion. Für die wiederholten Ableitungen nach x erhält man

$$F^{(l)}(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk} (h\mathsf{A}+k\mathsf{B})^l\, \alpha^{hx} \beta^{kx} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots),$$

oder auch

$$F^{(l)}(x) = \mathsf{B}^l \Phi_l(x) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots),$$

wenn zur Abkürzung

$$\Phi_l(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk} (h\eta+k)^l\, \alpha^{hx} \beta^{kx} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt wird.

14. Es möge speziell x eine nichtnegative ganze rationale Zahl sein. Die Ausdrücke

$$\Phi_l(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk} (h\eta+k)^l\, \alpha^{hx} \beta^{kx}$$

sind dann ganze P-adische algebraische Zahlen. Wenn sie nicht

verschwinden, so erlaubt Satz 1, für ihren P-adischen Wert eine untere Schranke zu bestimmen.

Dazu beachten wir, daß in Majorantenform

$$(h\eta+k)^l \ll N^l(\eta+1)^l \ll (2N)^l(1+\eta+\ldots+\eta^l)$$

und also

$$\Phi_l(x) \ll \sum_{h=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} A(2N)^l(1+\eta+\ldots+\eta^l)\,\alpha^{hx}\beta^{kx}$$

ist; folglich wird

$$\Phi_l(x) \ll A(2N)^l \sum_{r=0}^{Nx}\sum_{s=0}^{Nx}\sum_{t=0}^{l} \alpha^r\beta^s\eta^t,$$

und nach Satz 1 erhalten wir die Ungleichung

$$|\,\Phi_l(x)\,|_P \geqq \{c^{2Nx+l+1}A^n(2N)^{nl}\}^{-1},$$

es sei denn, daß $\Phi_l(x)$ verschwindet. Setzt man

$$|\,\mathsf{B}\,|_P = \frac{1}{c^*},$$

so folgt hieraus für die Funktionen $F^{(l)}(x)$ das Ergebnis:

Hilfssatz 1: *Wenn der Ausdruck*

$$F^{(l)}(x) = \sum_{h=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} A_{hk}(h\mathsf{A}+k\mathsf{B})^l\,\alpha^{hx}\beta^{kx}$$

für nichtnegatives ganzes rationales x und l nicht verschwindet, so befriedigt sein P-adischer Wert die Ungleichung

$$|\,F^{(l)}(x)\,|_P \geqq \{c^{2Nx+l+1}c^{*l}A^n(2N)^{nl}\}^{-1}.$$

15. Als Funktion der natürlichen Zahl N werde gesetzt:

$$r_1 = \left[\frac{N^{3/2}}{\log N}\right], \quad r_2 = [N^{1/2}],$$

so daß also

$$r_1 r_2 \leqq \frac{N^2}{\log N}$$

ist. Ferner werde die natürliche Zahl A definiert durch

$$A = [e^{N^{3/2}}].$$

Es gibt offenbar mindestens

$$Z_1 = (e^{N^{3/2}})^{(N+1)^2} > e^{N^{7/2}}$$

verschiedene Funktionen

$$F(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk} \alpha^{hx} \beta^{kx},$$

deren Koeffizienten A_{hk} nichtnegative ganze rationale Zahlen mit

$$0 \leqq A_{hk} \leqq A \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, N)$$

sind. Jeder solchen Funktion werde ein System von $r_1 r_2$ nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen

$$\boldsymbol{F}^{(l)}(x) \qquad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P \end{pmatrix}$$

durch die Bedingungen

$$0 \leqq \boldsymbol{F}^{(l)}(x) \leqq P^g - 1, \quad \left| F^{(l)}(x) - \boldsymbol{F}^{(l)}(x) \right|_P \leqq P^{-g} \qquad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P \end{pmatrix}$$

eindeutig zugeordnet; dabei bedeutet g die ganze rationale Zahl mit

$$P^g \leqq e^{N^{3/2} \log N} < P^{g+1}.$$

Es ist möglich, diese Forderungen zu erfüllen, da alle Ausdrücke

$$F^{(l)}(x) \qquad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P \end{pmatrix}$$

ganze P-adische Zahlen sind.

