R. WEITZENBÖCK

Über die Endlichkeit der *A*-Invarianten

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 228-237
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__228_0>

Über die Endlichkeit der A-Invarianten

von

R. Weitzenböck

Laren (Noordholland)

Einleitung. Die Ermittlung der ganzen rationalen Invarianten von gegebenen n-ären Formen bezüglich einer r-gliedrigen Gruppe linearer homogener Transformationen führt auf die höchstens r-malige Lösung der beiden Aufgaben: 1. Bestimmung eines vollen Systems von linear-unabhängigen A-Invarianten J eines Punktes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (Vektors) bezüglich einer *einzelnen* infinitesimalen Transformation $A(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k$; 2. Bestimmung eines vollen Systems von linear-unabhängigen *absoluten* A-Invarianten K. Die Invarianten J ergeben sich als Semi-Invarianten binärer Formen; die Invarianten K erfordern die Konstruktion der Basislösungen eines Systems von diophantischen Gleichungen [1]).

Der Endlichkeitsbeweis für die A-Invarianten J und K ist erst dann konstruktiv zu nennen, wenn man für die Invarianten eines vollen Systems eine obere Grenze S für den Grad in den Koeffizienten der Grundformen angeben kann. Dies erfordert die entsprechende Schrankenermittlung bei den eben genannten Aufgaben 1 und 2. Bei der ersteren kann man Gebrauch machen von einem allgemeinen Satze, den ich vor kurzem über die projektiven Invarianten binärer Formen bewiesen habe [2]). Bei der letzteren führt eine von F. Mertens [3]) gegebene Basiskonstruktion für die Lösungen einer diophantischen Gleichung, verbunden mit einigen algebraischen Erweiterungen, zur Bestimmung der genannten Schranke.

Es sei betont, daß die hier gegebenen Schranken nur von theoretischem Werte sind; sie sind nämlich viel zu hoch. Aber es handelt sich ja schließlich nur um die tatsächliche Angeb-

---

[1]) Ausführlich dargestellt in: Acta math. **58** (1932), 231—293.

[2]) Proceed. Edinburgh Mathem. Soc. (2) **3** (1933), 223—230.

[3]) Journal f. r. u. angew. Math. **100** (1887), 223—230.

barkeit einer endlichen natürlichen Zahl, die nur von n und den Größen a_i^k aus $A(f)$ abhängt und berechnet werden kann, ohne daß man die A-Invarianten J und K wirklich ermittelt.

§ 1. Bringt man die n-reihige Matrix $\|a_i^k\|$ der Koeffizienten einer infinitesimalen Transformation $A(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k$ in die Jordansche Normalform und sind $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$ mit $\Sigma\delta_i = n$ die dabei auftretenden Feldzahlen, von denen $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_\sigma}$ größer als 1 seien, so fällt die Bestimmung aller A-Invarianten eines Punktes x zusammen mit der Ermittlung eines vollen Systems von Semi-Invarianten von σ binären Formen f_{i_h} der Grade $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_\sigma}$ [4]).

Man hat also ein volles System von *projektiven* Invarianten J der σ Formen f_{i_h} und einer Linearform L. Die Anzahl dieser J, ihr Grad in den Koeffizienten der f_{i_h} und also auch der Grad in den x_i des Punktes x ist dann

$$(1) \qquad < N' = \varphi_{d+1}(s^2+1),$$

wo

$$(2) \qquad s = \sigma+1,$$

$$(3) \qquad d+1 = (\delta_{i_1}+\delta_{i_2}+\ldots+\delta_{i_\sigma}+1)-(\sigma+1)+1 = \Sigma\delta_{i_h}-\sigma+1$$

und φ_{d+1} die $(d+1)$-fach iterierte Funktion $\varphi(u) = u^{10u^3}$ bedeutet [5]).

