JULIO RUBIO
FRANCIS SERGERAERT

2. Ensembles simpliciaux

Cours de l'institut Fourier, tome 20 (1986), p. 39-69
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1986__20__39_0>

2. Ensembles simpliciaux

5. Premières définitions et exemples

5.1. DÉFINITION. — *Un ensemble simplicial* $K = \{K_q\}_{q \in \mathbf{N}}$ *est un ensemble gradué muni d'applications* $\partial_{i,q} : K_q \to K_{q-1}$, $s_{i,q} : K_q \to K_{q+1}$, $0 \leqslant i \leqslant q$, $q \in \mathbf{N}$, *vérifiant :*

(i) $\partial_{i,q-1}\partial_{j,q} = \partial_{j-1,q-1}\partial_{i,q}$ *si* $i < j$;

(ii) $s_{i,q+1}s_{j,q} = s_{j+1,q+1}s_{i,q}$ *si* $i \leqslant j$;

(iii) $\partial_{i,q+1}s_{j,q} = s_{j-1,q-1}\partial_{i,q}$ *si* $i < 1$;
$\partial_{j,q+1}s_{j,q} = id = \partial_{j+1,q+1}s_{j,q}$;
$\partial_{i,q+1}s_{j,q} = s_{j,q-1}\partial_{i-1,q}$ *si* $i > j+1$.

5.2. NOTATIONS. — S'il n'y a pas de confusion possible, on écrira ∂_i, s_i au lieu de $\partial_{i,q}, s_{i,q}$ respectivement. On dit que ∂_i est *un opérateur de face* et s_i un *opérateur de dégénérescence.* Les éléments de K_q sont les *q-simplexes (abstraits) de* K .

5.3. DÉFINITION. — *Soient* K, L *des ensembles simpliciaux. Un morphisme simplicial* $f : K \to L$ *est un ensemble d'applications* $f_q : K_q \to L_q$, $q \in \mathbf{N}$, *telles que* $f_q\partial_i = \partial_i f_{q+1}$, $f_q s_i = s_i f_{q-1}$ *si* $0 \leqslant i \leqslant q$, $q \in \mathbf{N}$.

5.4. DÉFINITION. — *Soit* $\underline{n} = \{0, 1, \ldots, n\}$ *et* $\Delta(\underline{m}, \underline{n})$ *l'ensemble des applications croissantes (au sens large) de* $\underline{m}$ *vers* $\underline{n}$. *On définit la petite catégorie* Δ; *elle a pour objet l'ensemble des* $\underline{n}$, $n \in \mathbf{N}$, *et* $\Delta(\underline{m}, \underline{n})$ *pour morphismes de* $\underline{m}$ *vers* $\underline{n}$.

5.5. LEMME. — *Soit* $\delta_i = \delta_{i,n} \in \Delta(\underline{n-1}, \underline{n})$ *l'application qui "oublie* i*", c'est-à-dire* $\delta_i(j) = j$, *si* $j < i$, $\delta_i(j) = j+1$ *si* $j \geqslant i$. *Soit* $\sigma_i = \sigma_{i,n} \in \Delta(\underline{n+1}, \underline{n})$ *l'application qui "répète* i*", c'est-à-dire* $\sigma_i(j) = j$ *si* $j \leqslant i$, $\sigma_i(j) = j-1$ *si* $j > i$. *Ces applications sont définies pour* $0 \leqslant i \leqslant n$ *et* $n \in \mathbf{N}$. *Alors :*

(i) $\delta_j\delta_i = \delta_i\delta_{j-1}$ *si* $i < j$;

(ii) $\sigma_j\sigma_i = \sigma_i\sigma_{j+1}$ *si* $i \leqslant j$;

(iii) $\sigma_j\delta_i = \delta_i\sigma_{j-1}$ *si* $i < j$;
$\sigma_j\delta_j = 1 = \sigma_j\delta_{j+1}$;
$\sigma_j\delta_i = \delta_{i-1}\sigma_j$, *si* $i > j+1$.

Démonstration. — C'est une simple vérification . ■

5.6. LEMME. — *Soient δ_i, σ_i comme dans le lemme précédent. Alors tout $\mu \in \Delta(\underline{n}, \underline{m})$ a une décomposition unique :*

$$\mu = \delta_{i_1} \cdots \delta_{i_s} \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_t} ,$$

avec $0 \leqslant i_s < \cdots < i_1 \leqslant m$, $0 \leqslant j_1 < \cdots < j_t < n$, *et* $n - t + s = m$.

Démonstration. — $\underline{m} - \mu(\underline{n}) = \{i_1, \ldots, i_s\}$, avec $0 \leqslant i_s < \cdots < i_1 \leqslant m$. Les entiers $0 \leqslant j_1 < \cdots < j_t < n$ sont les éléments de $\underline{n}$ tels que $\mu(j_r) = \mu(j_r + 1)$, pour $1 \leqslant r \leqslant t$. Ce sont les indices cherchés. ■

5.7. PROPOSITION. —

(a) Les ensembles simpliciaux et les morphismes simpliciaux forment une catégorie $\mathcal{C}$.

(b) La catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à celle qui a pour objet les foncteurs contravariants de Δ vers la catégorie des ensembles et pour morphismes les transformations naturelles entre de tels foncteurs.

Démonstration. —

(a) Simple vérification.

(b) Soit $\mathcal{D}$ la nouvelle catégorie définie. On va définir deux foncteurs inverses $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

Soit $K \in \text{Obj } \mathcal{C}$; on va définir un foncteur $F(K)$, contravariant, de Δ vers la catégorie des ensembles. Si $\underline{n} \in \text{Obj } \Delta$, définissons $F(K)(\underline{n}) = K_n$. Par ailleurs, si $\mu \in \Delta(\underline{n}, \underline{m})$, par le lemme 5.6, μ s'écrit $\mu = \delta_{i_1} \cdots \delta_{i_s} \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_t}$ de façon unique (si les conditions 5.6 sur les indices sont satisfaites). Définissons

$$F(K)(\mu) = s_{j_t} \cdots s_{j_1} \partial_{i_s} \cdots \partial_{i_1} : K_m \to K_n .$$

On vérifie que $F(K)$ est un foncteur contravariant, et que $F(K) \in \text{Obj } \mathcal{D}$. Si $f \in \mathcal{C}(K, L)$ et $\underline{n} \in \text{Obj } (\Delta)$, définissons $F(f)(\underline{n}) = f_n : K_n \to L_n$; on voit que $F(f)$ est une transformation naturelle de $F(K)$ vers $F(L)$.

Par ailleurs, si $X \in \text{Obj } \mathcal{D}$, définissons $G(X)_q = X(\underline{q})$ si $q \in \mathbf{N}$, $\partial_i = X(\delta_i)$, $s_i = X(\sigma_i)$. En appliquant le lemme 5.5 et le fait que X est un foncteur contravariant, on voit que $G(X)$ est un ensemble simplicial.

