COURS DE L'INSTITUT FOURIER

JULIO RUBIO
FRANCIS SERGERAERT

5. Homotopie simpliciale

Cours de l'institut Fourier, tome 20 (1986), p. 97-106
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1986__20__97_0>

5. Homotopie simpliciale

15. Groupes d'homotopie des ensembles simpliciaux de Kan

Kan a développé vers 1955 une technique permettant de donner une définition entièrement combinatoire des groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial de Kan (voir la définition d'un tel ensemble simplicial en 7.22). Rappelons (théorème 7.23) que tous les groupes simpliciaux sont de Kan et, en particulier, les ensembles $E(\pi, p)$, $K(\pi, p)$, $\widetilde{K}(\pi, p)$ sont de Kan.

15.1. Définition. — *Soit K un ensemble simplicial. Alors, $x, x' \in K_n$ sont homotopes, on note $x \sim x'$, si*

(i) pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on a $\partial_i x = \partial_i x'$;

(ii) il existe $y \in K_{n+1}$ tel que

$$\begin{aligned} \partial_n y &= x \\ \partial_{n+1} y &= x' \\ \partial_i y &= s_{n-1}\partial_i x = s_{n-1}\partial_i x' , \quad 0 \leqslant i < n . \end{aligned}$$

15.2. Proposition. — *Si K est un ensemble simplicial de Kan, alors la relation d'homotopie est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — C'est la proposition 3.2 de [M].

Notation. — Si $x \in K_0$, on notera aussi x le sous-ensemble simplicial de K engendré par x.

15.3. Définition. — *Soit K un ensemble simplicial de Kan, $x \in K_0$ et $K_n^x = \{\sigma \in K_n \ ; \ \partial_i \sigma = x \ , \ 0 \leqslant i \leqslant n\}$. Alors, on définit les groupes d'homotopie de K :*

$$p_n(K, x) = K_n^x / \sim \ , \ n \geqslant 0 .$$

Expliquons comment ces ensembles admettent une structure naturelle de groupe pour $n > 0$.

Dans $p_n(K, x)$, si $n > 0$ et K vérifiant la propriété de Kan, on peut définir une opération binaire : étant donné $[\sigma], [\sigma'] \in p_n(K, X)$, $\underbrace{x, \ldots, x}_{n-2 fois}, \sigma, \sigma'$ vérifient les hypothèses de la propriété de Kan et il existe donc $\tau \in K_{n+1}$ tel que $\partial_i \tau = x$, si $0 \leqslant i \leqslant n-2$, $\partial_{n-1}\tau = \sigma$, $\partial_{n+1}\tau = \sigma'$; alors on définit $[\sigma] \cdot [\sigma'] = [\partial_n \tau]$ (remarquer que $\partial_n \tau$ est vraiment dans K_n^x).

15.4. THÉORÈME. — *La dernière opération est bien définie, elle donne une structure de groupe si $n \geqslant 1$ et de groupe commutatif si $n \geqslant 2$.*

Démonstration. — Dans le lemme 4.2 et les propositions 4.3 et 4.4 de [M].

Ces groupes et lá notion d'homotopie entre les morphismes simpliciaux (définition 8.5) permettent de développer une théorie d'homotopie dans un cadre entièrement simplicial. Dans cette théorie apparaissent toutes les notions classiques : type d'homotopie, classes d'homotopie,.... De plus, il est possible de décrire les groupes $p_n(K,x)$ comme des classes d'homotopie d'applications simpliciales de S^n vers K , où S^n est la n-sphère standard décrite dans l'exemple 5.10 (2). Toutes ces notions se traduisent d'une façon naturelle, au moyen du foncteur de réalisation, dans le cadre des espaces topologiques ou CW-complexes. En particulier :

15.5. THÉORÈME. — *Si K est un ensemble simplicial de Kan, $p_n(K,x)$ est naturellement isomorphe à $\pi_n(|K|,|x|)$, pour tout n .*

On sait aussi (théorème 9.58 de [M]) que tout ensemble simplicial de Kan K admet un sous-ensemble qui est minimal et qui est une rétraction par déformation forte de K . Ainsi K peut être remplacé par un ensemble simplicial minimal, comme annoncé dans la propriété 10.9.