Die Anzahl der Basisinvarianten für alle A-Invarianten sowie deren Grad in den x_i wird dann

$$(4) \qquad < N_1 = N'+\nu-\sigma.$$

Da $d+1$ stets $< n$ und s höchstens $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ sein kann, ist $s^2+1 \leqq n^2$, woraus sich mit sehr grober Abrundung nach oben

$$(5) \qquad N_1 < \varphi_n(n^2)$$

ergibt. Für die Anzahl der linear-unabhängigen A-Invarianten eines vollen Systems findet man dann die obere Schranke

$$N = \binom{N_1+(n-1)}{n} + \binom{(N_1-1)+(n-1)}{n} + \ldots +$$
$$+ \binom{2+(n-1)}{n} + \binom{1+(n-1)}{n} = 1 + \binom{N_1+n}{N_1-1},$$

also nach (5):

$$(6) \qquad N < (n+\varphi_n(n^2))\,!.$$

---

[4]) Bzgl. dieser Begriffsbildungen vgl. [1]).

[5]) Vgl. [2]).

Hiermit ist eine obere Schranke für die erste der oben genannten Aufgaben gefunden und wir haben den *Satz* 1:

Ist $A(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k$ *eine infinitesimale Transformation in* n *Veränderlichen* x_i, *so bilden alle ganzen und rationalen* A*-Invarianten, d.h. alle Polynome* I *der* x_i, *wofür* $A(J) = \Lambda \cdot J$ *gilt, einen endlichen Integritätsbereich mit weniger als* $(n+\varphi_n(n^2))!$ *linear-unabhängigen Basisinvarianten* J_ν *und der Grad jedes* J_ν *in den* x_i *ist* $< \varphi_n(n^2)$.

§ 2. Bilden $J_1, J_2, \ldots, J_N$ ein volles System von linear-unabhängigen A-Invarianten und gehört zu J_h der Multiplikator Λ_h, d.h. ist $A(J_h) = \Lambda_h \cdot J_h$, so ergeben sich die *absoluten* A-Invarianten K in der Gestalt

$$K = J_1^{p_1} J_2^{p_2} \ldots J_N^{p_N} \qquad \text{mit}$$

$$(7) \qquad p_1\Lambda_1 + p_2\Lambda_2 + \ldots + p_N\Lambda_N = 0 \qquad (p_i \geqq 0).$$

Man hat also für diese Gleichungen alle Basislösungen zu finden.

Wir sondern zuerst alle Λ_h ab, die Null sind: J_h ist dann bereits eine absolute Invariante K und in (7) fehlt das Glied $p_h\Lambda_h$. Wir nehmen fernerhin an, daß wenigstens zwei der Multiplikatoren $\neq 0$ sind. Dann seien $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\varrho$ rational-unabhängig, dagegen $\Lambda_{\varrho+1}, \Lambda_{\varrho+2}, \ldots, \Lambda_N$ rational-abhängig von $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\varrho$, d.h. es sei mit rationalen Koeffizienten

$$\Lambda_{\varrho+i} = r_{1i}\Lambda_1 + r_{2i}\Lambda_2 + \ldots + r_{\varrho i}\Lambda_\varrho \qquad (i=1,2,\ldots,N-\varrho) \qquad (1 \leqq \varrho \leqq N-1).$$

Setzen wir dies in (7) ein und machen die Koeffizienten ganz, so entstehen ϱ Gleichungen der Gestalt:

$$(8) \quad p_1 g_{1j} + p_2 g_{2j} + \ldots + p_N g_{Nj} = 0 \qquad (j=1,2,\ldots,\varrho) \qquad (1 \leqq \varrho \leqq N)$$

mit ganzen rationalen g_{ij}. Ist $\varrho = N$, so hat (7) nur die Lösung $p_i = 0$. In (8) lassen wir alle die Gleichungen weg, in denen alle Koeffizienten $g_{ij} \geqq 0$ sind. Sie geben nämlich auch $p_i = 0$. Die übrig bleibenden Gleichungen schreiben wir dann in der Gestalt

