COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS FREUDENTHAL

Über die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Außenraumes abgeschlossener Mengen

Compositio Mathematica, tome 2 (1935), p. 163-176

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__163_0>

Über die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Außenraumes abgeschlossener Mengen

von

Hans Freudenthal
Amsterdam

---

0. Die wichtigste qualitative Folgerung der Dualitätssätze Jordanscher Richtung [1]) ist der Satz von der topologischen Invarianz der reduzierten Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}(R^n - M)$ des Außenraumes $R^n - M$ einer abgeschlossenen Teilmenge M der Sphäre R^n, der Satz also von der Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{B}(R^n - M)$ und $\mathfrak{B}(R^n - N)$ bei homöomorphen M und N [1a]). Dieser Satz, der bisher nur als Folgerung der Dualitätssätze, also mit verhältnismäßig tiefliegenden Betrachtungen erschlossen werden konnte, soll hier, recht einfach wie mir scheint, bewiesen werden. Es ergibt sich sogar etwas mehr: die Invarianz der *vollen* Bettischen Gruppen, die bisher nicht feststand [2]). Aber noch mehr: aus unserer Methode fließt ohne Weiteres die topologische Invarianz der Verschlingungsinvarianten und des Alexanderschen *Schnittringes* [3]) des Außenraumes, und cum grano salis möchte man sagen, daß *alle* Homologie-Invarianten des Außenraumes topologische Invarianten der Menge selbst seien, nur läßt sich dies „alle" schwer präzisieren.

Der Beweis verläuft kurz so: M und N seien homöomorphe abgeschlossene Teilmengen der Sphäre [4]), oder — etwas be-

---

[1]) Pontrjagin (Math. Ann. **105** (1931), 165—205 (189)).

[1a]) Man kann diesen Satz noch allgemeiner formulieren: irgendeine k-dimensionale Bettische Gruppe von $R^n - M$ ist isomorph der entsprechenden $(k+r)$-dimensionalen Bettischen Gruppe von $R^{n+r} - N$ (für $k = 0$ mit einer kleinen Modifikation). Doch läßt sich dieser Satz leicht aus dem von uns behandelten Fall $r = 0$ ableiten.

[2]) Siehe jedoch die Ankündigung von L. Pontrjagin [Kongreß Zürich 1932, II, 195—196]. Zusatz bei der Korrektur, 2. Febr. 1935: Inzwischen erschien die ausführliche Darstellung [Annals of Math. **35** (1934), 904—914].

[3]) Proceedings Nat. Acad. USA **10** (1924); 99—103, 493—494. **11** (1925), 143—146.

[4]) Ich habe mich im Folgenden auf Sphären beschränkt, anstatt auch die verallgemeinerten Sphären zu betrachten, um die Arbeit nicht mit vorbereitenden Untersuchungen zu belasten, die sich mehr für eine selbständige Arbeit eigneten.

quemer — verschiedener Sphären R^n und S^n; es liegen also stetige Abbildungen $f(M) \subset N$, $g(N) \subset M$ vor, die zusammengesetzt die Identität ergeben.

1.) Jede Abbildung (das Adjektiv stetig lassen wir in Zukunft als selbstverständlich weg) $f(M) \subset N$ (nicht nur die Homöomorphie) läßt sich fortsetzen zu einer Abbildung $f(R^n) \subset S^n$ mit dem Abbildungsgrade *eins* (ja sogar mit jedem vorgegebenen Grade γ); dabei muß man natürlich zulassen, daß das Original von N noch Punkte außerhalb M enthält. An die Stelle der homöomorphen Fortsetzungen von Homöomorphien, die bekanntlich im Allgemeinen nicht möglich sind, treten hier also die Fortsetzungen vom Grade *eins*. Darin, daß sie bei Homologiebetrachtungen dasselbe leisten wie die eineindeutigen, liegt wohl der Kern zahlreicher topologischer Sätze.

2.) Nach einigen vorbereitenden Abänderungen von f, die f auf M fest lassen und insbesondere bewirken, daß kein Simplex mehr singulär abgebildet wird, kann man jedem Zyklus Z^k (man ergänze in diesem Zusammenhang stets „mod m, $m = 0, 2, 3, \ldots$" [4a])) aus $S^n - N$, der sich in genügend allgemeiner Lage befindet, einen „Originalzyklus" $\varphi(Z)$ [4b]) aus $R^n - M$ zuordnen, derart daß

a) $f\varphi(Z) = \gamma Z$ ist [5]),

b) φ distributiv ist,

c) aus $Z \sim 0$ in $S^n - N$ folgt $\varphi(Z) \sim 0$ in $R^n - M$,

d) die (mithin durch die Abbildungen in umgekehrter Richtungen induzierten) Homomorphismen irgendwelcher Bettischen Gruppen ($\mathfrak{B}$) des Außenraumes sich bei Zusammensetzung von Abbildungen in umgekehrter Richtung zusammensetzen, d.h. wenn zu

$$f(M) \subset M^*, \quad f^*(M^*) \subset M^{**},$$
$$f(R) \subset R^*, \quad f^*(R^*) \subset R^{**},$$

die „Umkehrungen" φ bzw. φ^* gehören, zu f^*f die „Umkehrung" $\varphi\varphi^*$ gehört.

3.) Man beweist weiter, daß für die „Umkehrungen" zweier

[4a]) Man kann aber auch Zyklen beliebiger Koeffizientenbereiche betrachten.

[4b]) Die „Umkehrung" φ einer Abbildung f kommt auch bei H. Hopf vor, wenn auch für etwas andersartige Punktmengen. In Math. Ann. **104** (1931), 637—665 (§ 1) ähnlich definiert, wie wir es hier tun, in J. f. r. u. angew. Math. **163** (1930), 71—88 (§ 3) algebraisch definiert. Die Analogie mit der erstgenannten Arbeit erstreckt sich auch auf die Methode der Untersuchung verschiedener Eigenschaften von φ.

