COURS DE L'INSTITUT FOURIER

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre 2 Le trou spectral des graphes et leurs propriétés d'expansion

Cours de l'institut Fourier, tome 22 (1993-1994), p. 24-37
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1993-1994__22__24_0>

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Chapitre 2

LE TROU SPECTRAL DES GRAPHES ET LEURS PROPRIETES D'EXPANSION

Dans la suite $\Gamma = (V, E)$ est un graphe fini ou non, mais de degré uniformément borné par une constante k. Le laplacien canonique Δ_Γ est l'opérateur autoadjoint borné sur $\mathcal{H} = l^2(V)$ associé à la forme quadratique

$$q(f) = \sum_{\{i,j\} \in E} (f(i) - f(j))^2 \ .$$

On a donc:

$$\Delta_\Gamma(f)(i) = \sum_{j \sim i} (f(i) - f(j)) \ ,$$

de façon à avoir:

$$q(f) = < \Delta_\Gamma f | f > \ .$$

On définit aussi la matrice d'adjacence M_Γ par la relation

$$M_\Gamma = k\mathrm{Id} - \Delta_\Gamma \ ,$$

où k est le sup des degrés des sommets.

Si Γ est fini et connexe, le spectre de Δ_Γ est de la forme:

$$\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{\#V} \ .$$

Le **trou spectral** ou **gap** de Γ, noté $g(\Gamma)$ est alors défini par $g(\Gamma) = \lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_2$.

Le but de cet exposé est de donner des relations entre le gap et des propriétés plus géométriques de Γ (diamètre, expansion, constante de Cheeger, etc...).

On s'intéressera aussi à la construction de familles infinies de graphes ayant de bonnes propriétés d'expansion. En particulier, on donnera une construction proche de celle de Gabber-Galil ([G-G]) et on montrera comment elle permet de retrouver la propriété (T) pour $SL_3(\mathbf{Z})$, grâce à l'inégalité de Kato pour les graphes.

1. CONSTANTES DE CHEEGER. —

Dans les années 70, J. Cheeger a introduit une constante isopérimétrique $h(X,g)$ attachée à toute variété riemannienne compacte connexe (X,g) et qui est définie de la façon suivante: pour tout domaine régulier $D \subset X$, on pose $h(D) = vol(\partial D)/vol(D)$, où les volumes sont calculés grâce à g. La constante de Cheeger $h(X,g)$ est le inf des $h(D)$, où D parcourt les domaines de volume $\leq vol(X)/2$. Cheeger montre ensuite que la première valeur propre non nulle du laplacien est $\geq h(X,g)^2/4$ (pour la définition et les propriétés de $h(X,g)$, voir [B-G-M]).

On peut facilement étendre ces résultats aux graphes et les utiliser dans les 2 sens: soit lorsqu'on a des informations sur h, soit lorsqu'on en a sur le gap λ_2.

En fait, on va définir 2 constantes de Cheeger: h_o pour un graphe infini ou à bord; h pour un graphe fini sans bord.

DÉFINITIONS. — *Si $\Gamma = (V, V_o, E)$ est un graphe à bord V_o (éventuellement infini), ce qui signifie que V_o est un sous-ensemble de V, on pose*

$$h_o(\Gamma) = \inf \frac{|\partial A|}{|A|} ,$$

où le inf *porte sur les parties finies de V ne rencontrant pas V_o et ∂A est l'ensemble des arêtes issues de A et dont l'extrémité n'est pas dans A.*

Si $\Gamma = (V, E)$ est un graphe fini, on pose

$$h(\Gamma) = \inf \frac{|\partial A|}{|A|} ,$$

où cette fois, le inf porte sur les $A \subset V$ tels que $|A| \leq |V|/2$.

Il n'est pas difficile de montrer, par exemple, que $h_o(\mathbf{Z}^n) = 0$; en effet, pour un cube de côté N, le nombre de sommets intérieurs est de l'ordre de N^n, alors que le nombre d'arêtes issues du cube est seulement de l'ordre de N^{n-1} qui est négligeable devant N^n lorsque $N \to \infty$.

Pour un arbre homogène T_q de degré $q+1$, on a $h_o(T_q) = q-1$. En effet, il suffit évidemment de considérer les parties connexes A de V: ce sont des arbres et on a alors: $(q+1)|A| = |\partial A| + 2I$ où I est le nombre d'arêtes intérieures de A. De plus, on a évidemment (caractéristique d'Euler):

$$|A| - I = 1 ,$$

d'où l'on conclut que:

$$(q-1)|A| = |\partial A| - 2 ,$$

et le calcul de h_o.

En fait, h_o mesure les propriétés d'expansion de Γ: si A ne rencontre pas le bord de Γ, le volume de la boule $B(A,1)$ de centre A et de rayon 1 vérifie:

$$|B(A,1)| \geq (1 + \frac{h_o}{k})|A| ,$$

où k est la borne supérieure du degré de Γ. Si $h_o > 0$, les boules $B(A, N)$ ont un volume à croissance exponentielle tant qu'elles ne rencontrent pas le bord de Γ.