$$(9) \quad a_1^{(j)}\alpha_1 + a_2^{(j)}\alpha_2 + \ldots + a_{\nu_j}^{(j)}\alpha_{\nu_j} = b_1^{(j)}\beta_1 + b_2^{(j)}\beta_2 + \ldots + b_{\sigma_j}^{(j)}\beta_{\sigma_j}$$
$$a_i^{(j)} > 0, \quad b_i^{(j)} > 0, \quad \nu_j + \sigma_j < N \qquad (j=1,2,\ldots,\varrho) \qquad (1 \leqq \varrho \leqq N-1),$$

d.h. wir ersetzen die positiven g_{ij} von (8) durch $a_i^{(j)}$, die negativen g_{ij} durch $-b_i^{(j)}$ und die dabei gehörigen p_i durch $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu_j}$ resp. $\beta_1, \ldots, \beta_{\sigma_j}$.

(9) ist dann ein System von höchstens $N-1$ diophantischen Gleichungen, wovon die Basislösungen zu finden sind.

Wir gehen von der ersten der Gleichungen (9) aus. Nach F. Mertens gibt es $\tau = \tau_1 + \tau_2$ Basislösungen und zwar erstens

$$\tau_1 = \nu_1 \sigma_1 < \tfrac{1}{4} N^2$$

Lösungen der Gestalt

$$\alpha_i = \frac{b_k^{(1)}}{t_{ik}}, \qquad \beta_k = \frac{a_i^{(1)}}{t_{ik}},$$

wo t_{ik} der größte gem. Teiler von $a_i^{(1)}$ und $b_k^{(1)}$ ist; zweitens τ_2 Basislösungen, bei welchen die Zahl

$$S^{(1)} = a_1^{(1)} \alpha_1 + \ldots + a_{\nu_1}^{(1)} \alpha_{\nu_1}$$

höchstens gleich $\sum_{i=1}^{\nu_1} \sum_{k=1}^{\sigma_1} \frac{a_i^{(1)} b_k^{(1)}}{t_{ik}} - \nu_1 \sigma_1$ wird. Nennen wir M_1 die größte der Zahlen $a_i^{(1)}$ und $b_i^{(1)}$, dann ist also

$$S^{(1)} \leqq \sum_{i=1}^{\nu_1} \sum_{k=1}^{\sigma_1} a_i^{(1)} b_k^{(1)} - \nu_1 \sigma_1 \leqq \nu_1 \sigma_1 (M_1^2 - 1)$$

$$S^{(1)} < \frac{N^2}{4} (M_1^2 - 1) < \tfrac{1}{4} N^2 M_1^2;$$

Somit wird, da $a_i^{(1)}$ und $b_k^{(1)}$ wenigstens 1 sind, für alle τ Lösungen

$$\text{(10)} \qquad \alpha_i < \frac{N^2}{4} M_1^2, \qquad \beta_k < \frac{N^2}{4} M_1^2$$

und die Anzahl τ der Lösungen ist daher $< (\frac{1}{4} N^2 M_1^2)^{\nu_1 \sigma_1}$, also auch

$$\text{(11)} \qquad \tau < (\tfrac{1}{4} N^2 M_1^2)^{\frac{1}{4} N^2}.$$

Ist $\varrho > 1$, so gehen wir zur zweiten der Gleichungen (9) weiter:

$$\text{(12)} \qquad a_1^{(2)} \alpha_1 + \ldots + a_{\nu_2}^{(2)} \alpha_{\nu_2} = b_1^{(2)} \beta_1 + \ldots + b_{\sigma_2}^{(2)} \beta_{\sigma_2}.$$