[5]) Diese Gleichung werden wir allerdings nie verwenden; daß sich φ trotzdem nicht trivial befriedigen läßt, liegt an einer Eigenschaft, die in 3 zum Vorschein kommt. in Verbindung mit der Eigenschaft 2*d*.

Abbildungen f_0, f_1 derselben Relativklasse (d.h. $f_\tau(M)\subset N$, $f_\tau(R^n)\subset S^n$, $0\leqq\tau\leqq 1$) die Homologie $\varphi_0(Z)\sim\varphi_1(Z)$ in R^n-M gilt, der Homomorphismus φ also nur von der Relativklasse von f abhängt [6]).

4.) Auf Grund von 1 und $2a-c$ liegt nun bei *homöomorphen* M und N ein Homomorphismus φ von $\mathfrak{B}(S^n-N)$ in $\mathfrak{B}(R^n-M)$ vor *und* ein Homomorphismus ψ von $\mathfrak{B}(R^n-M)$ in $\mathfrak{B}(S^n-N)$. Zusammengesetzt ergeben sie wegen $2d$ einen Homomorphismus $\varphi\psi$ von $\mathfrak{B}(R^n-M)$ in sich (bzw. einen Homomorphismus $\psi\varphi$ von $\mathfrak{B}(S^n-N)$ in sich). Die Zusammensetzung $\varphi\psi$ ist auf M die Identität und auf R^n vom Grade eins. Weiß man, daß eine solche Abbildung zur Relativklasse der Identität gehört, so lehrt **3**, daß der zusammengesetzte Homomorphismus $\varphi\psi$ der identische Isomorphismus ist, daß also auch der Homomorphismus φ von $\mathfrak{B}(S^n-N)$ in $\mathfrak{B}(R^n-M)$ ein „*Iso*morphismus *in*" ist, und analog, daß der Homomorphismus ψ von $\mathfrak{B}(R^n-M)$ in $\mathfrak{B}(S^n-N)$ ein „*Iso*morphismus *in*" ist, daß beide Gruppen also tatsächlich, wie wir beweisen wollten, isomorph sind.

5.) Daß zwei Abbildungen, die zur gleichen Abbildungsklasse von M in N und zur gleichen Abbildungsklasse von R^n in S^n gehören, auch zur gleichen Relativklasse gehören, ist nur dann richtig, wenn R^n durch M nicht zerlegt wird. Zerlegt M, so läßt sich jede Klasse von M in N auf unendlich viel verschiedene Weisen zu einer Relativklasse desselben Abbildungsgrades fortsetzen; der Abbildungsgrad ist nicht mehr die einzige Invariante, es gibt deren soviel wie Gebiete in R^n-M. (Der Aufstellung dieser Relativklassen haben wir uns mit größerer Ausführlichkeit gewidmet als nötig gewesen wäre, weil ihre Kenntnis uns an und für sich interessant schien.) Es zeigt sich jedoch, daß man die Fortsetzungen f und g der gegebenen topologischen Abbildung $f(M)=N$ und ihrer Umkehrung so wählen kann, daß ihre Zusammensetzung auch zur *Relativ*klasse der Identität gehört, und damit läßt sich die Lücke aus 4 ausfüllen.

Diese Beweisskizze zeigt schon, daß unser Invarianzbeweis weit über die Bettischen Gruppen hinausreicht. Wir werden auf diese Tatsache im Laufe des Beweises nicht ausführlich eingehen; insbesondere wird die Invarianz der Verschlingungszahlen und des Schnittringes des Außenraumes während des Beweises ohne weiteres einleuchten.

---

[6]) Eigentlich werden wir diese Eigenschaft von φ nur für $M=N$ verwenden; ich habe aber häufig, wo es mir interessant schien und nicht mehr Beweisarbeit verursachte, Sätze allgemeiner als nötig ausgesprochen.

Erwähnt sei noch als unmittelbare Folge unserer Betrachtungen, daß Abbildungen von M in sich Homomorphismen von $\mathfrak{B}(R^n - M)$ in sich induzieren. Vielleicht kann man diese Bemerkung zu einem Beweis des Pontrjaginschen Dualitätssatzes [7]) ausbauen; man muß sich dabei allerdings vor Augen halten, daß sich nicht notwendig jeder Homomorphismus von Bettischen Gruppen von M in sich durch eine Abbildung von M in sich realisieren lassen muß. Dagegen geht aus unserer Beweisskizze bereits hervor, daß die Isomorphie der Bettischen Gruppen usw. des Außenraumes bereits gesichert ist, wenn M und N, statt homöomorph zu sein, gegenseitige Abbildungen besitzen, die zusammengesetzt Abbildungen von M und N auf sich aus der Klasse der Identität ergeben. [8])

1. Im Folgenden sind R^n und S^n stets n-dimensionale Spären, M bzw. N abgeschlossene echte [9]) Teilmengen von R^n bzw. S^n, T^k bzw. U^k Simplexe einer gegebenen Teilung von R^n bzw. S^n, t^k bzw. u^k Simplexe einer Unterteilung der gegebenen Teilung. $\mathfrak{R}$ kann sowohl die mengentheoretische als auch die kombinatorische Randbildung bedeuten. M_ε bezeichnet eine polyedrale ε-Umgebung von M.