Enfin, si on a une transformation naturelle $t \in \mathcal{D}(X, Y)$, définissons $G(t)_q = t(\underline{q}) : X(\underline{q}) \to Y(\underline{q})$; alors $G(t)$ est un morphisme simplicial de $G(X)$ vers $G(Y)$. ■

5.8. NOTATIONS. —

1) Si X est un foncteur contravariant de Δ vers la catégorie des ensembles, on notera $X_n = X(\underline{n})$ et, si $\mu \in \Delta(\underline{m}, \underline{n})$, on écrira μ^* au lieu de $X(\mu) : X_n \to X_m$.

2) Dans la suite, on travaillera indistinctement dans les catégories $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{D}$ de la proposition 5.7, selon les besoins, et on appellera *ensembles simpliciaux* (resp. *morphismes simpliciaux*) les objets (resp. morphismes) de l'une quelconque des deux catégories.

5.9. DÉFINITIONS. —

$\Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n}, \underline{m}) = \{\mu \in \Delta(\underline{n}, \underline{m})$ *tel que* μ *est surjectif*$\}$.

$\Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{n}, \underline{m}) = \{\mu \in \Delta(\underline{n}, \underline{m})$ *tel que* μ *est injectif*$\}$.

5.10. EXEMPLES. —

(1). — Soit $p \in \mathbf{N}$ fixé. Définissons $X_n = \Delta(\underline{n}, \underline{p})$, et, si $\alpha \in \Delta(\underline{m}, \underline{n})$, $\alpha^* : \Delta(\underline{n}, \underline{p}) \to \Delta(\underline{m}, \underline{p}) : \mu \mapsto \mu \circ \alpha$. Alors X est un ensemble simplicial que nous appellerons Δ_p . Observons que les opérateurs de face et de dégénérescence vérifient $\partial_i(\mu) = \mu \circ \delta_i$, $s_i(\mu) = \mu \circ \sigma_i$.

(2). — Soit $p \in \mathbf{N}$ fixé. Soit pour chaque $n \in \mathbf{N}$ un élément $*_n$ fixé et définissons un ensemble simplicial X par $X_n = *_n \coprod \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n}, \underline{p})$ et, si $\alpha \in \Delta(\underline{m}, \underline{n})$,

$$\alpha^*(*_m) = *_n$$

$$\alpha^*(\mu) = \left\{ \begin{array}{ll} \mu \circ \alpha & \text{si } \mu \circ \alpha \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{m}, \underline{p}) \\ *_m & \text{sinon} \end{array} \right\} \text{ pour } \mu \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n}, \underline{p}) .$$

Il est facile de vérifier qu'on a bien ainsi défini un ensemble simplicial qu'on appellera S_p .

(3). — Soit $(\mathcal{S}, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné et pour chaque $n \in \mathbf{N}$, définissons $\mathcal{S}_n = \{(a_0, \ldots, a_n)$ tel que $a_i \in \mathcal{S}$, $i = 0, \ldots, n$ et $a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_n\}$.

On définit des applications

$$\partial_i : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_{n-1} \quad , \quad 0 \leqslant i \leqslant n \; ;$$
$$(a_0, \ldots, a_n) \mapsto (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

et

$$s_i : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_{n+1} \quad , \quad 0 \leqslant i \leqslant n \; ;$$
$$(a_0, \ldots, a_n) \mapsto (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) .$$

On dit que a_i est un *sommet* de $(a_0, \ldots, a_n)$. Si $s \in \mathcal{S}_n$ et $\overline{s} \in \mathcal{S}_m$, on écrit $s \subset \overline{s}$ si chaque sommet de s est un sommet de $\overline{s}$, et si chaque sommet répété dans s est autant répété dans $\overline{s}$.

Un *complexe simplicial* (abstrait) *à sommets dans* $\mathcal{S}$ est un ensemble gradué $C = \{C_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ qui vérifie :

(i) $C_n \subset \mathcal{S}_n$ pour tout n;

(ii) si $0 \leqslant i \leqslant n$, alors $\partial_i C_n \subset C_{n-1}$, $s_i C_n \subset C_{n+1}$.

A tout complexe simplicial est associé de façon canonique un ensemble simplicial.

(4). — Soit $\Delta^n = \{(t_0, \ldots, t_n\} \in \mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^{\underline{n}}$ tel que $0 \leqslant t_i \leqslant 1$, $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1\} \subset \mathbf{R}^{\underline{n}}$ le *n-simplexe standard.* Définissons une application continue de Δ^{n-1} vers Δ^n par

$$\widetilde{\delta}_i(t_0, \ldots, t_{n-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1})$$

et une autre de Δ^{n+1} vers Δ^n par

$$\widetilde{\sigma}_i(t_0, \ldots, t_{n+1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1}) \ .$$

Il est facile de vérifier que ces opérateurs vérifient les égalités (i), (ii), (iii) du lemme 5.5. Ceci permet d'associer à chaque espace topologique X un ensemble simplicial $S(X)$ défini par :

$$S(X)_n = \{f : \Delta^n \to X \ continues\ \}$$
$$\partial_i(f) = f \circ \widetilde{\delta}_i \ , \ s_i(f) = f \circ \widetilde{\sigma}_i \ .$$

De plus si $g : X \to Y$ est une application continue entre espaces topologiques, alors $S(g)_n : S(X)_n \to S(Y)_n : f \mapsto g \circ f$ définit un morphisme simplicial. On a ainsi défini le *foncteur singulier* S de la catégorie des espaces topologiques vers celle des ensembles simpliciaux.

(5). — Soit $p \in \mathbf{N}$ fixé, et π un groupe abélien fixé. Considérons pour chaque $n \in \mathbf{N}$ l'ensemble simplicial Δ_n de l'exemple (1). Soit $C_p(\Delta_n)$ le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par les p-simplexes de Δ_n; il est donc engendré par l'ensemble $(\Delta_n)_p = \Delta(\underline{p}, \underline{n})$.

Définissons aussi $C^p(\Delta_n; \pi) = \mathrm{Hom}(C_p(\Delta_n); \pi)$. Il existe une bijection canonique entre $C^p(\Delta_n; \pi)$ et l'ensemble des applications de $(\Delta_n)_p$ vers π; car pour définir un homomorphisme de $C_p(\Delta_n)$ vers π, il suffit de connaître l'image de chaque générateur.