15.6. EXEMPLES. —

(1). — On va voir que tous les groupes d'homotopie de $E(\pi,n)$ sont nuls. Donc, ceux de $|E(\pi,n)|$ sont aussi nuls et, puisque c'est un CW-complexe, le théorème de Whitehead (théorème V,.3.5 de [W]) implique que $|E(\pi,n)|$ est contractile, comme nécessaire dans la méthode destinée à "tuer" les groupes d'homotopie de 8.

Soit $n > 0$ et $E(\pi,n)_i = \mathrm{Hom}\,\big(C_n(\Delta_i),\pi\big)$, où $C_n(\Delta_i)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par $\Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{i}) = \emptyset$.

Remarquer que si $i < n$, $\Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{i}) = \emptyset$ donc $E(\pi,n)_0$ a un seul élément, noté 0, qui est "l'applications vide". On peut écrire :

$$E(\pi,n)_i^0 \approx \{f : \Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{i}) \longrightarrow \pi; 0 \leqslant j \leqslant i, \partial_j f(\mu) = 1, \forall \mu \in \Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{i-1})\} .$$

Si $i < n$, la relation $\Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{i}) = \emptyset$ implique l'égalité $p_i\big(E(\pi,n),0\big) = 0$.

Si $i > n$, $f \in E(\pi,n)_i^0$ et $\tau \in \Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{i})$, alors $\tau = \delta_{i_1}\ldots\delta_{i_s}$, avec $0 \leqslant i_s < \ldots < i_1 < i$ et $n+s = i$; ainsi $f(\tau) = f(\delta_{i_1},\ldots,\delta_{i_s} = \partial_{i_1} f(\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_s}) = 1$, pour chaque $\tau \in \Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{i})$. Donc, dans $E(\pi,n)_i^0$ il y a un seul élément et $p_i\big(E(\pi,n),0\big) = 0$.

On a que $\Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{n}) = \{id\}$, donc $E(\pi,n)_n$ est en bijection avec π et, puisque $E(\pi,n)_{n-1} = 0$, $E(\pi,n)_n^0$ est aussi en bijection avec π . Etant donné $f,g \in E(\pi,n)_n^0$, on va voir qu'ils sont homotopes. Evidemment, la condition (i) de la définition 15.1 est vérifiée. $\Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n},\underline{n+1}) = \{\delta_0,\ldots,\delta_n,\delta_{n+1}\}$. On définit h dans $E(\pi,n)_{n+1}$ par : $h(\delta_r) = 1 \in \pi$, si $0 \leqslant r \leqslant n-1$, $h(\delta_n) = f(1)$, $h(\delta_{n+1}) = g(1)$. Ainsi : $\partial_n h(1) = h(\delta_n) = f(1)$, $\delta_{n+1}h(1) = g(1)$ et $f \sim g$. Donc, $p_n\big(E(\pi,n),0\big) = 0$ et $|E(\pi,n)|$ est contractile.

(2). — Des raisonnements analogues à ceux du dernier exemples montrent que $p_i\big(K(\pi,n),0\big) = 0$, si $i \neq n$ et que $K(\pi,n)_n^0$ est en bijection avec π . On suppose maintenant que f, g dans $K(\pi,n)_n^0$ sont homotopes, autrement dit qu'il existe h dans $K(\pi,n)_{n+1}$ vérifiant $\partial_0 h = \cdots = \partial_{n-1} h = 0$, $\partial_n h = f$, $\partial_{n+1} h = g$. Mais $h \in \operatorname{Ker} d$, d'où $\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i h \circ \partial_i(1) = 0 = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i h(\delta_i) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i \partial_i h(1) = (-1)^n \partial_n h(1) + (-1)^{n+1}\partial_{n+1} h(1) \Longrightarrow f(1) = g(1)$; donc $f = g$. Ainsi, la relation d'homotopie est discrète et $p_n\big(K(\pi,n),0\big)$ est en bijection avec π . De plus cette bijection est un isomorphisme de groupes : soit $f \cdot g = \partial_n h$, avec $h \in K(\pi,n)_{n+1}$ et $\partial_{n-1} h = f$, $\partial_{n+1} h = g$. Alors $h(\delta_{n-1}) = f(1)$, $h(\delta_{n+1}) = g(1)$; mais $dh = 0$ et on obtient

$$\partial_n h(1) = h(\delta_n) = h(\delta_{n-1}) + h(\delta_{n+1}) = f(1) + g(1) ;$$

donc $\partial_n h = f + g$ et les deux opérations de groupe sont les mêmes.

Donc, la réalisation de $K(\pi,n)$ est bien un espace d'Eilenberg-Mac Lane du type (π,n), comme annoncé en 6.13, (4) et utilisé en 8.