Sind $\alpha_i', \alpha_i'', \ldots, \alpha_i^{(\tau)}$ und $\beta_k', \beta_k'', \ldots, \beta_k^{(\tau)}$ die τ Basislösungen der ersten Gleichung (9), so wird die allgemeinste Lösung dieser Gleichung mit nicht-negativen q_i dargestellt durch:

$$\begin{cases} \alpha_i = q_1 \alpha_i' + q_2 \alpha_i'' + \ldots + q_\tau \alpha_i^{(\tau)} \\ \beta_k = q_1 \beta_k' + q_2 \beta_k'' + \ldots + q_\tau \beta_k^{(\tau)}. \end{cases}$$

Dies in (12) eingesetzt gibt:

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{s=1}^{\tau} q_s \left(a_1^{(2)} \alpha_1^{(s)} + a_2^{(2)} \alpha_2^{s} + \ldots + a_{\nu_2}^{(2)} \alpha_{\nu_2}^{(s)}\right) = \\ &= \sum_{s=1}^{\tau} q_s \left(b_1^{(2)} \beta_1^{(s)} + b_2^{(2)} \beta_2^{(s)} + \ldots + b_{\sigma_2}^{(2)} \beta_{\sigma_2}^{(s)}\right). \end{aligned}$$

Dies führt also wieder auf eine diophantische Gleichung für höchstens τ Unbekannte und mit Koeffizienten, die nach (10) absolut kleiner sind als

$$2\tau \cdot \tfrac{1}{4}N^2M_1^2 \cdot M_2 < 2M_2(\tfrac{1}{4}N^2M_1^2)^{\frac{1}{4}N^2+1},$$

wo M_2 die größte der Zahlen $a_i^{(2)}$ und $b_k^{(2)}$ bedeutet.

Nennen wir jetzt M das Maximum der Koeffizienten $a_i^{(j)}$ und $b_k^{(j)}$ aller ϱ Gleichungen (9), so können wir sagen: Von den ϱ Gleichungen (9) mit höchstens N Unbekannten und Koeffizienten $K_\varrho \geqq M$ sind wir durch Auflösen der ersten Gleichung übergegangen zu einem System von $\varrho - 1$ Gleichungen mit höchstens τ Unbekannten und Koeffizienten

$$K_{\varrho-1} < 2M \cdot (\tfrac{1}{4}N^2M^2)^{\frac{1}{4}N^2+1}.$$

Runden wir diese Schranke, sowie die von τ (Vgl. (11)) stark nach oben ab, indem wir die größere der beiden Zahlen N und M gleich L setzen, so können wir schreiben:

$$\tau < L^{L^2} \qquad \text{und} \qquad K_{\varrho-1} < L^{L^2+6}.$$

Wir haben dann, wenn wir

$$\psi(L) = \psi_1(L) = L^{L^2+6} \tag{14}$$

setzen, statt der ϱ Gleichungen (9) mit höchstens L Unbekannten und Koeffizienten $K_\varrho < L$ nur noch $\varrho - 1$ Gleichungen mit höchstens $\psi_1(L)$ Unbekannten und Koeffizienten $K_{\varrho-1} < \psi_1(L)$. Von diesen gelangen wir zu $\varrho - 2$ Gleichungen mit höchstens $\psi_2(L) = \psi(\psi(L))$ Unbekannten und Koeffizienten $< \psi_2(L)$ u.s.f. Schließlich kommen wir zu einer Gleichung mit höchstens $\psi_{\varrho-1}(L)$ Unbekannten und Koeffizienten $< \psi_{\varrho-1}(L)$, und diese besitzt höchstens $\psi_\varrho(L)$ Lösungssysteme α_i, β_k, bei denen die Zahlen α_j und β_k kleiner als $\psi_\varrho(L)$ sind.