Dans le cas fini, l'estimation précédente est valable avec h au lieu de h_o tant que la volume n'atteint pas la moitié du volume de V. On en déduit facilement l'estimation suivante sur le diamètre D de Γ:

$$D(\Gamma) \leq \frac{2\log(n/2)}{\log(1 + (h/k))} + 1 ,$$

où n est le nombre de sommets de Γ.

En particulier, si on a une famille infinie de graphes finis Γ_n de degrés bornés, de nombre de sommets n, et tels que $h(\Gamma_n)$ ne tend pas vers 0, leur diamètre croit comme $O(\log n)$. Il n'est pas simple de construire de telles familles, mais elles présentent un grand intérêt dans la théorie des réseaux et des algorithmes.

2. λ_1, TROU SPECTRAL ET INEGALITES DE CHEEGER. —

Soit Δ_Γ le laplacien canonique de Γ.

Alors, on peut estimer les valeurs propres de Δ_Γ à l'aide des constantes de Cheeger: la remarque de base est que le quotient de Rayleigh de la fonction caractéristique d'un ensemble de sommets A est exactement $|\partial A|/|A|$.

On a les inégalités suivantes:

THÉORÈME. — *Si $\Gamma = (V, V_o, E)$ est éventuellement infini et avec conditions de Dirichlet au bord et que le sup des degrés des sommets est k:*

$$\frac{h_o^2(\Gamma)}{2k} \leq \lambda_1 \leq h_o(\Gamma) .$$

Si $\Gamma = (V, E)$ est fini,

$$\frac{h^2(\Gamma)}{2k} \leq g(\Gamma) = \lambda_2 - \lambda_1 \leq 2h(\Gamma) .$$

Preuve. —

1) Pour majorer λ_1, on calcule le quotient de Rayleigh de la fonction caractéristique de A, il vaut $|\partial A|/|A|$. On en déduit, pour tout A ne rencontrant pas V_o:

$$\lambda_1 \leq |\partial A|/|A| .$$

Pour minorer, on prend f à support fini disjoint de V_o. On évalue alors

$$S = \sum_E |f^2(i) - f^2(j)| .$$

Par Cauchy-Schwarz, on a:

$$S \leq \sqrt{2k}\|df\|\|f\| ,$$

avec $\|df\|^2 = \sum_E (f(i) - f(j))^2$. Pour minorer S, on considère les valeurs $a_0 = 0 < a_1 < \cdots < a_r$ prises par f^2 et les ensembles $A_l = \{i \in V | f^2(i) \geq a_l\}$. On a

$$S = \sum f^2(i) - f^2(j) ,$$

où la somme porte sur les arêtes (i,j) orientées de façon que $f^2(i) - f^2(j) \geq 0$. On peut reécrire cette somme sous la forme d'une somme $S = \sum (a_l - a_{l-1})$, où le nombre de répétitions de $a_l - a_{l-1}$ est égal au nombre d'arêtes (i,j) telles que $f^2(i) \geq a_l$ et $f^2(j) \leq a_{l-1}$, donc $(i,j) \in \partial A_l$. Utilisant la définition de $h_o(\Gamma)$, il vient:

$$S \geq h_o \sum_{l=1}^{r} (a_l - a_{l-1}) |A_l| ,$$

qui est égal à $h_o \sum_k f^2(i)$.

D'où l'on tire

$$\|df\|^2 \geq \frac{h_o^2}{2k} \|f\|^2$$

et la minoration de λ_1.

2) Pour la majoration de $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_2$, on fabrique une fonction d'intégrale nulle de la façon suivante: si $V = A \cup B$ est une partition de V avec $|A| = a \leq |B| = b$, on prend $f = b$ sur A et $-a$ sur B. On a le quotient de Rayleigh:

$$\frac{< \Delta f | f >}{\|f\|^2} = \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} = \frac{(a+b)^2 |\partial A|}{(a+b)ab} ,$$

d'où l'on déduit le résultat.

Pour la minoration, si f est une fonction propre pour λ_2, et $A = \{i \in V | f(i) > 0\}$, on peut supposer $|A| \leq \frac{|V|}{2}$. Soit alors f_1 égale à f sur A et à 0 sur le complémentaire de A. D'après ce qui précède,

$$\frac{\|df_1\|^2}{\|f_1\|^2} \geq \frac{h^2}{2k} .$$

Maintenant, on a aussi:

$$\sum_E (f_1(i) - f_1(j))^2 = \sum_{i \in A} f_1(i) \sum_{j \sim i} (f_1(i) - f_1(j)) \leq \sum_{i \in A} f(i) \Delta f(i) = \lambda_2 \sum_{i \in A} f(i)^2 .$$

D'où le résultat.

□

3. EXPANSEURS ET GRAPHES DE RAMANUJAN. —

Un graphe Γ sera appellé (n,k,μ)-expanseur si $|V(\Gamma)| = n$, degré $(\Gamma) \leq k$ (dans la pratique k est le sup des degrés des sommets) et les valeurs propres de M_Γ sont contenues dans l'intervalle $[-\mu, \mu]$ sauf celles qui valent k ou $-k$ (ce dernier cas ne se produit que pour les graphes bipartites). Leur gap est $\geq k - \mu$.