(3). — On va voir maintenant que l'ensemble simplicial $\widetilde{K}(\pi,n)$ est aussi un modèle simplicial des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Rappelons ici sa définition : $\widetilde{K}(\pi,n)_i = \oplus_{\tau \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{i},\underline{n})} \pi_{(\tau)}$, où $\pi_{(\tau)} = \tau$ pour chaque τ .

$$\begin{cases} \partial_i(x_{(\tau)}) = 0 , & \text{si } \tau \circ \delta_i \notin \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{i-1},\underline{n}) \\ \partial_i(x_{(\tau)}) = x_{(\tau \circ \delta_i)} , & \text{si } \tau \circ \delta_i \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{i-1},\underline{n}) \end{cases}$$

et de même pour les opérateurs de dégénérescence.

D'abord $\widetilde{K}(\pi,n)_0 = 0$.

Puis si $i < n$, $\Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{i},\underline{n}) = \emptyset$ et donc $p_i\big(\widetilde{K}(\pi,n),0\big) = 0$.

Enfin si $i > n$, et $\mu \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{i},\underline{n})$; il existe un i tel que $\mu \circ \delta_i \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{i-1},\underline{n})$ et donc $\partial_i(x_{(\mu)}) = x$ et dans $\widetilde{K}(\pi,n)_i^0$ on ne trouve que l'élément nul. Ainsi $p_i\big(\widetilde{K}(\pi,n),0\big) = 0$.

$$\Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n},\underline{n}) = \{1\} \text{ , donc } \widetilde{K}(\pi,n)_n = \pi \text{ et } \widetilde{K}(\pi,n)_n^0 = \pi ,$$

puisque $\widetilde{K}(\pi,n)_{n-1} = 0$. De plus la relation d'homotopie est discrète et les deux opérations de groupe sont les mêmes, donc $p_n\big(\widetilde{K}(\pi,n),0\big) = \pi$. On peut montrer aussi que $\widetilde{K}(\pi,n)$, comme $K(\pi,n)$, est minimal (voir la définition en 7.24).

De la définition et de la proposition suivantes, on déduit l'isomorphisme entre $K(\pi,n)$ et $\widetilde{K}(\pi,n)$, comme annoncé dans la remarque finale de 5.

15.7. Définition. — *Un ensemble simplicial d'Eilenberg-Mac Lane du type (π,n) est un ensemble simplicial minimal K tel que $p_n(K,x) \simeq \pi$, $p_i(K,x) = 0$, si $i \neq n$.*

15.8. Proposition. — *Deux ensembles simpliciaux d'Eilenberg-Mac Lane du type (π,n) sont isomorphes.*

Démonstration. — C'est le théorème 23.6 de [M].

16. Modèles minimaux. Groupes d'homotopie des ensembles simpliciaux réduits

Soit X un espace topologique. Dans 5.10, (4) on lui a associé un ensemble simplicial $S(X)$ vérifiant la propriété de Kan (lemme 1.5 de [M]). On verra maintenant qu'on peut associer à X un autre ensemble simplicial M, minimal, ayant le même type d'homotopie que X . Plus précisément, chaque ensemble simplicial de Kan K admet un sous-ensemble simplicial minimal, rétraction par déformation forte de K (page 36 de [M]; ce fait a été déjà utilisé dans la propriété 10.9). De plus, ce sous-ensemble minimal est unique à isomorphisme simplicial près (théorème 9.8 de [M]); on l'appellera *sous-ensemble minimal* de K .

16.1. DÉFINITION. — *Un modèle minimal M d'un espace topologique X est un sous-ensemble minimal de $S(X)$.*

Voyons comment on définit par récurrence un modèle minimal de X . Rappelons que

$$S_n(X) = \{n - \text{simplexes singuliers de } X\} .$$

On choisit un point de chaque composante connexe par arcs de X et ces points seront les 0-simplexes M_0 . On suppose $n \geqslant 1$ et on considère toutes les suites $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in M_{n-1}$ telles que $\partial_i \sigma_j = \partial_{j-1} \sigma_i$ si $j > 1$; puisque $\sigma_i : \Delta^{n-1} \to X$, on peut considérer $\dot{\sigma} = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\}$ comme une application $\partial \Delta_n \to X$; choisissons alors un représentant $\sigma : \Delta^n \to X$ de chaque classe d'homotopie de $[\Delta^n, X]$ de façon que $\sigma | \partial \Delta^n = \dot{\sigma}$; alors les n-simplexes singuliers choisis constituent M_n .