Si $\alpha \in \Delta(\underline{m}, \underline{n})$, on peut définir

$$\begin{aligned} \alpha_* : (\Delta_m)_p &\to (\Delta_n)_p \\ \mu &\mapsto \alpha \circ \mu \end{aligned}$$

On peut alors construire un nouvel ensemble simplicial qu'on notera $E(\pi, p+1)$, où :

$$E(\pi, p+1)_n = C^p(\Delta_n \ ; \ \pi)$$

et si

$$\begin{aligned} \alpha \in \Delta(\underline{m}, \underline{n}) \ , \ \alpha^* : C^p(\Delta_n, \pi) &\to C^p(\Delta_m; \pi) \\ \varphi &\mapsto \alpha^*(\varphi) \end{aligned}$$

où $\alpha^*(\varphi)$ est défini sur le générateur μ de $C_p(\Delta_m)$ par :

$$[\alpha^*(\varphi)](\mu) = \varphi[\alpha_*(\mu)] \ .$$

On va définir un morphisme simplicial $d^{p+1} : E(\pi, p+1) \to E(\pi, p+2)$. Soit $\{\partial_i\}$ les opérateurs de face de l'ensemble simplicial Δ_n de l'exemple (1) et définissons :

$$\partial_n^{p+1} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \partial_i : (\Delta_n)_{p+1} \to C_p(\Delta_n) \ ;$$

par linéarisation, ∂_n^{p+1} s'étend en

$$\partial_n^{p+1} : C_{p+1}(\Delta_n) \to C_p(\Delta_n) .$$

Pour chaque n les applications cherchées sont :

$$\begin{aligned}(d^{p+1})_n : E(\pi, p+1)_n &\to E(\pi, p+2)_n \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ \partial_n^{p+1} .\end{aligned}$$

On vérifie que d^{p+1} est un morphisme simplicial. On remarque aussi que $(d^{p+1})_n$ est un morphisme de $\mathbf{Z}$-modules.

On peut donc définir un nouvel ensemble simplicial $K(\pi, p)$:

$$K(\pi, p)_n = Z^p(\Delta_n, \pi) = \operatorname{Ker}(d^{p+1})_n \subset E(\pi, p+1)_n ;$$

les opérateurs de face et dégénérescence de $K(\pi, p)$ sont définis par restriction; ces restrictions sont bien définies puisque d^{p+1} est un morphisme simplicial.

(6). — La construction précédente peut être reprise en remplaçant $C_p(\Delta_n)$ par le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par $\Delta^{\text{inj}}(\underline{p}, \underline{n})$. Certaines modifications doivent être apportées; par exemple :

$$[\alpha^*(\varphi)](\mu) = \begin{cases} \varphi(\alpha \circ \mu) & \text{si } \alpha \circ \mu \in \Delta^{\text{inj}}(\underline{p}, \underline{n}); \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Moyennant ces précautions, par un procédé tout à fait analogue, on définit deux ensembles simpliciaux $\overline{E}(\pi, p+1)$ et $\overline{K}(\pi, p)$. Il est facile de démontrer que $\overline{E}(\pi, p+1)$ est isomorphe au sous-ensemble simplicial de $E(\pi, p+1)$ formé par les applications qui s'annulent sur les générateurs qui ne sont pas dans $\Delta^{\text{inj}}(\underline{p}, \underline{n})$. De la même façon, $\overline{K}(\pi, p)$ est isomorphe au sous-ensemble simplicial correspondant de $K(\pi, p)$.

(7). — Soit $p \in \mathbf{N}$ et π un groupe abélien, fixés. Définissons $C_n^p = \Delta^{\text{sur}}(\underline{n}, \underline{p})$. Observons qu'il existe une bijection canonique entre $\Delta^{\text{sur}}(\underline{n}, \underline{p})$ et $\Delta^{\text{inj}}(\underline{p}, \underline{n})$. En particulier, le cardinal de C_n^p est le coefficient du binôme noté habituellement de la même façon.

On construit un nouvel ensemble simplicial $\widetilde{K}(\pi, p)$: $\widetilde{K}(\pi, p)_n = \oplus_{\tau \in C_n^p} \pi_\tau$, avec $\pi_\tau = \pi$ pour chaque $\tau \in C_n^p$; si $\mu \in \Delta(\underline{m}, \underline{n})$, nous devons définir

$$\mu^* : \bigoplus_{\tau \in C_n^p} \pi_\tau \to \bigoplus_{\alpha \in C_m^p} \pi_\alpha .$$

Il suffit de définir $\mu^* | \pi_\tau$ pour chaque $\tau \in C_n^p$:

$$\mu^* | \pi_\tau = \begin{cases} \text{le morphisme nul si } \tau \circ \mu \notin C_m^p \\ \text{l'identité } \pi_\tau \to \pi_{\tau \circ \mu} \text{ si } \tau \circ \mu \in C_m^p . \end{cases}$$

Exercice. — Montrer que les ensembles simpliciaux $\overline{K}(\pi, p)$ de l'exemple (6) et $\widetilde{K}(\pi, p)$ de l'exemple (7) sont isomorphes.

6. Réalisation

6.1. PROPOSITION. —

a) $\alpha \in \Delta^{\text{sur}}(\underline{n},\underline{m})$ *si et seulement si* $\alpha = \sigma_{j_1} \cdots \sigma_{j_t}$ *avec* $0 \leqslant j_1 < \cdots < j_t < n$ *, et* $n = m + t$ *.*

b) $\alpha \in \Delta^{\text{inj}}(\underline{n},\underline{m})$ *si et seulement si* $\alpha = \delta_{i_1} \cdots \delta_{i_s}$ *avec* $0 \leqslant i_s < \cdots < i_1 \leqslant m$ *, et* $n + s = m$ *.*

Démonstration. — C'est un corollaire du lemme 5.6. ∎

6.2. DÉFINITION. — *Soit* X *un ensemble simplicial. Un élément* $x \in X_n$ *est un* n*-simplexe dégénéré s'il existe* $y \in X_{n-1}$ *,* $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *tels que* $x = s_i y$ *.*

6.3. PROPOSITION. — *Soit* X *un ensemble simplicial. Un élément* $x \in X_n$ *est dégénéré si et seulement si il existe* $\alpha \in \Delta^{\text{sur}}(\underline{n},\underline{m})$ *, avec* $m < n$ *, et* $y \in X_m$ *tel que* $x = \alpha^* y$ *.*

Démonstration. — Appliquer la proposition 6.1. *a)* en observant que $\sigma_i^* = s_i$. ∎

NOTATION. — Si X est un ensemble simplicial, X_n^* note l'ensemble des n-simplexes non degénérés de X .

6.4. EXEMPLES. —

(1). — Dans l'exemple 5.10 (1), $(\Delta_p)_n^* = \Delta^{\text{inj}}(\underline{n},\underline{p})$. Avec cette terminologie, on peut énoncer l'affirmation de l'exemple 5.10 (6) d'une autre façon : "$\overline{E}(\pi, p+1)$ est isomorphe au sous-ensemble simplicial de $E(\pi, p+1)$ formé par les applications qui s'annulent sur les simplexes dégénérés de Δ_n , pour chaque n" .