Remarque: si le degré n'est pas constant et que l'on définit la matrice d'adjacence comme $kId - \Delta_\Gamma$, où k est le plus grand degré, cela revient à penser que l'on ajoute l-boucles aux sommets de degré $k - l$.

On veut construire des familles infinies ($n \to \infty$) de graphes Γ_n qui soient des (n, k, μ)-expanseurs où k est fixé et μ aussi petit que possible et indépendant de n. On peut alors minorer uniformément $h(\Gamma_n)$ et majorer le diamètre par $c \log n$.

Remarque: F. Chung [CH] a donné une estimation du diamètre pour un (n, k, μ) expanseur:

THÉORÈME. — *Si Γ est un (n, k, μ) expanseur, le diamètre $D(\Gamma)$ vérifie*

$$D(\Gamma) \leq \frac{\operatorname{Log}(n-1)}{\operatorname{Log}(k/\mu)} + 1 .$$

Cette estimation ne donne rien pour les graphes bipartis pour lesquels $\mu = k$.

Dans ce cas, on dernier cas, si $\tilde{\mu}$ est le sup des modules des valeurs propres de module $< k$, on a le

THÉORÈME '. — *Pour un graphe biparti*

$$D(\Gamma) \leq \frac{\operatorname{Log}(n/2-1)}{\operatorname{Log} k/\tilde{\mu}} + 2 .$$

Preuve du théorème.- Si M_Γ est la matrice d'adjacence de Γ, alors les coefficients M_Γ^m sont tous > 0 si et seulement si $m \geq D(\Gamma)$. Soit $\lambda_1 = k > \mu \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq -\mu$ les valeurs propres de M_Γ et u_i une base orthonormée de fonctions propres associées avec $u_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On peut alors calculer les coefficients matriciels $M_\Gamma^m(r,s)$ à l'aide de la décomposition propre de M_Γ:

$$M_\Gamma^m(r,s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^m u_i(r) u_i(s) ,$$

et donc:

$$M_\Gamma^m(r,s) \geq \frac{k^m}{n} - \mu^m \sum_{i>1} |u_i(r)||u_i(s)| .$$

On utilise Cauchy-Schwarz, $\sum_{i=1}^n |u_i(r)|^2 = 1$ et $u_1(i) = 1/\sqrt{n}$, ce qui donne:

$$M_\Gamma^m(r,s) \geq \frac{k^m}{n} - \mu^m (1 - \frac{1}{n}) ,$$

d'où le résultat. □

Il y a un seuil asymptotique infranchissable par les (n, k, μ)-expanseur, c'est $\mu_k = 2\sqrt{k-1}$. Un (n, k, μ_k)-expanseur est appellé *graphe de Ramanujan.* On a en effet la:

PROPOSITION. — *Si Γ_n est une suite de $(n,k,\mu(\Gamma_n))$-expanseurs, alors*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu(\Gamma_n) \geq 2\sqrt{k-1} (= \mu_k) \ .$$

Preuve. — Soit ν une mesure de probabilité à support compact sur $\mathbf{R}$. On pose $r(\nu) = \sup\{|t| \mid t \in \mathit{support}(\nu)\}$. Si $m_l(\nu) = \int t^l d\nu(t)$, on a

$$r(\nu) = \limsup m_l(\nu)^{1/l} \ ,$$

ainsi qu'il résulte du calcul du rayon de convergence de la série de Laurent

$$\sum m_l(\nu)\lambda^{-l} = \int \frac{d\nu(t)}{1-t/\lambda} \ .$$

Soit dP_k la mesure spectrale (voir aussi [CV5] pour cette notion) de l'arbre homogène T_k de degré k, caractérisée par la relation:

$$\int f(t) dP_k = f(M_{T_k})(x,x) \ ,$$

où $f(M_{T_k})(x,y)$ est la matrice de l'opérateur $f(M_{T_k})$. On a $r(dP_k) = 2\sqrt{k-1}$, car le spectre de la matrice d'adjacence M_{T_k} de T_k est l'intervalle $[-2\sqrt{k-1}, 2\sqrt{k-1}]$.

Soit maintenant $dQ_n = \frac{1}{n}\sum_j \delta(\lambda_{j,n})$, où $\lambda_{j,n}$ sont les valeurs propres de M_{Γ_n}. On a

$$m_l(dQ_n) \geq m_l(dP_k) \ ,$$

car le membre de gauche compte le nombre moyen de lacets de longueur l dans Γ_n alors que celui de droite compte le nombre de lacets de longueur l basé en un point de l'arbre homogène de degré k. Donc, si dQ_∞ est une limite vague des dQ_n: $m_l(dQ_\infty) \geq m_l(dP_k)$, ce qui implique que $r(dQ_\infty) \geq r(dP_k)$ et donc la proposition. □

Margulis [MA] a trouvé dans les années 1973 une construction générale de familles infinis de (n,k,c)-expanseurs avec $c > 0$ indépendant de n en utilisant des arguments de théorie des groupes assez délicats, basés sur la propriété (T) de Kazhdan. Malheureusement c n'est pas explicite.