1. Jedes $f(M) \subset N$ läßt sich fortsetzen zu einem $f(R^n) \subset S^n$ [10]). Man denke sich nämlich R^n in einem cartesischen Raum, entferne aus S^n einen Punkt $p \not\subset N$ und denke sich auch $S^n - p$ als cartesischen Raum. Nach einem bekannten Satz [10a]) läßt sich jede Koordinate von f stetig auf den cartesischen Originalraum, also a fortiori auf R^n fortsetzen. Die Koordinaten zusammen geben eine Abbildung in $S^n - p$, also a fortiori in S^n, die gesuchte Fortsetzung.

In R^n und S^n legen wir von jetzt an die elliptische Metrik und Geometrie zu Grunde; in diesem Sinn sind die Worte „Gerade", „Ebene", . . . zu verstehen, bei „Strecke", „Simplex" usw. denke man daran, daß diese Dinge eindeutig als konvexe Gebilde definiert sind, sobald der Durchmesser der Eckpunktmenge klein genug ist.

---

7) Siehe [1]).

8) Die mit 1.)—5.) numerierten Schritte dieser Einleitung findet man unter den entsprechenden fetten Nummern des Hauptteils ausgeführt.

9) Diese Annahme ist eine unwesentliche Einschränkung der Allgemeinheit.

10) Diese Tatsache findet sich z.B. bei O. Haupt [Journal f. r. u. angew. Math. **168** (1932), 129—130].

10a) Siehe z.B. H. Hahn, Reelle Funktionen I (Berlin 1920), 137—140.

2. Jede Abbildung $f(M) \subset N$, $f(R^n) \subset S^n$ läßt sich unter Festhaltung auf M approximieren durch eine außerhalb M_ε simpliziale Abbildung. Wir approximieren nämlich zunächst in $R^n - M_\varepsilon$ f simplizial durch f^*, bestimmen ein positives $\varepsilon_0 < \varepsilon$ und M_{ε_0}, so daß $\overline{M}_{\varepsilon_0} \subset M_\varepsilon$. Wir setzen $f^{**} = f^*$ in $R^n - M_\varepsilon$, $f^{**} = f$ in M_{ε_0} und lassen für jeden Punkt $a \subset M_\varepsilon - M_{\varepsilon_0}$ den Punkt $f^{**}(a)$ die Strecke $f(a)f^*(a)$ im selben Verhältnis teilen, das seinen Abständen von M_{ε_0} bzw. $R^n - M_\varepsilon$ zukommt. Dadurch ist für die Approximation der stetige Anschluß erzielt.

3. Es sei $g(T^n) \subset U^n$ eine (vielleicht singuläre) simpliziale Abbildung eines Simplexes in ein anderes, und es sei $g(\mathfrak{R}(T^n)) \subset \mathfrak{R}(U^n)$. Nach geeigneter Unterteilung läßt sich g ersetzen durch ein h, das auf $\mathfrak{R}(T^n)$ mit ihm übereinstimmt und ein geeignetes t^n statt etwa singulär, von vorgeschriebenem Grade ± 1 abbildet. Man wähle nur t^n so, daß es mit $\mathfrak{R}(T^n)$ keinen Punkt gemein hat, bringe die Bilder seiner Ecken in allgemeine Lage und setze die Eckenabbildung baryzentrisch fort. Das entstehende h ist vielleicht nicht mehr simplizial, aber das schadet nichts. Jedenfalls läßt sich für $h(t^n)$ sowohl das positive als auch das negative Zeichen erreichen.

4. $f(M) \subset N$, $f(R^n) \subset S^n$ läßt sich unter Festhaltung auf M (ja sogar unter Festhaltung außerhalb eines vorgegebenen T^n) ersetzen durch eine Abbildung vorgegebenen Grades γ: Wegen 2 kann man sich f simplizial in $R^n - M_\varepsilon$ vorstellen, wegen 3 darf man voraussetzen, daß ein T^n regulär abgebildet ist; das Bild dieses T^n denken wir uns einfachheitshalber als Vollkugel V^n. Wir klappen diese Vollkugel nun herum, d.h. wir ersetzen für jeden Punkt $a \subset T^n$ sein Bild $f(a)$ durch das Spiegelbild von $f(a)$ bei der Spiegelung (Inversion) am Rande von V. Der Abbildungsgrad von $f(R^n) \subset S^n$ vermindert sich dabei um den Abbildungsgrad von $f(T^n) \subset V^n$, also um ± 1. Wiederholte Anwendung von 2,3 und dem Umklappungsprozeß führt auf jeden gewünschten Grad.

Damit ist der in **0**,1 angekündigte Satz bewiesen; wir treffen jetzt Vorbereitungen für **0**,2:

5. $f(M) \subset N$, $f(R^n) \subset S^n$ läßt sich nach geeigneter Unterteilung approximieren durch eine in $R^n - M_\varepsilon$ simpliziale Abbildung, die dort *kein Simplex singulär* abbildet. Man approximiere nämlich gemäß 2, jedoch so, daß man die Bilder der Ecken in allgemeine Lage bringt. Dann fallen niemals die Bilder von $n+1$ oder mehr Ecken in eine $(n-1)$-dimensionale Ebene. Die Eckenabbildung setzt man auf die einzelnen Simplexe baryzentrisch

fort und zerschlägt S^n so, daß das Bild jedes Simplexes von $R^n - M$ aus Simplexen von S^n aufgebaut ist; jedes Simplex von $R^n - M$ wird dabei eineindeutig abgebildet. Zerschlägt man ferner jedes Simplex von $R^n - M_\varepsilon$ genauso, wie sein Bild in S^n zerschlagen ist, so erhält man die gewünschte simpliziale und in jedem Teilsimplex von $R^n - M_\varepsilon$ eineindeutige Abbildung.

In **2** stellen wir uns f immer in dieser Gestalt vor.