(2). — Dans l'exemple 5.10 (2), où $X_n = *_n \coprod \Delta^{\text{sur}}(\underline{n},\underline{p})$, nous avons :

$X_0^* = \{*_0\} = X_0$;

$X_m^* = \emptyset$ si $m \neq 0, p$;

$X_p^* = \{1_p\}$ où $1_p \in \Delta(\underline{p},\underline{p})$ est l'application identique .

(3). — Si $C = \{C_n\}$ est un complexe simplicial, les n-simplexes non degénérés de l'ensemble simplicial associé à C sont les $(n+1)$-uplets $(a_0, \ldots, a_n) \in C_n$ tels que $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.

(4). — Si X est un espace topologique, les applications injectives $f : \Delta^n \to X$ sont des n-simplexes non dégénérés de $S(X)$.

6.5. REMARQUES. — Soit Δ^n le n-simplexe standard, et $\widetilde{\sigma}_i$ et $\widetilde{\delta}_i$ comme définis dans l'exemple 5.10 (4). Considérons la catégorie $\mathcal{A}$ dont les objets sont $\{\Delta^n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$ et les morphismes $\mathcal{A}(\Delta^n, \Delta^m)$ sont les applications affines de Δ^n vers Δ^m . Alors on peut définir un foncteur covariant $F : \Delta \to \mathcal{A}$ par $F(\underline{n}) = \Delta^n$ et si $\alpha \in \Delta(\underline{n}, \underline{m})$, $F(\alpha) = \alpha_*$ est l'application affine qui envoie le somme d'indice i de Δ^n sur le sommet d'indice $\alpha(i)$ de Δ^m , $0 \leqslant i \leqslant n$. On observe que $\delta_{i*} = \widetilde{\delta}_i$, $\sigma_{i*} = \widetilde{\sigma}_i$ pour tout i .

6.6. DÉFINITION. — *Soit X un ensemble simplicial. On munit chaque X_n de la topologie discrète; on considère les produits $X_n \times \Delta^n$ et on pose $\overline{X} = \coprod_{n \geqslant 0} X_n \times \Delta^n$. Sur $\overline{X}$ on définit la relation :*

$$(\partial_i x_n, t_{n-1}) \sim (x_n, \widetilde{\delta}_i t_{n-1}) \text{ si } x_n \in X_n \ , \ t_{n-1} \in \Delta^{n-1} \ ;$$

$$(s_i x_n, t_{n+1}) \sim (x_n, \widetilde{\sigma}_i t_{n+1}) \text{ si } x_n \in X_n \ , \ t_{n+1} \in \Delta^{n+1} \ .$$

Le saturé de cette relation par réflexivité, symétrie et transitivité nous fournit une relation d'équivalence sur $\overline{X}$ qu'on note aussi $\sim$. On définit le réalisé (géométrique) $|X|$ de l'ensemble simplicial X comme le quotient $|X| = \overline{X}/\sim$.

6.7. PROPOSITION. — *Soit X un ensemble simplicial, $x \in X_n$, $t \in \Delta^m$; alors si $\alpha \in \Delta(\underline{m}, \underline{n})$, $(\alpha^* x, t) \sim (x, \alpha_* t)$.*

Démonstration. — Utiliser la décomposition de α fournie par le lemme 6.5. ∎

NOTATION. — On note $|x_n, t_n|$ la classe de (x_n, t_n) dans $|X|$.

6.8. DÉFINITION. — *Soient X, Y des ensembles simpliciaux et $f : X \to Y$ un morphisme simplicial. La réalisation du morphisme simplicial f est l'application $|f| : |X| \to |Y|$ définie par $|f|(|x_n, t_n|) = |f(x_n), t_n|$. (Noter que $|f|$ est bien définie).*

6.9. REMARQUES. — L'application $|f|$ de la définition précédente est une application continue entre espaces topologiques. On a en fait défini un foncteur, le *foncteur de réalisation*, de la catégorie des ensembles simpliciaux vers celle des espaces topologiques. Ce foncteur est étroitement relié au foncteur S défini dans l'exemple 5.9 (4) des espaces topologiques vers les ensembles simpliciaux. De façon précise le foncteur de réalisation est adjoint du foncteur S . Une étude complète de cette question peut-être trouvée dans le chapitre III de l'ouvrage [M].

Le foncteur de réalisation est à valeurs dans la catégorie des CW-complexes ([M], page 56). Ceci sera utilisé plus tard.

6.10. PROPOSITION. — *Soit X un ensemble simplicial et $x \in X_n$. Alors il existe un unique triplet (m, z, α) vérifiant $m \leqslant n$, $z \in X_m$, $\alpha \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n}, \underline{m})$, $x = \alpha^* z$ et z est non dégénéré.*

Démonstration. — Exercice. ∎

Remarque. — Noter que x est non dégénéré si et seulement si $n = m$, et en ce cas $x = z$ et $\alpha = \mathrm{id}$.

6.11. LEMME. — *Soit X un ensemble simplicial. Alors chaque élément de $|X|$ admet un représentant (z,t) , avec z non dégénéré.*

Démonstration. — Soit $|x,\widetilde{t}| \in |X|$; à x on associe le triplet unique (m,z,α) de la proposition 6.10. Alors $(x,\widetilde{t}) = (\alpha^* z, \widetilde{t}) \sim (z, \alpha_* \widetilde{t})$ où z est non dégénéré; il suffit de prendre $t = \alpha_* \widetilde{t}$. ∎

6.12. DÉFINITION. — *Soit X un ensemble simplicial et $x \in X_n$. Considérons $\partial_i x$ auquel, par la proposition 6.10, on peut associer un terme unique (m,z,α) , avec $m \leqslant n-1$, $z \in X_m$, $\alpha \in \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n-1},\underline{m})$, $\partial_i x = \alpha^* z$ et z non dégénéré; définissons :*

$$\overline{\partial}_i \ : X_n \to \coprod_{m<n} X_m^* \times \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n-1},\underline{m})$$
$$x \mapsto (z,\alpha) \ .$$

Munissons X_n^* de la topologie discrète, et considérons l'espace topologique $\widetilde{X} = \coprod_{n\geqslant 0} X_n^* \times \Delta^n$. Définissons sur $\widetilde{X}$ une relation $\approx$ par :

$$(x, \widetilde{\delta}_i t) \approx \big(pr_1 \overline{\partial}_i x, (pr_2 \overline{\partial}_i x)_* t\big)$$

où $x \in X_n$, $t \in \Delta^{n-1}$, et où $pr_1 : X_m^* \times \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n-1},\underline{m}) \to X_m^*$ et $pr_2 : X_m^* \times \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n-1},\underline{m}) \to \Delta^{\mathrm{sur}}(\underline{n-1},\underline{m})$ sont les projections canoniques. Par saturation on obtient une relation d'équivalence sur $\widetilde{X}$ qu'on note aussi $\approx$. Le réalisé économique $|X|^*$ de l'ensemble simplicial X est l'espace quotient $|X|^* = \coprod_{n\geqslant 0} X_n^* \times \Delta^n / \approx$.