Gabber et Galil [G-G] ont trouvé en 1980 des exemples plus explicites.

Enfin des exemples beaucoup plus sophistiqués qui sont des graphes de Ramanujan ont été trouvés par Lubotsky-Phillips-Sarnak [L-P-S 1].

4. LES GRAPHES DE GABBER-GALIL. —

Commençons par repréciser la notion de graphe de Cayley:

X est un ensemble muni d'une action d'un groupe G de type fini engendré par une partie (finie) S symétrique. On définit alors le graphe de Cayley ou plutôt sa matrice d'adjacence $M_{X,S}$ qui opère sur $l^2(X)$: $M_{X,S}f(z) = \sum_{g\in S} f(g.z)$. On désignera par $\Gamma_{X,S}$ le graphe dont l'ensemble des sommets est X et la matrice d'adjacence $M_{X,S}$: c'est le graphe de Cayley, il peut avoir des boucles et des arêtes multiples.

La *valence* k est dans ce cas, *par convention*, le nombre d'éléments de S. On remarque aussi que le fait que S soit symétrique implique que $M_{X,S}$ est un opérateur symétrique.

Décrivons une variante de l'exemple de [G-G]; les exemples dont nous allons parler sont en fait des graphes de Cayley au sens précédent.

$\Gamma_n = \Gamma_{X_n,S_8}$ est le graphe de Cayley de degré 8, à $n = m^2$ sommets, que l'on peut décrire ainsi: $X_n = (\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^2$, le groupe $G = SA_2(\mathbf{Z})$ est le groupe des transformations affines de $\mathbf{R}^2$ à coefficients entiers de déterminant 1 qui opère de façon naturelle sur X_n; S est l'ensemble symétrique des 8 générateurs de G décrit ainsi: si $z = (x,y)$ et

$$\sigma_1(z) = (x, x+y), \sigma_2(z) = (x, x+y+1), \sigma_3(z) = (x+y, y), \sigma_4(z) = (x+y+1, y) \ ,$$

on définit S_8 comme l'ensemble des 8 transformations affines $\sigma_i^{\pm 1}$, $i = 1,2,3,4$ et S_4 comme l'ensemble des 4 transformations linéaires $\sigma_i^{\pm 1}$, avec $i = 1,3$.

THÉORÈME [G-G]. — *Soit $\nu = 1 + 2\sqrt{2}$. Les Γ_n sont des $(n = m^2, 8, 2\nu)$-expanseurs et $\lim_n \mu(\Gamma_n) = 2\nu$ et donc aussi*

$$g(\Gamma_n) \geq 8 - 2\nu \sim 0.3431 \ .$$

Remarque: on a $2\nu \sim 7.6569 > 2\sqrt{7} \sim 5.2915$; donc les Γ_n sont loin d'être des graphes de Ramanujan, mais ils sont infiniment moins chers!!

La preuve est élémentaire. Elle repose sur 3 lemmes:

LEMME 1. — *Soit Γ_∞ le graphe de Cayley $\Gamma_{\mathbf{Z}^2\setminus 0, S_4}$ de degré 4 dont les sommets sont $\mathbf{Z}^2 \setminus 0$ et 2 sommets z, z' sont reliés par une arête si et seulement s'il existe $\tau \in S_4$ tel que $z = \tau(z')$. Alors le spectre de la matrice d'adjacence M_∞ de Γ_∞ vérifie*

$$\sigma(M_\infty) \subset [-\nu, \nu] \ ,$$

et ν est le plus petit réel > 0 pour lequel une telle inclusion est vraie.

LEMME 2. — *Soit $X = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^2$, alors l'opérateur T_∞ défini sur $L^2(X)$ par*

$$T_\infty f(z) = 2 \sum_{\tau \in S_4} f(\tau z)$$

vérifie:

$$\sigma(T_\infty) \subset [-2\nu, 2\nu] \cup \{8\} \ .$$

Il est intéressant de comparer ce résultat à celui de [L-P-S] (voir aussi [CV6] et [LU]) pour le cas de S^2.

LEMME 3. — *Si H_n est le sous-espace de dimension $n = m^2$ de $L^2(X)$ engendré par les fonctions caractéristiques des carrés*