2. $f(M_\varepsilon)$ nennen wir N_ε (das braucht keine Umgebung von N zu sein). Die T^n bzw. U^n denken wir uns so orientiert, daß ihre Summe R^n bzw. S^n ist. $f(R^n)$ ist kombinatorisch gleich γS^n. L^k sei eine Linearform in den $u^k \subset S - \overline{N}_\varepsilon$. L^k möge sich stets in allgemeiner Lage befinden; genauer: von seinen u^k (deren jedes ganz in einem U^n liegt) möge keines bereits in einem U^{n-1} liegen, und von den Rand-u^{k-1} seiner u^k (deren jedes ganz in einem U^n oder bereits in einem U^{n-1} liegt) möge keines bereits in einem U^{n-2} liegen.

1. Wir definieren zu L^k den in **0**,2 angekündigten Originalkomplex $\varphi(L^k) \subset R^n - \overline{M}_\varepsilon$. Als Punktmenge legen wir ihm zu Grunde die Originalmenge (bei der Abbildung f) der L^k zu Grunde liegenden Punktmenge; sie ist in $R^n - \overline{M}_\varepsilon$ enthalten. Wir betrachten ihren Durchschnitt mit einem T^n, der doch aus Simplexen t^k zusammengesetzt ist; der wird durch f topologisch abgebildet (siehe letzten Absatz von **1**) auf den Durchschnitt der L^k zu Grunde liegenden Menge mit einem gewissen U^n, der seinerseits wieder aus Simplexen u^k zusammengesetzt ist. Die fraglichen $t^k \subset T^n$ orientieren wir nun so, daß sie auf die zugehörigen $u^k \subset U^n$ vom selben Grade abgebildet werden wie T^n auf U^n. *Es soll also in $f(t^k) = \pm u^k$ und $f(T^n) = \pm U^n$ gleichzeitig das $+$- bzw. $-$-Zeichen stehen* ($t^k \subset T^n$, $u^k \subset U^n$). Schließlich versehen wir jedes dieser t^k mit demselben Koeffizienten, mit dem sein $u^k = f(t^k)$ in L^k auftritt. Die entstehende Linearform in den t^k heiße $\varphi_{T^n}(L^k)$, der Originalkomplex von L^k innerhalb T^n. Wir bilden $\varphi_{T^n}(L^k)$ für jedes T^n und verstehen unter $\varphi_{R^n}(L^k)$ oder kurz $\varphi(L^k)$ die über alle T^n erstreckte Summe $\sum \varphi_{T^n}(L^k)$.

2. Um $f\varphi(L^k)$ zu berechnen, fragen wir uns, wie oft u^k in $f\varphi(u^k)$ auftritt. u^k hat genau so viel φ-Bilder wie $U^n(\supset u^k)$ bei f Originale, jedes wird bei f vom selben Grad abgebildet wie das es enthaltende Original T^n von U^n, die algebraische Summe der Bilder ist also beidemal gleich dem Abbildungsgrad γ von R^n in S^n. Also ist $f\varphi(u^k) = \gamma u^k$, also auch

$$f\varphi(L^k) = \gamma L^k.$$

Diese Gleichung entspricht **0**,2a. Daß **0**,2b, die Distributivität von φ, erfüllt ist, leuchtet aus der Definition unmittelbar ein.

3. Um diese Ergebnisse auf Zyklen anwenden zu können, beweisen wir

$$\Re(\varphi(L^k)) = \varphi(\Re(L^k)).$$

Damit diese Gleichung einen Sinn hat, muß die obige Bedingung allgemeiner Lage auch für $\Re(L^k)$ gelten. Doch läßt sich auch ohne diese Voraussetzung die Gleichung beweisen [11]), wenn man $\varphi(\Re(L^k))$ eine Bedeutung gibt, die eine Verallgemeinerung *der* Bedeutung ist, die $\varphi(\Re(L^k))$ im Falle allgemeiner Lage hat. φ ist für ein u^{k-1}, das ganz in einem U^n, aber noch nicht in einem U^{n-1} liegt, wie oben definiert. Alle übrigen u^{k-1} von $\Re(L^k)$ befinden sich wegen der allgemeinen Lage von L^k in gewissen U^{n-1}, keines aber bereits in einem U^{n-2}. Für diese u^{k-1} treffen wir die folgende Festsetzung: Sei T^{n-1} eines der Originale von U^{n-1} $(\supset u^{k-1})$; T^{n-1} ist, da L^k in $S^n - \overline{N}_\varepsilon$ liegt, kein Randsimplex von $R_n - \overline{M}_\varepsilon$; T_1^n und T_2^n seien die beiden T^n, auf denen es liegt. Sind beide mit *gleichem* Vorzeichen in S^n abgebildet, so orientieren wir das Original t^{k-1} von u^{k-1} so, daß es auch mit diesem Vorzeichen durch f abgebildet wird; sind dagegen T_1^n und T_2^n mit verschiedenen Vorzeichnen in S^n abgebildet, so bekommt t^{k-1} den Koeffizienten null, wird also in den zu definierenden Komplex $\varphi(\Re(L^k))$ nicht aufgenommen. Weiter verfahren wir wie früher; wir geben also, um $\varphi(\Re(L^k))$ zu erklären, jedem t^{k-1} denselben Koeffizienten, den sein f-Bild in $\Re(L^k)$ hat, und summieren über alle T^n (wobei es wegen unserer Festsetzung gleichgültig ist, in welches der beiden anstoßenden T^n wir ein t^{k-1} aufnehmen, das bereits auf einem T^{n-1} liegt).