6.13. PROPOSITION. — *Le réalisé et le réalisé économique d'un ensemble simplicial X sont canoniquement homéomorphes.*

Démonstration. — L'inclusion canonique

$$\coprod_{n\geqslant 0} X_n^* \times \Delta^n \to \coprod_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n$$

est compatible avec les relations d'équivalence et définit donc une application continue $|X|^* \to |X|$. Cette application admet comme inverse (voir Lemme 6.11) l'application induite sur les quotients par l'application continue

$$\coprod_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta^n \to \coprod_{n\geqslant 0} X_n^* \times \Delta^n$$
$$(x,t) \mapsto (z, \alpha_* t)$$

où z et α sont associés à x par la proposition 6.10. ∎

6.14. EXEMPLES. —

(1). — Soit un complexe simplicial $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; observons (voir exemples 5.10 (3) et 6.4 (3)) que $\mathrm{Im}(\partial_i \mid C_n^*) \subset C_{n-1}^*$; autrement dit l'image par ∂_i d'un

simplexe non dégénéré est un simplexe non dégénéré. Donc le réalisé économique de ce complexe simplicial est l'espace $\coprod_{n\geqslant 0} C_n^* \times \Delta^n / \approx$, où $\approx$ est le saturé de la relation $(x, \widetilde{\delta}_i t) \approx (\partial_i x, t)$.

(2). — Considérons l'ensemble simplicial Δ_p de l'exemple 5.10 (1). A chaque $\mu \in (\Delta_p)_n = \Delta(\underline{n}, \underline{p})$, associons le $(n+1)$-uplet $(\mu(0), \ldots, \mu(n))$. Cette association définit un isomorphisme simplicial entre Δ_p et le complexe simplicial $C = \{C_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, avec $C_n = \{(a_0, \ldots, a_n)$ tel que $a_0 \leqslant \cdots \leqslant a_n \, , a_i \in \mathbf{N} \, , 0 \leqslant a_i \leqslant p \, , i = 0, \ldots, n\}$.

Il résulte de ceci et de l'exemple antérieur une démonstration simple de ce que le réalisé de Δ_p est homéomorphe au p-simplexe standard Δ^p .

(3). — Considérons l'ensemble simplicial X de l'exemple 5.10 (2) : $X_n = *_n \coprod \Delta^{\text{sur}}(\underline{n}, \underline{p})$. Puisque les seuls simplexes non dégénérés (exemple 6.4 (2)) sont un O-simplexe et un p-simplexe, on voit simplement que le réalisé économique de X est homéomorphe à S^p , la sphère standard de dimension p .

(4). — On démontrera plus loin que les réalisés des ensembles simpliciaux $E(\pi, p)$, $\overline{E}(\pi, p)$ des exemples 5.10 (5) et (6) sont contractiles. On verra aussi que les ensembles simpliciaux $K(\pi, p)$, $\overline{K}(\pi, p)$ et $\widetilde{K}(\pi, p)$ de 5.10 (5), (6) et (7) ont pour réalisés des espaces d'Eilenberg-Mac Lane de type (π, p); autrement dit, ce sont des espaces dont tous les groupes d'homotopie sont nuls sauf celui de dimension p qui est isomorphe à π .

7. Homologie simpliciale. Fibrés simpliciaux

7.1. DÉFINITION. — *Soit X un ensemble simplicial. Soit $C_q(X)$ le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par X_q . Soit $d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i : X_n \to C_{n-1}(X)$, qui, par linéarité s'étend en un homomorphisme $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$. Alors $(C_*(X), d)$, noté aussi $C(X)$ est le complexe de chaînes associé à l'ensemble simplicial X .*

Remarque. — Noter que, par la condition (i) de la définition d'ensemble simplicial (définition 5.1), $C(X)$ est effectivement un complexe de chaînes.

7.2. DÉFINITION. — *Soit G un groupe abélien. On définit l'homologie simpliciale à coefficients dans G de l'ensemble simplicial X comme l'homologie du complexe de chaînes $C(X) \otimes G$; on la note $H_*(X \; ; \; G)$. De même, la cohomologie simpliciale à coefficients dans G de X est l'homologie du complexe de cochaînes* Hom $\big(C(X), G\big)$ *; on la note $H^*(X \; ; G)$.*

NOTATION. — Si le groupe de coefficients n'est pas spécifié, il est sous-entendu qu'il s'agit de $\mathbf{Z}$. Dans ce cas on écrit simplement $H_*(X)$ et $H^*(X)$.

7.3. EXEMPLE. — Observons que si Y est un espace topologique, l'homologie de $S(Y)$ coïncide exactement avec la définition de l'homologie singulière de Y . On peut donc écrire $H_*(Y\ ;\ G) = H_*\big(S(Y); G\big)$ et $H^*(Y\ ;\ G) = H^*\big(S(Y); G\big)$.

7.4. EXEMPLE. — En utilisant les définitions précédentes et la terminologie utilisée en algèbre homologique (cycles, bords,...), on peut donner une description plus concise des ensembles simpliciaux $E(\pi, p+1)$, $K(\pi, p)$ de l'exemple 5.10 (5). On dira simplement que les n-simplexes de $E(\pi, p+1)$ sont les p-cochaînes de Δ_n à coefficients dans π . De la même façon, les n-simplexes de $K(\pi, p)$ sont les p-cocycles de Δ_n à coefficients dans π .

7.5. REMARQUE. — Soit X un ensemble simplicial. Soit $C_q^N(X)$ le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par X_q^* . Définissons

$$\widetilde{\partial}_i : X_n^* \to C_{n-1}^N(X)\ ,\ \text{si } 0 \leqslant i \leqslant n\ ,$$

par

$$x \mapsto \begin{cases} \partial_i x & \text{si } \partial_i x \in X_{n-1}^* \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

Construisons $\widetilde{d}_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\widetilde{\partial}_i : X_n^* \to C_{n-1}^N(X)$ qui s'étend linéairement en $\widetilde{d}_n : C_n^N(X) \to C_{n-1}^N(X)$. Alors, $(C_*^N(X), \widetilde{d})$ est un complexe de chaînes, qu'on appelle *le complexe de chaînes normalisé de l'ensemble simplicial* X, et qu'on note $C_N(X)$.

On peut démontrer que $C(X)$ et $C_N(X)$ sont homotopiquement équivalents. En particulier les groupes d'homologie et de cohomologie de X peuvent se calculer indifféremment à partir de $C(X)$ ou de $C_N(X)$.