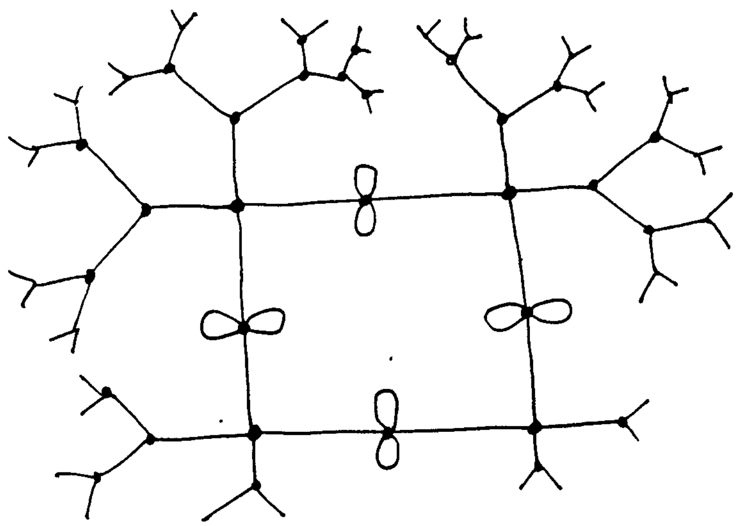
$$C_a = a + [0, 1/m]^2 \ ,$$

où a parcourt la grille des $(i/m, j/m)$, alors si on identifie $l^2(X_n)$ à H_n (comme espaces hilbertiens) de la façon évidente, la restriction de la forme quadratique $q_\infty(f) = < T_\infty f | f >$ à H_n est la forme quadratique q_n associée à la matrice d'adjacence de M_{X_n, S_8}.

Preuve du lemme 1:

Le graphe Γ_∞ se décompose en réunion de $(0,0)$ et des graphes isomorphes $T_p = \{(m,n) | pgcd(m,n) = p\}$ pour $p \in \mathbb{N} \setminus 0$. Il suffit donc de contrôler le spectre de la matrice d'adjacence M_1 de T_1.

Posons $\|(x,y)\| = \sup(|x|,|y|)$ et $\sigma(z) = \{\tau(z) | \tau \in S_4\}$ l'ensemble des voisins de z. Si $\|z\| > 1$, il y a dans $\sigma(z)$ 2 points de norme $> \|z\|$, un de norme $< \|z\|$ et un de norme $\|z\|$. Il est alors facile de dessiner les graphe T_1 qui est réunion de 8 arbres binaires avec racines avec des arêtes supplémentaires joignant des points à même distance combinatoire des racines attachés aux 4 coins d'un carré (2 par coins) et de 4 autres sommets situés au milieu des arêtes de ce carré et ayant chacun 2 boucles attachées.



Le graphe T_1.

Pour calculer le spectre de T_1, on utilise la technique expliquée au chapitre 2, §7.

Nous allons appliquer ce critère à T_1.

On considère la fonction f sur les sommets de T_1 qui vaut 1 au coin du carré, $(1/\sqrt{2})^k$ aux points des arbres à distance k du coin (la racine) et $a = (1+\sqrt{2})/2$ au centre des arêtes du carré: on vérifie sans difficultés que

$$M_{T_1} f(z) \leq (1 + 2\sqrt{2}) f(z) \ .$$

Il n'est pas difficile de voir que le spectre de T_1 contient l'intervalle $[-2\sqrt{2}+1, \nu]$ en utilisant le fait que le spectre (essentiel) de la matrice d'adjacence d'un arbre régulier de degré 3 est l'intervalle $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$. En effet, on peut considérer le spectre de la matrice d'adjacence de T_1 restreint aux fonctions radiales; le spectre essentiel est alors celui de l'arbre homogène de degré 3 translaté de 1 (il ne dépend que de ce qui se passe à l'infini).

Le graphe Γ_∞ se décompose en réunion des graphes isomorphes

$$T_p = \{(m,n) | pgcd(m,n) = p\}$$

pour $p \in \mathbf{N} \setminus 0$. Il suffit donc de contrôler le spectre de la matrice d'adjacence M_1 de T_1.

Preuve du lemme 2: Par transformée de Fourier, $L^2(X)$ s'identifie à $l^2(\mathbf{Z}^2)$ et l'orthogonal des fonctions constantes à $l^2(\mathbf{Z}^2 \setminus 0)$. Un petit calcul montre que l'opérateur T_∞ s'identifie au double de la matrice d'adjacence du graphe Γ.

Preuve du lemme 3:

Soit, pour $a \in X_n$, $\varphi_a = \sqrt{n}\chi_{C_a}$. Alors $j : l^2(X_n) \to L^2(X)$ définie par $j(x) = \sum x_a \varphi_a$ est une isométrie de $l^2(X_n)$ sur H_n. Il suffit donc de calculer:

$$c_{a,b} = 2 \sum_{\tau \in S_4} \int_X \tau^*(\varphi_a)\varphi_b = 2n \sum_{\tau \in S_4} L(C_b \cap \tau(C_a)) ,$$

où L est la mesure de Lebesgue. Cette mesure vaut $1/2n$ ou 0 suivant qu'il existe ou non $\sigma \in S_8$ tel que $a = \sigma(b)$.

Preuve du théorème:

On applique le minimax qui montre que $\mu_1(\Gamma_n) \geq -2\nu$ et $\mu_{n-1}(\Gamma_n) \leq 2\nu$. La limite s'obtient par densité des H_n, $n \to \infty$ dans $L^2(X)$.