Für die einzelne Zahl $\boldsymbol{F}^{(l)}(x)$ gibt es genau P^g Möglichkeiten; das Zahlsystem

$$\boldsymbol{F}^{(l)}(x) \qquad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P \end{pmatrix}$$

hat also nur

$$Z_2 = P^{g r_1 r_2} \leqq \left(e^{N^{3/2} \log N}\right)^{\frac{N^2}{\log N}} = e^{N^{7/2}}$$

Möglichkeiten. Demnach ist

$$Z_1 > Z_2,$$

und somit können nach dem Schubfachprinzip die verschiedenen Funktionen $F(x)$ nicht zu lauter verschiedenen Zahlsystemen $\boldsymbol{F}^{(l)}(x)$ führen. Unter ihnen gibt es also zwei verschiedene, etwa

$$F^*(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk}^* \alpha^{hx} \beta^{kx}$$

und

$$F^{**}(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk}^{**} \alpha^{hx} \beta^{kx},$$

denen das gleiche Zahlsystem entspricht. Wird

$$F^*(x) - F^{**}(x) = F(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk} \alpha^{hx} \beta^{kx}, \quad A_{hk}^* - A_{hk}^{**} = A_{hk}$$

gesetzt, so bestehen demnach die P-adischen Ungleichungen

$$|F^{(l)}(x)|_P \leqq P^{-g} \quad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P \end{pmatrix},$$

und ferner sind jetzt die Koeffizienten A_{hk} nicht alle gleich Null und genügen den Bedingungen

$$|A_{hk}| \leqq e^{N^{3/2}} \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, N).$$

Wegen

$$P^{-g} < P e^{-N^{3/2} \log N}$$

läßt sich dies Ergebnis aussprechen in der Form:

HILFSSATZ 2: *Zu jeder natürlichen Zahl N gibt es einen Ausdruck*

$$F(x) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk} \alpha^{hx} \beta^{kx},$$

dessen Koeffizienten A_{hk} ganze rationale Zahlen sind, die nicht alle verschwinden und den Ungleichungen

$$|A_{hk}| \leqq e^{N^{3/2}} \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, N)$$

genügen, während gleichzeitig die Bedingungen

$$|F^{(l)}(x)|_P < P e^{-N^{3/2} \log N} \quad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P \end{pmatrix}$$

erfüllt sind.

16. Während nach dem letzten Hilfssatz

$$|F^{(l)}(x)|_P < P e^{-N^{3/2} \log N} \quad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P \end{pmatrix}$$

ist, hat man nach Hilfssatz 1 wegen

$$l \leqq \frac{N^{3/2}}{\log N}, \qquad x \leqq N^{1/2} P$$

die Abschätzungen

$$|F^{(l)}(x)|_P \geqq \left\{ c^{2N^{3/2}P + \frac{N^{3/2}}{\log N} + 1} c^{* \frac{N^{3/2}}{\log N}} e^{n \cdot N^{3/2}} (2N)^{\frac{n N^{3/2}}{\log N}} \right\}^{-1},$$

falls die Zahlen $F^{(l)}(x)$ nicht verschwinden. Diese Ungleichungen lassen sich für hinreichend großes natürliches N nur dann mit einander in Einklang bringen, wenn

$$F^{(l)}(x) = 0 \quad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, r_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P \end{pmatrix}$$

ist. Somit folgt:

HILFSSATZ 3: *Die durch Hilfssatz 2 bestimmte Funktion $F(x)$ hat für genügend großes natürliches N an den r_2 Stellen*

$$x = 0, P, 2P, \ldots, (r_2 - 1)P$$

je eine Nullstelle mindestens von der Ordnung r_1.

17. Die Funktion $F(x)$ ist nach **13** eine Normalfunktion, und sie hat an r_2 Stellen $x_\lambda = \lambda P$ mit $|x_\lambda|_P \leqq 1/P$ je eine Nullstelle mindestens von der Ordnung r_1. Wir können demnach Satz **3** anwenden und haben dann in der dortigen Bezeichnung

$$d_0 + d_1 + \ldots + d_{r_2 - 1} = r_1 r_2.$$

Es folgt also, daß für jede nichtnegative ganze rationale Zahl l mit

$$l \leqq \left[\frac{r_1 r_2}{2}\right]$$

und für jede P-adische Zahl x mit

$$|x|_P \leqq \frac{1}{P}$$

die Ungleichung

$$|F^{(l)}(x)|_P \leqq P^{-\frac{r_1 r_2}{2}}$$

erfüllt ist.

Daraus ergibt sich insbesondere, wenn N genügend groß und also

$$\frac{r_1 r_2}{2} \geqq \frac{N^2}{3 \log N}$$

ist:

HILFSSATZ 4: *Die durch Hilfssatz 2 bestimmte Funktion $F(x)$ erfüllt für hinreichend großes natürliches N die Ungleichungen*

$$|F^{(l)}(x)|_P \leqq P^{-\frac{N^2}{3 \log N}} \quad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots, s_1 - 1 \\ x = 0, P, 2P, \ldots, (s_2 - 1)P \end{pmatrix},$$

wenn zur Abkürzung

$$s_1 = [N^{7/4}], \quad s_2 = [N^{3/4}]$$

gesetzt wird.