7.6. EXEMPLE. — Les descriptions de $E(\pi, p+1)$ et $K(\pi, p)$ de l'exemple 7.4 peuvent être adaptées pour $\overline{E}(\pi, p+1)$ et $\overline{K}(\pi, p)$ (exemple 5.10 (6)) à l'aide de cochaînes et de cocycles "normalisés".

7.7. THÉORÈME. —

a) Soit K un ensemble simplicial. Alors les groupes d'homologie (et de cohomologie) de K et de $|K|$ sont isomorphes.

b) Soit X un espace topologique. Alors les groupes d'homologie de X et de $|S(X)|$ sont isomorphes.

Démonstration. — C'est la proposition 16.2 de [M]. ∎

7.8. COROLLAIRE. — *Le morphisme simplicial $d^{p+1} : E(\pi, p+1) \to E(\pi, p+2)$ défini dans l'exemple 5.10 (5) a pour image l'ensemble simplicial $K(\pi, p+1)$.*

7.9. REMARQUE. — Le même raisonnement peut être utilisé pour $\overline{E}(\pi, p+1)$, $\overline{K}(\pi, p+1)$ et les cochaînes normalisées pour obtenir un morphisme simplicial $\overline{d}_{p+1}$: $\overline{E}(\pi, p+1) \to \overline{K}(\pi, p+1)$.

7.10. DÉFINITION. — *Une structure de ($\mathbf{Z}$-)coalgèbre sur un $\mathbf{Z}$-module gradué M est défini par la donnée de morphismes de $\mathbf{Z}$-modules $\Delta : M \to M \otimes M$ (appelé coproduit), $\eta : M \to \mathbf{Z}$ (counité), $\varepsilon : \mathbf{Z} \to M$ (coaugmentation) tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} & M \otimes M \arrow[dr, "\Delta\otimes 1"] & \\ M \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & M \otimes M \otimes M \\ & M \otimes M \arrow[ur, "1\otimes\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & M \otimes M \arrow[r, "1\otimes\eta"] & M \otimes \mathbf{Z} \arrow[dr, "\simeq"] & \\ M \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[rrr, "1"] & & & M \\ & M \otimes M \arrow[r, "\eta\otimes 1"] & \mathbf{Z} \otimes M \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \\ M \arrow[r, "\Delta"'] & M \otimes M . \end{tikzcd}$$

Si de plus M est un module différentiel (c'est-à-dire si des morphismes d_q : $M_q \to M_{q-1}$ vérifiant $d_{q-1}d_q = 0$ sont définis), et si $\overline{d}\Delta = \Delta d$ où $\overline{d}$ est la différentielle induite sur $M \otimes M$, on dit alors que M est une coalgèbre différentielle.

7.11. DÉFINITION. — *Si X et Y sont des ensembles simpliciaux, on définit l'ensemble simplicial produit $X \times Y$ par $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$, $\partial_i(x,y) = (\partial_i x, \partial_i y)$ et $s_i(x,y) = (s_i x, s_i y)$.*

7.12. DÉFINITIONS. — *Soient X et Y des ensembles simpliciaux.*

L'application d'Alexander-Whitney $f : C(X \times Y) \to C(X) \otimes C(Y)$ est définie comme suit : si $x \in X_n$, $y \in Y_n$, alors $f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \partial''_{n-i}(x) \otimes \partial'_i(y)$ où $\partial''_{n-i} = \partial_{i+1} \cdots \partial_n$ et $\partial'_i = \partial_0 \cdots \partial_0$ (i fois).

L'opérateur d'Alexander-Whitney Δ est défini par : $\Delta = f \circ C(D) : C(X) \to C(X) \otimes C(X)$ où $D : X \to X \times X$ est le morphisme diagonal $D(x) = (x,x)$ (autrement dit, $\Delta(x) = \sum_{i=0}^{n} \partial''_{n-i}(x) \otimes \partial'_i(x)$ si $x \in X_n$) .

7.13. PROPOSITION. — *Soit X un ensemble simplicial et x_0 un O-simplexe fixé de X . Alors $C(X)$ est une coalgèbre différentielle avec comme coproduit l'opérateur d'Alexander-Whitney, comme unité η définie par $\eta(x) = 1$ si $x \in X_0$, $\eta(x) = 0$ sinon et la coaugmentation ε définie par $\varepsilon(1) = x_0$.*

7.14. DÉFINITION. — *Un groupe simplicial G est un foncteur contravariant de la catégorie Δ vers la catégorie des groupes.*

7.15. REMARQUES. —

1) De façon analogue on peut définir un groupe simplicial comme un ensemble simplicial G tel que G_n soit un groupe pour chaque n et tel que les opérateurs de face et de dégénérescence soient des morphismes de groupes.

2) Un théorème dû à Milnor montre l'existence d'un homéomorphisme canonique $|A \times B| \xrightarrow{\cong} |A| \times |B|$ si A et B sont deux ensembles simpliciaux. On en déduit par composition une loi de groupe sur le réalisé d'un groupe simplicial :

$$|G| \times |G| \to |G \times G| \to |G| .$$

7.16. EXEMPLES. — Les ensembles simpliciaux $E(\pi, p)$, $\overline{E}(\pi, p)$, $K(\pi, p)$, $\overline{K}(\pi, p)$ et $\widetilde{K}(\pi, p)$ sont des groupes simpliciaux.

7.17. DÉFINITION. — *On dit qu'un groupe simplicial G agit sur un ensemble simplicial F si on a défini un morphisme simplicial (appelé action) $\Phi : G \times F \to F$ tel que $\Phi(e_q, x) = x$ si e_q est l'élément neutre de G_q et si $\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 g_2, x)$ chaque fois que l'un des deux membres, et donc l'autre, a un sens.*

NOTATION. — On écrira simplement gx au lieu de $\Phi(gx)$.

7.18. DÉFINITION. — *Un fibré simplicial est un ensemble de données (B,F,G,τ), où B et F sont des ensembles simpliciaux, G est un groupe simplicial qui agit sur F , et τ est un ensemble d'applications $\tau : B_{n+1} \to G_n$ vérifiant :*

a) $\partial_0 \tau(b) = [\tau(\partial_0 b)]^{-1} \tau(\partial_1 b)$;

b) $\partial_i \tau(b) = \tau(\partial_{i+1} b)$, *si* $i > 0$;

c) $s_i \tau(b) = \tau(s_{i+1} b)$, *si* $i \geqslant 0$;

d) $\tau(s_0 b) = e_q$, *si* $b \in B_q$.