5. PROPRIETE (T) DE KAZHDAN. —

Soit G un groupe localement compact (par exemple un groupe de Lie ou un groupe discret), on pose la

DÉFINITION. — *G a la propriété (T) (G est alors dit de Kazhdan) s'il existe un voisinage compact K de Id dans G, engendrant G, et une constante $c > 0$ tels que, pour toute représentation unitaire π de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sans vecteurs invariants, on ait:*

$$\forall g \in K, \forall x \in \mathcal{H}, \ \|\pi(g)x - x\| \geq c\|x\| ,$$

alors π admet un vecteur G-invariant non nul.

En fait, bien sûr, si la propriété est vraie avec un choix de K, elle est vraie avec tout autre choix K' (il existe N tel que $K \subset K'^N$), mais la constante c dépend de K.

Lorsque G est discret et S un système de générateurs fini symétrique de G, on définit la constante de Kazhdan $\tilde{c}(G,S)$ par:

$$\tilde{c}(G,S) = \inf_{\pi \in \hat{G} \setminus \rho_o} \inf_{\|x\|=1} \sum_{\gamma \in S} \|\pi(\gamma)x - x\|^2 ,$$

où ρ_o est la représentation triviale et $\hat{G}$ l'ensemble des (classes de) représentation unitaires irréductibles de G. La propriété (T) équivaut alors à

$$\tilde{c}(G,S) > 0 ,$$

car on voit facilement que:

$$c \geq \frac{\tilde{c}(g,S)}{|S|} .$$

Lorsque G est un groupe de Lie connexe, on associe à une base $B = (Y_i)$ de l'algèbre de Lie un opérateur différentiel $\Delta_{\pi,B}$ sur l'espace $\mathcal{H}$ de la représentation unitaire π de G par la forme quadratique $Q(z) = \sum_i \|\pi(Y_i)z\|^2$ et la constante de Kazhdan est $c(G,B)$ est alors le *inf* de ces spectres pour les représentations sans vecteurs G-invariants.

Exemples:

1) Tout groupe compact est de Kazhdan; en effet, il suffit de prendre $K = G$ et de remarquer que si un vecteur unitaire x vérifie

$$\|\pi(g)x - x\| \leq \sqrt{2} - \varepsilon \ , \varepsilon > 0 \ ,$$

la moyenne sur G des $\pi(g)x$ est invariante par π et non nulle. Il est intéressant de calculer explicitement les constantes de Kazhdan des groupes finis (voir à ce sujet [B-H]).

Pour un groupe fini, on sait que la représentation régulière contient toutes les représentations irréductibles. Soit donc (G,S) un groupe fini engendré par S, supposé symétrique. Alors

$\tilde{c}(G,S)$ est égale à la deuxième valeur propre du laplacien (ie le *gap*) du graphe de Cayley associé à S.

2) Le groupe additif $\mathbf{Z}$ n'a pas la propriété (T). En effet le groupe des caractères est le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et le caractère trivial n'est pas isolé.

3) Plus généralement, un groupe commutatif n'a la propriété (T) que s'il est compact et donc, s'il existe un homomorphisme surjectif de G sur un groupe commutatif non compact, G n'a pas la propriété (T); par exemple les groupes libres n'ont pas la propriété (T). Pour $SL_2(\mathbf{Z})$, la situation est plus subtile, son groupe des commutateurs est d'indice fini et donc il n'y a pas d'homomorphismes non triviaux de $SL_2(\mathbf{Z})$ dans $\mathbf{Z}$. Il faut utiliser le fait que $SL_2(\mathbf{Z})$ a un sous-groupe d'indice fini qui est un groupe libre a 2 générateurs (le groupe de congruence $\Gamma(2)$) et que si Γ a la propriété (T), ses sous-groupes d'indice fini aussi.

Il n'est donc pas évident du tout qu'il y a des groupes infinis ayant la propriété (T). En fait Kazhdan a montré que si K est un corps commutatif localement compact non discret, $SL_n(K)$ a la propriété (T) pour $n \geq 3$. Pour la preuve de ce fait, on pourra consulter [H-V1] ou [LU]. Au § suivant, on donnera une preuve de la propriété (T_f) pour $SL_3(\mathbf{Z})$, où (T_f) signifie qu'on se restreint aux représentations de dimension finie dans la définition.

Il est également utile d'introduire une propriété (T) (et aussi (T_f)) relative, si $H \subset G$ est un sous-groupe de G, on dira que (G,H) a la propriété (T) relative si, sous les mêmes hypothèses que dans la première définition, on peut conclure que π a un vecteur H-invariant non trivial. par exemple, si $G = SA_2(\mathbf{R})$ est le groupe des transformations affines de $\mathbf{R}^2$

de déterminant 1 et $H = \mathbf{R}^2$ le sous-groupe des translations, la paire (G, H) a la propriété (T). C'est un ingrédient essentiel de la preuve du théorème de Kazhdan.

De plus, on a la propriété suivante, si Γ est un réseau de G (ie un sous-groupe discret de covolume fini), alors Γ a la propriété (T) si et seulement si G l'a : en particulier $SL_n(\mathbf{Z})$ a la propriété (T) pour $n \geq 3$ et $(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ a la propriété (T) relative.