18. Im Gegensatz zum letzten Hilfssatz ist nach Hilfssatz 1 jede der $s_1 s_2$ Zahlen

$$F^{(l)}(x) \qquad \begin{pmatrix} l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s_1 - 1 \\ x = 0,\ P,\ 2P,\ \ldots,\ (s_2 - 1)P \end{pmatrix}$$

entweder gleich Null, oder sie genügt der Ungleichung

$$\left| F^{(l)}(x) \right|_P \geqq \left\{ c^{2N^{7/4}P + N^{7/4}+1}\, c^{*N^{7/4}}\, e^{nN^{3/2}}\, (2N)^{nN^{7/4}} \right\}^{-1},$$

da

$$l \leqq N^{7/4}, \quad x \leqq N^{3/4}P$$

ist. Diese beiden Aussagen lassen sich für genügend großes natürliches N nur dann miteinander in Einklang bringen, wenn die Funktionswerte $F^{(l)}(x)$ sämtlich verschwinden, und also folgt:

HILFSSATZ 5: *Die durch Hilfssatz 2 bestimmte Funktion $F(x)$ hat für hinreichend großes natürliches N an allen s_2 Stellen*

$$x = 0,\ P,\ 2P,\ \ldots,\ (s_2 - 1)P$$

je eine Nullstelle mindestens von der Ordnung s_1.

19. Auf das letzte Ergebnis wenden wir erneut Satz 3 an. Die Summe der Ordnungen der Nullstellen

$$x = 0,\ P,\ 2P,\ \ldots,\ (s_2 - 1)P$$

ist jetzt gleich

$$s_1 s_2.$$

Wenn wir demnach insbesondere $x = 0$ nehmen und uns auf Ableitungen bis zur $2N^2$-ten Ordnung beschränken, so folgt:

HILFSSATZ 6: *Die durch Hilfssatz 2 bestimmte Funktion $F(x)$ erfüllt für genügend großes natürliches N die Ungleichungen*

$$\left| F^{(l)}(0) \right|_P \leqq P^{2N^2 - s_1 s_2} \leqq P^{-\frac{N^{5/2}}{2}} \qquad (l = 0, 1, \ldots, 2N^2).$$

20. Im Gegensatz zum letzten Ergebnis ist nach Hilffssatz 1 jede der Zahlen

$$F^{(l)}(0) \qquad (l = 0, 1, \ldots, 2N^2)$$

entweder gleich Null, oder sie befriedigt die Ungleichung

$$\left| F^{(l)}(0) \right|_P \geqq \left\{ c^{2N^2+1}\, c^{*2N^2}\, e^{nN^{3/2}}\, (2N)^{2nN^2} \right\}^{-1}.$$

Diese beiden Aussagen sind für hinreichend großes natürliches N

nur dann nicht im Widerspruch zu einander, wenn gleichzeitig

$$F^{(l)}(0) = 0 \qquad (l = 0, 1, \ldots, 2N^2)$$

ist, und somit gilt:

HILFSSATZ 7: *Sobald die natürliche Zahl N hinreichend groß ist, besitzt die durch Hilfssatz 2 bestimmte Funktion $F(x)$ im Nullpunkt $x = 0$ eine Nullstelle mindestens von der Ordnung $2N^2+1$.*

21. Sei N schon so groß, daß

$$2N^2 + 1 \geqq (N+1)^2$$

ist; dann ist nach dem letzten Satz insbesondere

$$F^{(l)}(0) = \sum_{h=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} A_{hk}(h\mathsf{A}+k\mathsf{B})^l = 0 \quad (l = 0, 1, \ldots (N+1)^2-1).$$

Dies sind $(N+1)^2$ homogene lineare Gleichungen mit P-adischen Koeffizienten für die $(N+1)^2$ Größen

$$A_{hk} \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, N)$$

die nach Hilfssatz 2 nicht alle verschwinden. Da auch im P-adischen die bekannten Sätze über lineare Gleichungen gelten, so muß demnach die Determinante

$$\left| (h\mathsf{A}+k\mathsf{B})^l \right| \qquad \begin{pmatrix} h, k = 0, 1, \ldots, N \\ l = 0, 1, \ldots, (N+1)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

dieses Gleichungssystems verschwinden, und da sie eine Vandermondesche Determinante ist, also gleich dem Differenzen-Produkt der Zahlen

$$h\mathsf{A} + k\mathsf{B} \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, N),$$

so sind diese Zahlen nicht alle von einander verschieden. Das ist nur möglich, wenn $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$ eine rationale Zahl ist, und wir haben also bewiesen:

HAUPTSATZ: *Sind α und β zwei algebraische P-adische Zahlen mit*

$$0 < |\alpha - 1|_P \leqq \frac{1}{P}, \quad 0 < |\beta - 1|_P \leqq \frac{1}{P},$$

so ist der Quotient ihrer Logarithmen

$$\eta = \frac{\log \alpha}{\log \beta}$$

entweder eine rationale oder eine transzendente P-adische Zahl.

(Eingegangen, den 7. Juli 1934.)