NOTATIONS. — Si (B, F, G, τ) est un fibré simplicial, on dit que B en est la *base*, F la *fibre*, G le *groupe structural* et τ l'*opérateur de torsion* ou simplement la *torsion.*

7.19. DÉFINITION. — *L'espace total $E(\tau)$ d'un fibré simplicial (B, F, G, τ) est défini par $E(\tau)_n = F_n \times B_n$ et :*

$$\partial_0(f, b) = \big(\tau(b).\partial_0 f, \partial_0 b\big) ;$$
$$\partial_i(f, b) = (\partial_i f, \partial_i b) , \ \textit{si } i \geqslant 1 ;$$
$$s_i(f, b) = (s_i f, s_i b) \textit{ pour tout } i .$$

7.20. PROPOSITION. — *L'espace total $E(\tau)$ d'un fibré simplicial (B, F, G, τ) est un ensemble simplicial, et les projections canoniques $p_n : E(\tau)_n \to B_n$ définissent un morphisme simplicial $p : E(\tau) \to B$.*

Démonstration. — C'est une simple vérification.

NOTATIONS. — Eventuellement, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ un fibré simplicial ou même simplement $p : E \to B$.

7.21. EXEMPLE IMPORTANT. — On va définir un fibré simplicial $\big(K(\pi,p)$, $K(\pi,p-1), K(\pi,p-1), \tau\big)$ où l'action de $K(\pi,p-1)$ sur lui-même n'est autre que la structure de groupe simplicial de $K(\pi,p-1)$.

Définissons d'abord $\tau : K(\pi,p)_n \to K(\pi,p-1)_{n-1}$. Si $\mu \in (\Delta_{n-1})_{p-1} = \Delta(\underline{p-1}, \underline{n-1})$, construisons $\mu_1, \mu_2 \in \Delta(\underline{p}, \underline{n})$ comme suit :

$$\mu_1(i) = \begin{cases} 0 & \text{, si } i = 0; \\ \mu(i-1)+1 & \text{, si } i = 1, \ldots, p . \end{cases}$$

$$\mu_2(i) = \begin{cases} 1 & \text{, si } i = 0; \\ \mu(i-1)+1 & \text{, si } i = 1, \ldots, p . \end{cases}$$

Si $\varphi \in K(\pi,p)_n$, considérons $\tau(\varphi) \in E(\pi,p)_{n-1}$ défini sur les générateurs $\mu \in (\Delta_{n-1})_{p-1}$ de $C_{p-1}(\Delta_{n-1})$ par :

$$[\tau(\varphi)](\mu) = \varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2) .$$

PROPRIÉTÉ A. — $\tau(\varphi) \in K(\pi,p-1)_{n-1}$.

Démonstration. — D'abord démontrer la suite d'égalités

$$\left.\begin{array}{ll} P1) & (\beta \circ \delta_i)_1 = \beta_1 \circ \delta_{i+1} \ , \ i = 0, \ldots, p-1 \\ P2) & (\beta \circ \delta_i)_2 = \beta_2 \circ \delta_{i+1} \ , \ i = 0, \ldots, p-1 \end{array}\right\} \text{ si } \beta \in \Delta(\underline{p}, \underline{n-1})$$

$$P3) \quad \beta_1 \circ \delta_0 = \beta_2 \circ \delta_0 .$$

On doit vérifier que $\tau(\varphi)$ appartient au noyau du morphisme $(d^p)_{n-1}$; autrement dit que :

$$[(d^p)_{n-1}\tau(\varphi)](\beta) = 0 \ , \text{ pour tout } \beta \in \Delta(\underline{p}, \underline{n-1}) .$$

Ceci revient à vérifier, compte tenu des définitions de l'exemple 5.10 (5) :

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i [\tau(\varphi)](\beta \circ \delta_i) = 0 \ , \text{ pour tout } \beta \in \Delta(\underline{p}, \underline{n-1}) .$$

En utilisant les propriétés P1, P2 et P3, on obtient la suite de relations :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i[\tau(\varphi)](\beta\circ\delta_i) &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left[\varphi(\beta\circ\delta_i)_1-\varphi(\beta\circ\delta_i)_2\right]\\ &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left[\varphi(\beta_1\circ\delta_{i+1})-\varphi(\beta_2\circ\delta_{i+1})\right]\\ &= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^{j-1}\left[\varphi(\beta_1\circ\delta_j)-\varphi(\beta_2\circ\delta_j)\right]=0\end{aligned}$$

puisque $\gamma\in K(\pi,p)_n$ et donc $\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\varphi(\alpha\circ\delta_i)=0$ pour tout $\alpha\in\Delta(\underline{p+1},\underline{n})$.

PROPRIÉTÉ B.. — *L'application τ est un opérateur de torsion.*

Démonstration. — Soit $\varphi\in K(\pi,p)_n$. Si $\mu\in\Delta(\underline{p-1},\underline{n-2})$, nous avons :

P4) $(\delta_i\circ\mu)_1=\delta_{i+1}\circ\mu_2$ si $i=0,\dots,n-2$;

P5) $(\delta_i\circ\mu)_2=\delta_{i+1}\circ\mu_2$ si $i=1,\dots,n-2$;

P6) $(\delta_0\circ\mu)_2=\delta_0\circ\mu_1$;

P7) $\delta_0\circ\mu_2=\delta_1\circ\mu_2$;

P8) $(\sigma_i\circ\mu)_1=\sigma_{i+1}\circ\mu_1$ si $i=0,\dots,n-2$;

P9) $(\sigma_i\circ\mu)_2=\sigma_{i+1}\circ\mu_2$ si $i=0,\dots,n-2$;

P10) $\sigma_0\circ\mu_1=\sigma_0\circ\mu_2$;

On voit d'abord que $\partial_0\tau(\varphi)=\left[\tau(\partial_0\varphi)\right]^{-1}\tau(\partial_1\varphi)$; dans notre cas, puisque l'action de $K(\pi,p-1)$ sur lui-même n'est autre que la structure de groupe simplicial, on doit vérifier que

$$\left[\partial_0\tau(\varphi)\right](\mu)+\left[\tau(\partial_0\varphi)\right](\mu)=\left[\tau(\partial_1\varphi)\right](\mu)$$

pour tout μ dans $\Delta(\underline{p-1},\underline{n-2})$; cette égalité résulte de la définition de $\partial_i(\varphi)$, $(\partial_i(\varphi)(\alpha)=\varphi(\delta_i\circ\alpha)$ si $\alpha\in\Delta(\underline{p},\underline{n-1}))$ et de propriétés P4, P6 et P7.

De la même façon, on obtient que $\partial_i\tau(\varphi)=\tau(\partial_{i+1}\varphi)$ si $i>0$ (grâce à P4, P5) et que $s_i\tau(\varphi)=\tau(s_{i+1}\varphi)$ si $i\geqslant 0$ (grâce à P8 et P9).