Die zu beweisende Gleichung ist trivial für *die* t^{k-1}, die nicht bereits in einem T^{n-1} liegen, denn alles, was an sie anstößt, ist eine ganz genaue Repräsentation seines f-Bildes (nur das Vorzeichen kann — aber dann bei allen zugleich — umgekehrt sein). Das Gleiche gilt aber noch für ein t^{k-1}, das auf einem T^{n-1} liegt, wenn die anstoßenden T_ν^n mit gleichem Vorzeichen abgebildet werden; dann ist $T_1^n + T_2^n$ eine ganz genaue Repräsentation seines f-Bildes. Sind dagegen die Vorzeichen verschieden, so kann einerseits in $\Re(\varphi(L^k))$ dies t^{k-1} nicht auftreten, weil es zu jedem t_1^k in T_1^n ein t_2^k in T_2^n gibt, die beide auf dasselbe u^k, aber mit verschiedenem Vorzeichen abgebildet werden, nach unserer Festsetzung also spiegelbildlich orientiert sind, das ihnen gemein-

[11]) Man könnte diese Verallgemeinerung aber auch umgehen.

same t^{k-1} somit bei der Randbildung wegfällt; andererseits ist aber nach unserer Festsetzung dies t^{k-1} auch in $\varphi(\Re(L^k))$ nicht vertreten.

4. Aus der eben bewiesenen Gleichung folgt, daß, wenn das in allgemeiner Lage befindliche L^k ein Zyklus ist (man ergänze in diesem Zusammenhang stets „mod. m, $m=0, 2, 3, \ldots$"), daß dann auch $\varphi(L^k)$ ein Zyklus ist, und daß, wenn ein Zyklus Z^k in $S^n-\bar{N}_\varepsilon$ ein L^{k+1} in allgemeiner Lage berandet, auch sein $\varphi(Z^k)$ in $R^n-\overline{M}_\varepsilon$ berandet. Nun läßt sich aber durch beliebig kleine Änderungen jeder Zyklus in allgemeine Lage bringen (er bleibt dabei sich selbst homolog), und es läßt sich die von einem nullhomologen Zyklus berandete Linearform in allgemeine Lage versetzen. Es liegt also tatsächlich ein Homomorphismus der Bettischen Gruppe (nach irgendeinem Modul) von $S^n-\bar{N}_\varepsilon$ in die von $R^n-\overline{M}_\varepsilon$ vor.

5. Unbefriedigend ist hierbei nur doch, daß in der Definition des Homomorphismus eine Willkür steckt; man weiß noch nicht, ob der in **1** an einem beliebigen f ausgeführte Abänderungsprozeß doch immer zum gleichen Homomorphismus führt. Wir werden aber in **3** eine noch viel weiter gehende Behauptung beweisen. Nehmen wir diese Unabhängigkeit für den Augenblick als bewiesen an, so können wir uns auch noch von dem bis jetzt mitgeschleppten ε frei machen.

Betrachten wir nämlich eine Nullfolge ε_ν mit den zugehörigen ineinandergeschachtelten M_{ε_ν}! Dann ist $\mathfrak{B}(R^n-M)$ die Limesgruppe der Homomorphismenfolge [12])

$$\mathfrak{B}(R^n-\overline{M}_{\varepsilon_1}) \to \mathfrak{B}(R^n-\overline{M}_{\varepsilon_2}) \to \ldots,$$

und entsprechend ist $\mathfrak{B}(S^n-N)$ erklärt. In dem Schema

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}(S^n-\overline{N}_{\varepsilon_\nu}) & \to & \mathfrak{B}(S^n-\overline{N}_{\varepsilon_{\nu+1}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{B}(R^n-\overline{M}_{\varepsilon_\nu}) & \to & \mathfrak{B}(R^n-\overline{M}_{\varepsilon_{\nu+1}}) \end{array}$$

entsteht nun, welchen Weg man auch von links oben nach rechts unten einschlägt, aus einem Zyklus Z^k stets sein Original bei der Abbildung f, also aus einem Element von $\mathfrak{B}(S^n-\overline{N}_{\varepsilon_\nu})$ stets dasselbe Element von $B(R-\overline{M}_{\varepsilon_{\nu+1}})$. Wir dürfen also tatsächlich von einem Homomorphismus der Homomorphismenfolgen [13]), also auch der Limesgruppen sprechen.

[12]) l.c. [1]).

[13]) H. Freudenthal (Compositio Mathematica **2** (1935), [18] 151).

Ein f mit $f(M) \subset N$, $f(R^n) \subset S^n$ erzeugt also einen Homomorphismus in umgekehrter Richtung zwischen den Bettischen Gruppen der Außenräume, die „Umkehrung" von f. Man beachte aber, daß f selbst im Allgemeinen keinen Homomorphismus von $\mathfrak{B}(R^n - M)$ in $\mathfrak{B}(S^n - N)$ induziert; zwar ist

$$f\varphi(Z^k) \backsim \gamma Z^k \quad \text{in } S^n - N,$$

aber es braucht keineswegs aus $Z^k \backsim 0$ in $R^n - M$ auch $f(Z^k) \backsim 0$ in $S^n - N$ zu folgen!

Wir bemerken noch, daß, wie man leicht sieht, das definierte φ auch distributiv in bezug auf den Schnitt zweier Linearformen ist. Diese Tatsache zieht für den Schnittring und die Verschlingungsgrößen ähnliche Homomorphismuseigenschaften nach sich, wie wir sie eben für die Bettischen Gruppen bewiesen haben.