Wir fassen dies zusammen in *Satz* 2:

Die ϱ diophantischen Gleichungen (9) *mit höchstens L Unbekannten α_i, β_k und Koeffizienten $\leqq L$ haben höchstens $\psi_\varrho(L)$ Basislösungen, deren Zahlen $< \psi_\varrho(L)$ sind. Hierbei ist $\psi_\varrho(L)$ die ϱ-fach iterierte Funktion*

$$\psi(L) = L^{L^2+6}.$$

§ 3. Bei der Aufstellung des Systems der Gleichungen (9) setzten wir voraus, daß man die rationalen Abhängigkeiten der Multiplikatoren Λ_i kennt. Diese Λ_i sind von der Gestalt

$$\Lambda_i = m_{i1}\lambda_1 + m_{i2}\lambda_2 + \dots + m_{in}\lambda_n \qquad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{15}$$

mit ganzen, nicht-negativen m_{ik}, wo die λ_i die Eigenwerte der zur infinitesimalen Transformation $A(f)$ gehörigen Matrix $\| a_i^k \|$, also die Wurzeln der Gleichung

(16) $|\lambda E - A| = D_n(\lambda) = \lambda^n - D_1\lambda^{n-1} + D_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n D_n = 0$

sind.

Die D_1 sind ganze rationale Funktionen der a_i^k, mit ganzen rationalen Koeffizienten. In (15) ist die Summe $\sum\limits_{k=1}^{n} m_{ik}$ gleich dem Grade der zum Multiplikator Λ_i gehörigen A-Invariante J_i. Daher ist nach Satz 1:

$$m_{ik} < \varphi_n(n^2). \tag{17}$$

Wir setzen jetzt voraus, daß man die rationale Abhängigkeit der Eigenwerte λ_i kennt, d.h., wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ rational-unabhängig sind, daß in den Gleichungen

$$\lambda_{h+s} = r_{s1}\lambda_1 + r_{s2}\lambda_2 + \ldots + r_{sh}\lambda_h \qquad (s = 1, 2, \ldots, n-h) \tag{18}$$

die rationalen Zahlen r_{sj} bekannt seien.

Ist dann $\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \Lambda_i = 0$ eine Gleichung (7) und setzt man Λ_i aus (15) ein, so kommt

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (p_1 m_{1k} + p_2 m_{2k} + \ldots + p_N m_{Nk}) = 0.$$

Hier drücken wir die λ_{h+s} nach (18) durch die ersten h λ_i aus:

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \left(\sum_{\nu=1}^{N} p_\nu m_{\nu i} + \sum_{s=1}^{n-h} r_{si} \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu m_{\nu,\, h+s} \right) = 0.$$

Hieraus folgen die h Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{N} p_\nu \left(m_{\nu i} + \sum_{s=1}^{n-h} m_{\nu,\, h+s} r_{si} \right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

oder, wenn wir $r_{si} = \frac{e_{si}}{f_{si}}$ setzen und mit dem Generalnenner aller f_{si} aufmultiplizieren:

$$\sum_{\nu=1}^{N} p_\nu (c_{si} m_{\nu i} + \sum_{s=1}^{n-h} m_{\nu,\, h+s} d_{si}) = \sum_{\nu=1}^{N} p_\nu g_{\nu i} = 0. \tag{19}$$

Wenn wir also die rationale Abhängigkeit der Λ_i nicht, die der Eigenwerte λ_i aber wohl als bekannt voraus setzen, so treten diese Gleichungen an die Stelle von (8). Nennen wir G die größte der ganzen Zahlen $|c_{si}|$ und $|d_{sj}|$, so folgt aus (19):

$$|g_{\nu i}| \leqq G(|m_{\nu i}|_{\max} + (n-h)\,|m_{\nu i}|_{\max}),$$

also nach (17):

$$|g_{\nu i}| < G \cdot n \cdot \varphi_n(n^2). \tag{20}$$

Für die Zahl N haben wir nach (6) die obere Schranke $(n+\varphi_n(n^2))!$ Das L des Satzes 2 ist also jetzt die größere der beiden Zahlen $(n+\varphi_n(n^2))!$ und $G\cdot n\cdot\varphi_n(n^2)$. Es handelt sich daher noch um die Ermittlung einer oberen Schranke für G.