Examinons maintenant la relation avec le spectre. Soit (Γ, S) un groupe discret tel que $c(\Gamma, S) > 0$. Soit X un ensemble fini sur lequel Γ opère transitivement, et soit X_S le graphe de Cayley associé. Alors le gap $g(X_S)$ est $\geq c(\Gamma, S)$. Ainsi à partir d'un groupe discret ayant la propriété (T_f), on peut parfois construire des familles d'expanseurs de constante uniforme.

6. LA PROPRIETE (T_f) POUR $(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$. —

On commence par montrer (T_f)-relative pour la paire $(G, H) = (SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ en prouvant que l'exemple de Gabber-Galil est *universel*. En fait, on peut évaluer la constante $c_f(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ relativement à un système de générateurs.

Plus précisément, on a:

THÉORÈME. — *Soit S un système symétrique de générateurs de $SA_2(\mathbf{Z})$ formé de générateurs S_o de $SL_2(\mathbf{Z})$ ($S_o = \{t, t^{-1}, u, u^{-1}\}$ où $t(x,y) = (x+y, y)$, $u(x,y) = (x, y+x)$) et des translations unité $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Soit $c(S) > 0$ la borne inférieure du gap pour les matrices d'adjacence des graphes de Gabber-Galil associées à S, alors $c(S)$ est la constante de Kazhdan pour la propriété (T_f)-relative associée à S.*

On aura besoin de *l'inégalité de Kato discrète:*

THÉORÈME (INÉGALITÉ DE KATO DISCRÈTE). — *Soient $\Gamma = (V, E)$ un graphe fini,*

$$q_o(x) = \sum_{(i,j)\in E} c_{i,j}(x_i - x_j)^2 + \sum_{i \in V} W_i x_i^2 \ ,$$

avec $c_{i,j} > 0$, et $\lambda_1(q_o)$ la première valeur propre de l'opérateur associé à q_o sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^V$.

Soient, pour chaque $i \in V$, L_i un espace vectoriel hermitien de dimension N et pour chaque couple $(i,j) \in \vec{E}$, $\omega_{i,j}$ une isométrie $\mathbf{C}$-linéaire de L_i sur L_j. On suppose que l'on a: $\omega_{j,i} = \omega_{i,j}^{-1}$. Soit Q_ω la forme quadratique sur $\oplus_i L_i$ définie par:

$$Q_\omega(x) = \sum_{(i,j)\in E} c_{i,j} \|\omega_{i,j} x_i - x_j\|^2 + \sum_{i \in V} W_i \|x_i\|^2 \ .$$

Soit $\lambda_1(Q_\omega)$ la première valeur propre de l'opérateur associé à Q_ω.

Alors $\lambda_1(q_o) \leq \lambda_1(Q_\omega)$ et on a égalité si et seulement si le produit des $\omega_{i,j}$ sur chaque cycle de Γ, appellé l'holonomie, est l'identité.

Preuve. — Soit M_ω l'opérateur autoadjoint associé à $-Q_\omega$:

$$M_\omega f(i) = \sum_{j\sim i} c_{i,j}\omega_{i,j} f(j) + \tilde{W}_i f(i) \ ,$$

avec $\tilde{W}_i = -W_i - \sum_{j\sim i} c_{i,j}$.

Si $\varphi > 0$ est un vecteur de Perron-Frobenius pour l'opérateur associé à q_o, on a l'inégalité:

$$2Re < \omega_{i,j} z_i | z_j > \leq \frac{\varphi(j)}{\varphi(i)} \|z_i\|^2 + \frac{\varphi(i)}{\varphi(j)} \|z_j\|^2 \ ,$$

d'où l'on déduit, par sommation sur les arêtes orientées et en utilisant le fait que φ est un vecteur propre de q_o:

$$< M_\omega f | f > \leq -\lambda_1(q_o) \|f\|^2 \ ,$$

ce qui prouve le résultat. □

Soient π_m les représentations naturelles de $G = SA_2(\mathbf{Z})$ sur $l^2_o((\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^2)$ introduites plus haut (l^2_o désigne les fonctions de somme nulle sur les sommets). Soit Z_m le tore discret (privé de l'origine) des caractères de l'action de $\mathbf{Z}^2$ qui apparaissent. La matrice Δ_m du graphe de Gabber-Galil (associé à ces générateurs) se transforme par Fourier en une matrice $\hat{\Delta}_m$. Soit Γ_m le graphe de Cayley de l'action de $(SL_2(\mathbf{Z}), S_o)$ sur Z_m, privé de l'origine sur laquelle $SL_2(\mathbf{Z})$ agit trivialement. Alors $\hat{\Delta}_m$ est dans O_{Γ_m} et son λ_1 est minoré par une constante $c > 0$ indépendante de m (cf §4: la propriété (T) est indépendante du système de générateurs). La forme quadratique associée est:

$$q_m(x) = \sum_i \Big(\sum_{\sigma\in S_o} |x_i - x_{\sigma(i)}|^2 + V_i x_i^2 \Big) \ ,$$

où $V_i = 2(|1-\chi_i(1,0)|^2 + |1-\chi_i(0,1)|^2)$ (χ_i est le caractère correspondant au sommet i).