3. Der Umkehrungshomomorphismus hängt nun nicht allein von dem gegebenen $f(M) \subset N$ ab, sondern auch davon, wie wir f auf R^n fortgesetzt haben. Wir werden aber nun zeigen, daß er nur von der Relativklasse der Fortsetzung abhängt. Wir rechnen dabei f_0 und f_1, die wir bereits den Modifikationen von **1** unterworfen haben, zur selben Relativklasse, wenn f_τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ existiert mit $f_\tau(M) \subset N$, $f_\tau(R^n) \subset S^n$. Wir zeigen also, daß für die Umkehrungen die Homologie $\varphi_0(Z^k) \backsim \varphi_1(Z^k)$ in $R^n - M$ gilt. Darin steckt dann auch die Unabhängigkeit des Umkehrungshomomorphismus von der Art, wie f approximiert wurde.

Wir betrachten den Produktraum $(0 \leqq \tau \leqq 1) \times R^n$, in ihm soll die Produktmetrik von $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ und R^n gelten; es ist klar, wie dann die Begriffe Gerade usw. zu verstehen sind.

Auf der Gesamtheit der T^n des Produktraumes ändern wir $f(a, \tau) = f_\tau(a)$ gemäß **1** so ab, daß es dabei für $\tau = 0$, $\tau = 1$ und für alle $0 \leqq \tau \leqq 1$ mit $a \subset M$ unverändert bleibt; das erfordert vielleicht eine Zerschlagung der T^n in t^n, jedoch zerschlagen wir die T^{n+1} nicht. $s^n = \mathfrak{R}(T^{n+1})$ ist eine Sphäre, $\varphi_{s^n}(Z^k)$ ist für $Z^k \subset S^n - N$ also definiert und, wie wir in **2**,**4** gezeigt haben, ein Zyklus. Unter $\varphi_{T^{n+1}}(Z^k)$ verstehen wir irgend einen von $\varphi_{s^n}(Z^k)$ berandeten Komplex aus T^{n+1} und unter $\varphi^*(Z^k)$ die über alle T^{n+1} erstreckte Summe $\sum \varphi_{T^{n+1}}(Z^k)$; wir denken uns dabei die T^{n+1} von vornherein so orientiert, daß ihre Summe $0 \times R^n - 1 \times R^n$ ist.

Dann ist

$$\mathfrak{R}(\varphi^*(Z^k)) = \mathfrak{R}(\sum \varphi_{T^{n+1}}(Z^k)) = \sum \mathfrak{R}(\varphi_{T^{n+1}}(Z^k)) = \sum \varphi_{s^n}(Z^k),$$

wobei die letzte Summe über alle $s^n = \mathfrak{R}(T^n)$ zu erstrecken ist.

Für die letzte Summe kann man nun, wie man mit beinah denselben Betrachtungen wie in **2**,1 leicht einsieht, auch $\varphi_{\sum s^n}(Z^k)$ schreiben. Σs^n ist aber $= \Sigma\, \mathfrak{R}(T^{n+1}) = \mathfrak{R}(\Sigma\, T^{n+1}) = 0 \times R^n - 1 \times R^n$. Also ist tatsächlich

$$\mathfrak{R}(\varphi^*(Z^k)) = \varphi_0(Z^k) - \varphi_1(Z^k),$$

und da Z^k in $S^n - N$ lag, liegt $\varphi^*(Z^k)$ in $(0 \leqq \tau \leqq 1) \times (R^n - M)$. Die angekündigte Homologie ist also bewiesen.

4. Siehe den Abschnitt **0**,4 der Beweisskizze, der keiner Erläuterung bedarf. Wir bemerken nur noch, daß sich nach **2**,6 ebenso die Isomorphie des Schnittringes und die Gleichheit der Verschlingungsgrößen ergibt.

5. Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen den Klassen von M in N, den Klassen von R^n in S^n und den Relativklassen, wie er durch den Prozeß der Fortsetzung erklärt ist.

1. Zwei Abbildungen derselben Relativklasse gehören natürlich zur selben Klasse von M in N. Um zu untersuchen, in welcher Weise die Relativklassen zu Klassen zusammengefaßt sind, betrachten wir jetzt zwei Abbildungen h_0 und h_1, die zur gleichen Klasse von M in N gehören, aber vielleicht zu verschiedenen Relativklassen. Wir dürfen annehmen, daß sie auf M überhaupt übereinstimmen, denn analog zu **1**,1 kann man zeigen [14]), daß sich die Abbildung $h_\tau(R^n) \subset S^n$, die für $\tau = 0$ auf R^n und für alle τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, auf M gegeben ist, für alle τ, $0 \leqq \tau \leqq 1$, auf ganz R^n fortsetzen läßt (man braucht nur dieselben Betrachtungen wie dort für den Produktraum durchzuführen). An Stelle von h_0 dürfen wir also das eben gewonnene, zur gleichen Relativklasse gehörige h_1 verwenden, das wir von nun an wieder h_0 nennen.

Wir beschäftigen uns jetzt also mit zwei Abbildungen h_0 und h_1, die auf M *übereinstimmen*, und zwar zunächst für den Fall, daß R^n durch M *nicht zerlegt* wird. Wir wollen zeigen, daß *sie dann und nur dann zur gleichen Relativklasse gehören, wenn sie zur gleichen Klasse von* R^n *in* S^n *gehören*, d.h. *wenn sie denselben Abbildungsgrad* γ *besitzen.*

2. Daß die Identität der Abbildungsgrade notwendig ist, ist klar, wir zeigen nun, daß sie hinreichend ist. Wir dürfen h_0 und h_1 außerhalb einer Umgebung von M wieder als simplizial voraussetzen. $a \not\subset N$ sei innerer Punkt eines Simplexes U^n von S^n.

---

[14]) Siehe auch [10]).