§ 4. Wenn wir in den Gleichungen (18) die Nenner bei den rationalen r_{si} wegschaffen, so entstehen lineare Beziehungen $L_j(\lambda)=0$ zwischen den λ_i mit ganzzahligen Koeffizienten, die absolut $< G$ sind. Umgekehrt ergeben sich die $n-h$ Gleichungen (18) aus $n-h$ rational-unabhängigen Linearformen L_j einer Modulbasis aller ganzzahligen linear-homogenen Relationen

$$L_q = q_1\lambda_1+q_2\lambda_2+\ldots+q_n\lambda_n = 0 \qquad (q_i \gtreqless 0)$$

zwischen den n Eigenwerten λ_i. Es handelt sich also darum, in einer solchen Modulbasis die Koeffizienten ihrer Linearformen abzuschätzen, *ohne die Gleichung* (16) *wirklich aufzulösen.*

Die Koeffizienten D_i in (16) sind ganze Elemente eines gegebenen Zahlkörpers P. Wir konstruieren im Körper $\mathsf{P}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ein primitives Element ϑ der Gestalt

$$\vartheta=\vartheta_1=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+\ldots+c_n\lambda_n\,, \tag{21}$$

bei dem die c_i ganze rationale Zahlen sind [6]). Es genügt für die c_i ganze Zahlen aus dem endlichen Wertevorrat

$$|c_i| < (n+1)! \tag{22}$$

zu nehmen. ϑ genügt dann einer in P *irreduziblen* Gleichung

$$f(\vartheta)=\vartheta^m+b_1\vartheta^{m-1}+\ldots+b_m=(\vartheta-\vartheta_1)(\vartheta-\vartheta_2)\ldots(\vartheta-\vartheta_m)=0 \tag{23}$$

vom Grade m, wo m ein Teiler von $n!$ ist. ($D_n(\lambda)$ braucht in P nicht irreduzibel zu sein.)

Nach einem bekannten Satze über den Maximalbetrag der Wurzeln einer Gleichung [7]) folgt aus (16)

$$|\lambda_i|_{\max} \leqq \operatorname{Max}\left(1, \sum_{i=1}^{n}|D_i|\right)=A \tag{24}$$

und hieraus nach (21) und (22)

$$|\vartheta_i|_{\max} < n\cdot(n+1)!\,A\,. \tag{25}$$

Mit Hilfe des primitiven $\vartheta=\vartheta_1$ ist jede Größe aus $\mathsf{P}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, also auch λ_i in der Gestalt

$$\lambda_i=d_{0i}+d_{1i}\vartheta_1+\ldots+d_{m-1,i}\vartheta_1^{m-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

---

[6]) Diese Methode verdanke ich einer mündlichen Mitteilung des Hernn B. L. van der Waerden.

[7]) Vgl. z.B. Weber, Lehrbuch der Algebra I (2. Aufl.), Braunschweig (1898), 360.

mit in P rationalen d_{ji} darstellbar. Schreiben wir in (26) der Reihe nach die mit ϑ_1 konjugierten $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_m$ statt ϑ_1, so entstehen m Gleichungen, aus denen wir die d_{ji} berechnen können:

$$(27)\quad d_{ji} = \frac{\begin{vmatrix} 1\vartheta_1 \ldots \lambda_i \ldots \vartheta_1^{m-1} \\ 1\vartheta_2 \ldots \lambda_k \ldots \vartheta_2^{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\vartheta_m \ldots \lambda_s \ldots \vartheta_m^{m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1\vartheta_1 \vartheta_1^2 \ldots \vartheta_1^{m-1} \\ 1\vartheta_2 \vartheta_2^2 \ldots \vartheta_2^{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\vartheta_m \vartheta_m^2 \ldots \vartheta_m^{m-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1\vartheta_1 \ldots \lambda_i \ldots \vartheta_1^{m-1} \\ 1\vartheta_2 \ldots \lambda_k \ldots \vartheta_2^{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\vartheta_m \ldots \lambda_s \ldots \vartheta_m^{m-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1\vartheta_1 \vartheta_1^2 \ldots \vartheta_1^{m-1} \\ 1\vartheta_2 \vartheta_2^2 \ldots \vartheta_2^{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\vartheta_m \vartheta_m^2 \ldots \vartheta_m^{m-1} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\gamma_{ji}}{\Delta}.$$