16.2. THÉORÈME. — *L'application naturelle $|M| \to X$ est une équivalence faible d'homotopie.*

Démonstration. — On sait que $M \hookrightarrow S(X)$ est une équivalence d'homotopie et $|S(X)| \to X$ est une équivalence faible d'homotopie (théorème 16.6 (i) de [M]). ∎

Brown [B] a utilisé les modèles minimaux des CW-complexes finis simplements connexes pour démontrer la calculabilité finie des groupes d'homotopie de ces CW-complexes, comme on l'a énoncé dans le corollaire 11.5 (les modèles minimaux associés à ces CW-complexes sont, si les groupes d'homologie sont finis, des ensembles simpliciaux finis).

On va définir maintenant les groupes d'homotopie des ensembles simpliciaux plus généraux, ne vérifiant pas nécessairement la condition de Kan.

16.3. DÉFINITION. — *Un ensemble simplicial est dit réduit s'il a un seul 0-simplexe.*

Les résultats précédents impliquent que tout ensemble simplicial K tel que $|K|$ soit connexe peut être remplacé, à type d'homotopie près, par un ensemble simplicial réduit.

16.4. DÉFINITION. — *Soit K un ensemble simplicial réduit. On définit $G_n(K)$ comme le groupe libre engendré par les éléments de K_{n+1} avec les relations $s_0 x = e_n$, l'élément neutre de $G_n(K)$, pour tout $x \in K_n$. Si $x \in K_{n+1}$, alors $\overline{x}$ note la classe de x dans $G_n(K)$. On définit :*

$$\begin{aligned} \partial_0 \overline{x} &= (\overline{\partial_0 x})^{-1} \overline{\partial_1 x} \\ \partial_i \overline{x} &= \overline{\partial_{i+1} x} \ , \quad si\ i > 0 \\ s_i \overline{x} &= \overline{s_{i+1} x} \ , \quad si\ i \geqslant 0 \ . \end{aligned}$$

Les applications ∂_i et s_i s'étendent canoniquement en des homomorphismes $G_n(K) \to G_{n-1}(K)$ et $G_n(K) \to G_{n+1}(K)$, respectivement, qui seront les opérateurs de face et de dégénérescence du groupe simplicial $G(K)$.

En particulier $G(K)$ est de Kan (théorème 7.23) et donc $p_n(G(K))$ est défini pour tout $n \geqslant 0$.

16.5. DÉFINITION. — *Si K est un ensemble simplicial réduit, on définit les groupes d'homotopie de K par $p_n(K) := p_{n-1}(G(K))$ si $n \geqslant 1$.*

Si X est un espace topologique on note $\Omega(X)$ l'espace de lacets associé à X. Il est bien connu que $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega(X))$ et le résultat suivant montre donc que si K vérifie la propriété de Kan, la définition de ses groupes d'homotopie en 16.5 est la même que celle de 15.3.

16.6. THÉORÈME. — *Les espaces $|G(K)|$ et $\Omega(|K|)$ ont le même type d'homotopie.*

Il est donc important de savoir calculer les groupes d'homotopie de $G(K)$ et, plus généralement, de savoir travailler sur des groupes simpliciaux qui, en chaque degré, sont des groupes libres *non*-abéliens. Kan [K] a développé à ce propos une technique exposée dans le paragraphe suivant.

17. Groupes d'homotopie de groupes simpliciaux

17.1. DÉFINITION. — *Soit G un groupe simplicial avec des opérateurs de face ∂_i. Pour chaque $n \geqslant 0$, soit*

$$\widetilde{G}_n = G_n \cap \operatorname{Ker} \partial_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \partial_n \ ,$$

avec $\partial_i : G_n \to G_{n-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Puisque $\partial_i\partial_0 = \partial_0\partial_{i+1}$ si $i \geqslant 0$, si x est un élément de $\widetilde{G}_n$, alors $\partial_0 x$ est dans $\widetilde{G}_{n-1}$ et $\partial_0 \cdot (\partial_0|\widetilde{G}_n) = 1$. On peut donc définir $\widetilde{d}_n : \widetilde{G}_n \to \widetilde{G}_{n-1}$ par $\widetilde{d}_n(x) = \partial_0 x$ et $(\widetilde{G}, \widetilde{d})$ est un complexe de chaînes (en général non abélien).