Seine (endlich vielen) Originale bei h_0 und h_1 (die nicht in der Umgebung von M liegen können) umgeben wir mit einem Element E, das M nicht trifft; da M nicht zerlegt, geht das [15]). Das Bild von E bei h_0 und das Bild bei h_1 zusammen überdeckt bei geeigneter Wahl von E nicht ganz S^n; wir umgeben $h_0(E)+h_1(E)$ mit einer genügend großen Vollkugel um a und ändern h_0 und h_1 in der Weise ab, daß wir diese Vollkugel in U^n hineinpressen; auf M hat sich dabei nichts geändert. Dann approximieren wir wieder simplizial wie oben; hat man dabei R^n so zerschlagen, daß der Rand von E aus lauter T^{n-1} besteht, so ist der Rand von E nun in den Rand von U^n abgebildet (und E selbst in U^n). Da alle Originale von a in E vereinigt liegen, ist bei beiden Abbildungen, wenn sie zur gleichen Klasse von R^n in S^n gehören, E vom gleichen Grade in (U^n) abgebildet. Wir können also beide Abbildungen unter Festhaltung auf dem Rande und außerhalb von E so abänderen [16]), daß sie auf der Originalmenge einer Vollkugel V aus U^n Punkt für Punkt übereinstimmen. Wir führen nun die beiden Abbildungen, die wir wieder h_0 und h_1 nennen, unter Festhaltung auf M ineinander über, und zwar halten wir sie auf $h_0^{-1}(V)=h_1^{-1}(V)$ fest und lassen für alle anderen p das Bild $h_0(p)$ gleichförmig in das Bild $h_1(p)$ auf dem Kreis laufen, der $h_0(p)$ mit $h_1(p)$ verbindet und zum Rande von V orthogonal ist; dabei machen wir von *dem* Teilbogen Gebrauch, der V *nicht* trifft. Auf M ändert sich dabei nichts.

3. Zerlegt M, so ist der Beweis nicht stichhaltig (und die Behauptung auch nicht richtig), weil das zu M fremde Element E dann nicht notwendig existiert. Die (algebraisch genommene) Anzahl der Originale von a in der Komponente C_ν $(\nu=0, 1, \ldots < < c+1 \leqq \infty)$ von $R^n - M$ heiße $\gamma_\nu(h)$; für ein festes h verschwinden fast alle γ_ν. Mit den in **2** eingeführten Bezeichnungen können wir auch sagen:

$$\varphi(a) = \Sigma\, \gamma_\nu C_\nu;$$

---

[15]) Zur Konstruktion dieses Elements siehe etwa l.c. [13]), ([25] 158).

[16]) Das geschieht etwa so: Es liegen zwei Abbildungen h_0 und h_1 einer Vollkugel (E) auf eine andere Vollkugel (U) vor, bei der der Rand auf den Rand abgebildet wird. Die Abbildungsgrade der Vollkugeln stimmen überein, also auch die der Randsphären; es gibt also eine Überführung $h_\tau(\Re(E)) \subset \Re(U)$. E möge etwa den Radius eins haben, und ϱ möge den Abstand irgend eines Punktes von E von Mittelpunkt bezeichnen; die Punkte eines festen Radius von E lassen sich dann durch den Parameter ϱ $(0 \leqq \varrho \leqq 1)$ beschreiben. Für jeden festen Radius definieren wir h_0^* und h_1^* (das sollen die abgeänderten h_0 und h_1 sein) durch $h_0^*(\varrho) = h_1^*(\varrho) = h_1(2\varrho)$, wenn $\varrho \leqq \frac{1}{2}$ ist, und sonst $h_0^*(\varrho) = h_{2-2\varrho}(1)$, $h_1^*(\varrho) = h_1(1)$.

dabei vertritt die Komponente C_ν einen nulldimensionalen Zyklus. Die Summe der γ_ν ist der Abbildungsgrad γ von R^n in S^n.

Daß $\gamma_\nu(h_0) = \gamma_\nu(h_1)$ hinreicht für die Gleichheit der Relativklassen von h_0 und h_1, sieht man genau so ein wie im Falle, daß M nicht zerlegt (siehe **2**), man bringt in jeder Komponente einzeln die Abbildungen zur Übereinstimmung; daß sie notwendig ist, folgt aus dem Satz von **3** (siehe **0**,**3**).

Wenn die Klasse von M in N gegeben ist, charakterisieren die γ_ν die fortsetzende Relativklasse vollständig; ihre Anzahl ist gleich der Komponentenzahl von $R^n - M$; ihre Werte lassen sich (bei gegebener Klasse von M in N) unabhängig voneinander vorschreiben.

Der letzte Teil dieses Satzes ist noch zu beweisen: Durch den Prozeß des Umklappens (siehe **1**,**4**) läßt sich, wenn man von einem h ausgeht, jedes γ_ν beliebig oft um ± 1 vermindern; wir brauchen nur für alle Punkte eines Simplexes aus C_ν, das vom Grade ± 1 auf das a enthaltende Simplex (Vollkugel) abgebildet wird, den Bildpunkt am Rande der Vollkugel zu spiegeln.