Hier sind die γ_{ji} ganz-rational in P und Δ ist die Diskriminante von (23). Statt (26) haben wir dann

$$(28)\qquad \Delta\lambda_i = \gamma_{0i} + \gamma_{1i}\vartheta + \ldots + \gamma_{m-1,i}\vartheta^{m-1} \qquad (i=1, 3, \ldots, n).$$

Ist nun mit ganzen rationalen q_i $\quad \sum_{i=1}^{n} q_i\lambda_i = 0$ und setzen wir (28) ein, so gibt dies, da ϑ primitiv ist, die m Gleichungen

$$(29)\qquad \begin{cases} q_1\gamma_{01} + q_2\gamma_{02} + \ldots + q_n\gamma_{0n} = 0 \\ q_1\gamma_{11} + q_2\gamma_{12} + \ldots + q_n\gamma_{1n} = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad . \\ q_1\gamma_{m-1,1} + q_2\gamma_{m-1,2} + \ldots + q_n\gamma_{m-1,n} = 0 \end{cases},$$

und eine Lösungsbasis dieser Gleichungen ergibt dann eine Modulbasis für alle L_q. Von den Gleichungen (29) sind, wenn nicht alle $q_i = 0$ sein sollen, höchstens $k \leqq n-1$ linear-unabhängig. Es seien dies die k Gleichungen

$$(30)\qquad q_1\gamma_{\varrho 1} + q_2\gamma_{\varrho 2} + \ldots + q_n\gamma_{\varrho n} = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, k).$$

Die allgemeinste Lösung $q_1, q_2, \ldots, q_n$ dieser k Gleichungen erhält man, wenn man die Matriz $\|\gamma_{\varrho i}\|$ mit k Zeilen und n Kolonnen durch Hinzufügen von $n-k-1$ willkürlichen Zeilen $\alpha_{k+j,1}, \alpha_{k+j,2}, \ldots, \alpha_{k+j,n}$ zu einer Matrix $\mathfrak{M}$ mit $n-1$ Zeilen ergänzt und die q_i gleich den $(n-1)$-reihigen Determinanten dieser Matrix $\mathfrak{M}$ setzt. Die am Ende des vorigen § G genannte Zahl ist dann $\leqq$ dem absoluten Werte des Maximums aller k-reihigen Minoren von $\|\gamma_{\varrho i}\|$, also, wenn wir $|\gamma_{\varrho i}|_{\max} = \gamma$ setzen, nach dem Hadamardschen Determinantensatze:

$$(31)\qquad |q_i| \leqq G \leqq k^{\frac{1}{2}k}\gamma^k < n^{\frac{1}{2}n}\gamma^n.$$

Nach (27) ist nun:

$$\gamma \leqq \operatorname{abs} \begin{vmatrix} 1\,\vartheta_1 \ldots \lambda_i \ldots \vartheta_1^{m-1} \\ 1\,\vartheta_2 \ldots \lambda_k \ldots \vartheta_2^{m-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\,\vartheta_m \ldots \lambda_s \ldots \vartheta_m^{m-1} \end{vmatrix} \cdot \Pi\, |\vartheta_i - \vartheta_k|$$

und hier schätzen wir die Determinante wieder nach dem Hadamardschen Satze ab:

$$\gamma \leqq m^{\frac{1}{2}m}\{\text{Max}\ (1,\ |\vartheta_j|^{m-1},\ |\lambda_k|)\}^m \cdot \Pi\ (2\ |\vartheta_i|_{\max}),$$

also nach (24) und (25):

$$(32) \qquad \gamma < m^{\frac{1}{2}m} \cdot (n(n+1)!\,A)^m \cdot (2n(n+1)!\,A)^{\frac{1}{2}m(m-1)}.$$