17.2. THÉORÈME. — *Si G est un groupe simplicial, pour chaque $n > 0$, on a $H_n(\widetilde{G}) = p_n(G)$.*

Démonstration. — C'est la proposition 5.4 de [K] .

Donc, le problème du calcul des groupes d'homotopie d'un ensemble simplicial (définition 16.5) est réduit au calcul de l'homologie d'un complexe de chaînes. Mais les complexes de chaînes qui nous intéressent sont les complexes $\widetilde{G(K)}$ associés à un ensemble simplicial réduit K (définition 16.4); ce sont des complexes de chaînes de groupes libres *non*-abéliens. $G_n(K)$ est un groupe libre et donc $\widetilde{G_n(K)}$, sous-groupe de $G_n(K)$, est aussi libre. Mais même dans le cas où K a un nombre fini de simplexes dans chaque degré (les $G_n(K)$ sont alors de génération finie), $\widetilde{G_n(K)}$ peut ne pas être de génération finie. Un premier pas pour trouver l'homologie de $\widetilde{G(K)}$ consiste à chercher une base (peut-être infinie) de $\widetilde{G_n(K)}$ associée à une base de $G_n(K)$. Cette question a été résolue par Kan en utilisant une technique développée par Schreier permettant de trouver une base d'un sous-groupe d'un groupe libre.

17.3. DÉFINITION. — *Un groupe simplicial G est dit libre si :*

a) G_n est un groupe libre avec base donnée pour chaque n .

b) Les bases des groupes G_n sont stables par les opérateurs de dégénérescence de G (c'est-à-dire , si $\sigma \in G_n$ est un générateur et $0 < i \leqslant n$, alors $s_i(\sigma)$ est un générateur de G_{n+1}).

Si K est un ensemble simplicial réduit, $G(K)$ est un groupe simplicial libre.

Soit maintenant G un groupe simplicial libre. On définit un autre groupe simplicial G' par $G'_n = \operatorname{Ker} \partial_{n+1} \subset G_n$ et avec opérateurs de face et de dégénérescence les restrictions de ceux de G .

17.4. THÉORÈME. — *Dans ces conditions, G' est un groupe simplicial libre ayant pour base pour G'_n les éléments*

$$s_n(\gamma) * \sigma * s_n\partial_{n+1}(\sigma^{-1}) * s_n(\gamma^{-1})$$

pour chaque $\gamma \in G_n$ et pour chaque générateur σ de G_{n+1} tel que $s_n\partial_{n+1}(\sigma) \neq \sigma$.

Démonstration. — C'est le théorème 18.2 de [K].

On définit maintenant $G^{(0)} = G$ et $G^{(r)} = \left(G^{(r-1)}\right)'$ si $r > 0$. Alors $\widetilde{G}_n = G_0^{(n)}$. De ceci et du théorème 17.4 dans le cas $G = G(K)$, on déduit une méthode pour trouver une base de $\widetilde{G_n(K)}$.

Cette technique a permis à Kan de calculer l'homologie de quelques complexes de chaînes $\left(\widetilde{G(K)}, \widetilde{d}\right)$ et, donc, d'obtenir quelques groupes d'homotopie. Par exemple, il a "vérifié" de cette façon que $\pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$ (paragraphe 21 de [K]). Pourtant, ces méthodes ne sont pas algorithmiques. On sait cependant d'une façon indirecte que l'homologie de ces complexes de chaînes est calculable, ceci est une conséquence du théorème de Brown (corollaire 11.5), mais on n'a aucun algorithme concret pour réaliser ce calcul. Il s'agit de groupes libres et ce problème a donc des relations avec les manipulations de mots et d'autres traités de façon usuelle en calcul formel. La question de savoir si ce type de méthode peut donner une réponse concrète au problème du calcul des groupes d'homotopie est naturelle et intéressante.

Références pour le Chapitre 5

[B] BROWN E.H. — *Finite computability of Postnikov complexes*, Annals of Math., Vol.**65**,n° 1 (1957), 1-20.

[M] MAY J.P. — *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, 1967.

[K] KAN D.M. — *A combinatorial definition of homotopy groups*, Annals of Math., Vol.**67**,n° 2 (1958), 1282-312.

[W] WHITEHEAD G.W. — *Elements of homotopy theory*, Springer, 1978.

– ◇ –

Institut Fourier
B.P.74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
(France)

(30 novembre 1988)