Soit maintenant $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire irréductible de dimension finie de G, n'ayant pas de vecteurs H-invariants. Soit Z l'ensemble (fini) des caractères de H qui apparaissent. $SL_2(\mathbf{Z})$ agit par permutation de Z. On en déduit que $Z \subset Z_m$ pour un certain m (un caractère irrationnel a une orbite infinie sous $SL_2(\mathbf{Z})$).

Soit, pour chaque $\chi \in Z$, H_χ le sous-espace de $\mathcal{H}$ correspondant à ce caractère.

Alors la forme quadratique $q_\pi(z) = \sum_{g\in S} \|\pi(g)z - z\|^2$ s'écrit en décomposant $z = \sum_\chi z_\chi$:

$$q_\pi(z) = \sum_\chi \Big(\sum_{g\in S_o} \|\pi(g) z_\chi - z_\chi\|^2 + V_\chi \|z_\chi\|^2 \ .$$

On conclut par application de l'inégalité de Kato et en remarquant que Z est une composante connexe de Z_m.

7. LA PROPRIETE (T_f) POUR $SL_3(\mathbf{Z})$. —

Soit (G_i, H_i) les 3 images des plongements évidents de $(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ dans $G = SL_3(\mathbf{Z})$ qui fixent une des 3 coordonnées et S_i les sous-ensembles de G correspondants (copies de S_o). $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ est une partie génératrice symétrique de G. Alors, on a:

THÉORÈME. — *Si π est une représentation irréductible de G et x un vecteur unitaire tel que*

$$\forall i = 1,2,3, \sum_{g \in S_i} \|\pi(g)x - x\|^2 < \varepsilon = \frac{c}{2N^2} ,$$

où c est la constante de Kazhdan pour la paire $(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ associée à S et N unn entier défini dans le lemme 1 qui suit, alors π admet un vecteur invariant non trivial. Donc $G = SL_3(\mathbf{Z})$ a la propriété (T_f) avec une estimation explicite de la constante.

On a besoin des:

LEMME 1. — *Les sous-groupes H_i engendrent $SL_3(\mathbf{Z})$ uniformément: il existe un N tel que tout élément de $SL_3(\mathbf{Z})$ est un mot de longueur $\leq N$ en des éléments des H_i.*

Preuve. — Ce lemme est prouvé par des arguments d'arithmétique élémentaire dans [C-K]: on montre dans cet article que tout $T \in SL_3(\mathbf{Z})$ est produit d'au plus 48 matrices élémentaires (ie matrice ayant les coefficients diagonaux égaux à 1 et un seul coefficient non diagonal non nul). Attention: aucune estimation sur la taille des entiers qui apparaissent n'est possible par cette méthode qui utilise le théorème de Dirichlet sur l'existence de nombres premiers dans toute progression arithmétique $an + b, n \in \mathbf{N}$ si a et b sont premiers entre eux.

□

LEMME 2. — *Soit π une représentation unitaire d'un groupe G et x un vecteur de norme 1 tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant:*

$$\forall g \in G,\ Re < \pi(g)x | x > \geq \varepsilon ,$$

alors π a un vecteur invariant non trivial.

Preuve. —

Soit C l'enveloppe convexe fermée de l'orbite de x sous $\pi(G)$. L'hypothèse implique que $0 \notin C$. Soit z la projection orthogonale de 0 sur C (le point qui réalise le minimum de la distance). Alors, il est clair que z est G invariant: C est G invariant et la projection est unique.

□

LEMME 3. — *Soit π une représentation unitaire de $SL_3(\mathbf{Z})$, x un vecteur unitaire vérifiant $\sum_{g \in S_i} \|\pi(g)x - x\|^2 \leq \varepsilon$, alors, si E_i est le sous-espace de $\mathcal{H}_\pi$ des vecteurs invariants par $\pi(H_i)$, on a:*

$$d(x, E_i) \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{c}} .$$

Preuve. — On décompose $\mathcal{H} = E_i \oplus F_i$ orthogonalement. Chacun des 2 espaces est invariant par $\pi(H_i)$. On applique la propriété T_f relative à l'action de G_i sur F_i.
□

Nous pouvons maintenant montrer que $SL_3(\mathbf{Z})$ a la propriété (T_f).

Soit x comme dans le théorème. Alors

$$d(x, E_i) < \frac{1}{N\sqrt{2}}$$

d'après le lemme 3. Puis

$$\forall g \in G,\ \|\pi(g)x - x\| \leq \sum_{\alpha=1}^{N} \|\pi(g_\alpha)x - x\| \ ,$$

où les g_α sont dans $H_1 \cup H_2 \cup H_3$, d'après le lemme 1. Donc, comme $\|\pi(g_\alpha)x - x\| \leq 2d(x, E_{i(\alpha)})$, on a $\|\pi(g)x - x\| \leq \sqrt{2} - \varepsilon'$ $(\varepsilon' > 0)$ et on conclut avec le lemme 2.

Il serait intéressant de gagner sur N qui détériore beaucoup la constante du théorème, par exemple en utilisant simultanément tous les plongements de $(SA_2(\mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ dans G.