Hier ist $m \leqq n!$ und A ist die größte der Zahlen 1 und $\sum\limits_{j=1}^{n} |D_j|$, also auch

$$A \leqq 1 + \sum_{j=1}^{n} |D_j|.$$

Gehen wir bei den Koeffizienten D_i von Gleichung (16) auf die Elemente a_i^k der zur infinitesimalen Transformation $A(f)$ gehörigen Matrix $\|a_i^k\|$ zurück und setzen $|\,a_i^k\,|_{\max} = a$, so ist $D_j \leqq n^j a^j$ und daher

$$(33) \quad A \leqq 1 + \sum_{j=1}^{n} |D_j| \leqq 1 + na + n^2a^2 + \ldots + n^n a^n = \frac{(na)^{n+1} - 1}{na - 1}.$$

§ 5. Wir sind jetzt im Stande, auch für die Anzahl und den Grad der *absoluten* Invarianten K eines Punktes x gegenüber der infinitesimalen Transformation $A(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i^k x_k$ einer obere Schranke S anzugeben, *die nur von n und den a_i^k abhängig ist, und zwar ohne daß man die algebraischen Operationen, die zu den Invarianten K führen, wirklich ausführt.* Hierbei sind noch zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: die a_i^k sind ganze rationale Zahlen. Dann ist nach Satz 2 und (9)

$$(34) \qquad S < L \cdot \psi_{N-1}(L)$$

wo nach Satz 1

$$N < (n + \varphi_n(n^2))!$$

und L die größere der beiden Zahlen $(n+\varphi_n(n^2))!$ und $G \cdot n \cdot \varphi_n(n^2)$ bedeutet. Das G ist nach (31) $< n^{\frac{1}{2}n}\gamma^n$ und das γ entnimmt man aus (32) mit $m < n!$ und $A < (na)^{n+1}$ mit $a = |\,a_i^k\,|_{\max}$.

Zweiter Fall. Wenn die a_i^k von $A(f)$ nicht ganz-rational sind, so muß bekannt sein, wieviele von ihnen rational-unabhängig sind. Man hat dann auf die Gleichungen (29) zurückzugreifen. Dort sind die γ_{si} ganze rationale Funktionen $\gamma_{si}(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ der Koeffizienten von (16) mit bekannten ganzen rationalen Koeffizienten. Sie sind überdies bezüglich der Indizes i in D_i isobar vom Gewichte $m(m-1)+1$. Schreibt man die γ_{si} als Polynome der a_i^k, so sind auch die rationalen Abhängigkeiten der γ_{si} bekannt. Drückt man dann die rational-abhängigen der γ_{si} durch die unabhängigen $\gamma_{\sigma\tau}$ linear und homogen aus und eliminiert die γ_{si} aus (29), so ergibt sich ein zu (29) analoges System, in dem jetzt die Koeffizienten ganz und rational sind, und das also so wie (29) behandelt werden kann. Dabei tritt gegen früher (erster Fall) nur der Unterschied zu Tage, daß jetzt die obere Schranke γ der neuen γ_{ik} auch von den (bekannten) ganzen Zahlen Z abhängen kann, die sich ergeben, wenn man in den Gleichungen, die die rationalen Abhängigkeiten der γ_{si} darstellen, die Nenner wegmultipliziert. Für γ gilt dann also (32) i. A. nicht mehr, nämlich dann nicht, wenn das $Z_{\max}$ größer wird als die für γ durch (32) gegebene Schranke.

(Eingegangen den 27. Oktober 1933.)