4. Es sei nun $h(M) \subset N$, $h(R^n) \subset S^n$; die Komponenten von $S^n - N$ mögen D_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ heißen. Die „Umkehrung" von f lautet dann:

$$\varphi(D_\varrho) = \sum_\nu \gamma_{\nu\varrho} C_\nu$$

(es handelt sich hier immer um endliche Summen). Wenn die Klasse von M in N gegeben ist, bestimmen nach **3** die $\gamma_{\nu 0} = \gamma_\nu$ bereits die Relativklasse, also auch die ganze Matrix $(\gamma_{\nu\varrho})$. Durch wiederholtes Umklappen erhält man alle Systeme $\gamma_{\nu\varrho}$, die zu $h(M) \subset N$ gehören; bei diesem Prozeß ändern sich aber für ein festes ν alle $\gamma_{\nu\varrho}$ gleichzeitig um dasselbe $\varkappa_\nu$. Man erhält also alle Systeme $\gamma_{\nu\varrho}$, die zu $h(M) \subset N$ gehören, aus einem speziellen, $\gamma^0_{\nu\varrho}$, vermöge

$$\gamma_{\nu\varrho} = \gamma^0_{\nu\varrho} + \varkappa_\nu .$$

Ist speziell $M = N$, $R^n = S^n$, $h(M)$ die Identität, so lassen sich alle Systeme $\gamma_{\nu\varrho}$ in der Form

$$\gamma_{\nu\varrho} = \delta_{\nu\varrho} + \varkappa_\nu , \quad \delta_{\nu\varrho} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \text{ für } \begin{matrix} \nu = \varrho \\ \nu \neq \varrho \end{matrix},$$

schreiben. Ist obendrein der Grad von $h(R^n) \subset S^n$ eins, so ist noch

$$\sum \varkappa_\nu = 0.$$

Zu dieser Matrix, die zwar unendlich sein kann, kann man ohne weiteres eine gleichartige (spaltenfinite) inverse bilden,

$$\beta_{\varrho\mu} = \delta_{\varrho\mu} - \varkappa_\varrho ,$$

so daß also $\sum_{\varrho} \gamma_{\nu\varrho} \beta_{\varrho\mu}$ die Einheitsmatrix ist. Man braucht sich aber nur um $\beta_{\varrho 0}$ zu kümmern. Man kann nach 3

$$\psi(C_0) = \sum_{\varrho} \beta_{\varrho 0} C_{\varrho}$$

durch eine Abbildung $k(M) =$ Identität, $k(R^n) \subset S^n$ realisieren. Zu kh gehört dann als „Umkehrung"

$$\varphi \psi(C_0) = \sum_{\varrho} \beta_{\varrho 0} \gamma_{\nu\varrho} C_{\nu} = C_0,$$

also ist kh nach 3 in der Relativklasse der Identität.

5. Es läßt sich also für $M = N$, $R^n = S^n$ zu gegebenem h, das auf M die Identität ist und R^n vom Grade eins abbildet, ein k finden, so daß kh zur Relativklasse der Identität gehört. Dasselbe kann man aber feststellen, wenn M nur homöomorph mit N ist. Dann bestimme man zu der Homöomorphie $h(M) = N$ und ihrer Fortsetzung $h(R^n) \subset S^n$, die vom Grade eins sei, zunächst irgend ein h' mit $h'(N) = M$, $h'(S^n) \subset R^n$, so daß $h'h$ auf M die Identität ist, wende das soeben Bewiesene auf $h'h$ an, bestimme also zu $h'h$ ein k' mit $k'(M) =$ Identität, $k'(R^n) \subset R^n$, so daß $k' \cdot h'h$ zur Relativklasse der Identität gehört. Es läßt sich also tatsächlich zu gegebenem h mit $h(M) = N$, $h(R^n) \subset S^n$, das M eineindeutig auf N und R^n vom Grade eins auf S^n abbildet, ein k, nämlich $k'h'$, bestimmen, so daß kh zur Relativklasse der Identität gehört.

6. Kehren wir nun zu unserer Beweislücke in **4** (siehe **0**,4) zurück. Die gegebene Homöomorphie $f(M) = N$ setzen wir (siehe **1**,4) mit dem Grad eins auf R^n fort und bestimmen (siehe **5**,5) zu f ein g, so daß gf zur Klasse der Identität von R^n rel. M gehört, ebenso zu g ein h, so daß hg zur Klasse der Identität von S^n rel. N gehört (da g notwendig vom Grade eins ist, ist das möglich). Die zu f, g, h gehörigen „Umkehrungen" φ, ψ, χ haben dann nach (**0**,2d und **0**,3) folgende Eigenschaften: $\varphi\psi$ ist der identische Homomorphismus von $\mathfrak{B}(R^n - M)$ in sich, $\psi\chi$ der identische Homomorphismus von $\mathfrak{B}(S^n - N)$ in sich. ψ bildet also einerseits $\mathfrak{B}(R^n - M)$ isomorph auf eine Untergruppe von $\mathfrak{B}(S^n - N)$ ab, andererseits eine Untergruppe von $\mathfrak{B}(R^n - M)$ isomorph auf $\mathfrak{B}(S^n - N)$; ψ vermittelt also tatsächlich einen Isomorphismus zwischen den Bettischen Gruppen der Außenräume.

7. Zum Schluß sei noch zu 4 bemerkt, daß sich durch die „Koordinatentransformation"

$$D_{\varrho} - D_0 = D^*_{\varrho}, \quad C_{\varrho} - C_0 = C^*_{\varrho}$$

die $\varkappa_\nu$, also die Wirkung der *Relativ*klassen auf die $\gamma_{\nu\varrho}$, eliminieren lassen. Die linearen Transformationen

$$\varphi(D_\lambda^*) = \sum_\nu \gamma_{\nu\varrho}^* C_\nu^*$$

stellen dann die Klassen von M in N dar, genauer: die Faktorgruppe nach den zur identischen Klasse gehörenden Relativklassen; sie hängen natürlich mit den von diesen Klassen induzierten Abbildungen der $\mathfrak{B}(M)$ in die $\mathfrak{B}(N)$ eng zusammen. Man beachte jedoch, daß nicht jedes System $(\gamma_{\nu\varrho}^*)$ geometrisch realisierbar sein muß.

(Eingegangen den 29. April 1934. Nachträglich, 2. Juli 1934, eingefügt die Fußnoten [1a]), [2]), [4a]), [10]), [16]), abgeändert Abschnitte 5, 5, 6.)