Enfin, en utilisant P10, on voit que $\tau(s_0\varphi)=0$: $\left[(s_0\varphi)(\mu)\right]=s_0\varphi(\mu_1)-s_0\varphi(\mu_2)=\varphi(\sigma_0\circ\mu_1)-\varphi(\sigma_0\circ\mu_2)=0$ si $\mu\in\Delta(\underline{p-1},\underline{n-2})$. ∎

Nous avons donc défini un fibré simplicial $\left(K(\pi,p),K(\pi,p-1),K(\pi,p-1),\tau\right)$, d'où un espace total $E(\tau)$ et une projection p . On va voir maintenant que, à un isomorphisme simplicial près, la projection $p:E(\tau)\to K(\pi,p)$ coïncide avec $d^p:E(\pi,p)\to K(\pi,p)$.

PROPRIÉTÉ C. — *Il existe un isomorphisme simplicial $\Psi:E(\tau)\to E(\pi,p)$ qui rend commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} E(\tau) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "p"'] & & E(\pi,p) \arrow[dl, "d^p"] \\ & K(\pi,p) & \end{tikzcd}$$

Démonstration. — On définit d'abord une application $r_n : K(\pi,p)_n \to E(\pi,p)_n$, autrement dit $r_n : Z^p(\Delta_n,\pi) \to C^{p-1}(\Delta_n,\pi)$.

A chaque $\mu \in \Delta(\underline{p-1},\underline{n})$, on associe $\overline{\mu} \in \Delta(\underline{p},\underline{n})$ comme suit :

$$\overline{\mu}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0; \\ \mu(i-1) & \text{si } i = 1,\dots,p\ . \end{cases}$$

Puis, si $\varphi \in Z^p(\Delta_n,\pi)$, définissons $\big[r_n(\varphi)\big](\mu) = \varphi(\overline{\mu})$. Ces applications r_n vérifient les relations suivantes :

i) $\partial_i r_{n+1} = r_n \partial_i$ si $i > 0$;

ii) $s_i r_n = r_{n+1} s_i$ si $i \geqslant 0$;

iii) $\partial_0 r_{n+1}(\varphi) = \tau(\varphi) + r_n(\partial_0\varphi)$ si $\varphi \in K(\pi,p)_{n+1}$.

Vérifions par exemple la *relation* iii). On observe que, si $\mu \in \Delta(\underline{p},\underline{n})$, on a $\overline{\delta_0 \circ \mu)} = \mu_1$ et $\delta_0 \circ \overline{\mu} = \mu_2$ avec les mêmes notations que dans la démonstration antérieure. Donc

$$\begin{aligned} \big[\partial_0 r_{n+1}(\varphi)\big](\mu) - r_n(\partial_0\varphi)(\mu) &= r_{n+1}(\varphi)(\delta_0 \circ \mu) - \partial_0\varphi(\overline{\mu}) \\ &= \varphi(\overline{\delta_0 \circ \mu}) - \varphi(\delta_0 \circ \overline{\mu}) \\ &= \varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2) = \tau(\varphi)(\mu)\ . \end{aligned}$$

Considérons alors les isomorphismes de groupes

$$\begin{aligned} \Psi_n : Z^{p-1}(\Delta_n,\pi) \times Z^p(\Delta_n,\pi) &\to C^{p-1}(\Delta_n,\pi) \\ (\xi,\varphi) &\mapsto \xi + r_n(\varphi)\ . \end{aligned}$$

En utilisant les égalités i), ii) et iii), il est facile de voir que les Ψ_n définissent un morphisme simplicial

$$\Psi : E(\tau) \to E(\pi,p)\ .$$

Pour terminer la démonstration, il reste à voir que le diagramme de l'énoncé est commutatif, ce qui revient à voir, compte tenu de la définition de Ψ que $d^p_n \circ r_n$ est l'identité de $K(\pi,p)_n$. On utilise les relations suivantes :

$Q1)$ $\qquad \overline{\alpha \circ \delta_i} = \overline{\alpha} \circ \delta_{i+1}$;

$Q2)$ $\qquad \overline{\alpha} \circ \delta_0 = \alpha$.

Soit donc $\varphi \in K(\pi,p)_n$ et $\alpha \in \Delta(\underline{p},\underline{n})$:

$$\begin{aligned}
\left[d_n^p r_n(\varphi)\right](\alpha) &= \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i r_n(\varphi)(\alpha \circ \delta_i) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i \varphi(\overline{\alpha \circ \delta_i}) \\
&\underset{Q_1}{=} \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i \varphi(\overline{\alpha} \circ \delta_{i+1}) \\
&\underset{Q_2}{=} \varphi(\alpha) - \varphi(\overline{\alpha}\delta_0) + \sum_{i=0}^{p-1}(-1)^i \varphi(\overline{\alpha} \circ \delta_{i+1}) \\
&= \varphi(\alpha) - \sum_{j=0}^{p}(-1)^j \varphi(\overline{\alpha} \circ \delta_j) = \varphi(\alpha) - \left[d_n^{p+1}(\varphi)\right](\alpha) \\
&= \varphi(\alpha)
\end{aligned}$$

puisque $\varphi \in K(\pi,p)_n = \ker d_n^{p+1}$. ∎

CONVENTION. — En accord avec la propriété précédente, on considèrera $d^p : E(\pi,p) \to K(\pi,p)$ comme le fibré simplicial défini par τ .

CONVENTION IMPORTANTE. — On travaillera dorénavant avec les ensembles simpliciaux $\overline{K}(\pi,p)$ et $\overline{E}(\pi,p)$ au lieu de $K(\pi,p)$ et $E(\pi,p)$. On peut démontrer les mêmes propriétés pour $\overline{K}(\pi,p)$ et $\overline{E}(\pi,p)$ que celles qu'on vient de montrer pour $K(\pi,p)$ et $E(\pi,p)$: le morphisme simplicial $\overline{d}^p : \overline{E}(\pi,p) \to \overline{K}(\pi,p)$ est un fibré simplicial de fibre $\overline{K}(\pi,p-1)$. Désormais, pour faciliter la notations on notera ces ensembles simpliciaux sans barre. Autrement dit, à partir de maintenant, $E(\pi,p)$ note $\overline{E}(\pi,p)$, *etc.*

7.22. DÉFINITION. — *On dit qu'un ensemble simplicial K est de Kan si pour toute famille de $n+1$ simplexes de dimension n, $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$ vérifiant $\partial_i x_j = \partial_{j-1} x_i$ si $i < j$, $i \neq k \neq j$, il existe un $(n+1)$-simplexe x tel que $\partial_i x = x_i$ pour $i \neq k$.*

7.23. THÉORÈME. — *Tout groupe simplicial est de Kan.*

Démonstration. — Considérons le cas particulier où $n = 1$ et $k = 1$; soit donc x_0 et x_2 tels que $\partial_0 x_2 = \partial_1 x_0$; alors une solution x est $x = \eta_0 x_0 \cdot \eta_0\eta_0\partial_0 x_2^{-1} \cdot \eta_1 x_2$ comme il est très facile de le vérifier; cette idée se généralise, voir le théorème 17.1 de [M] .

7.24. DÉFINITION. — *Un ensemble simplicial K est minimal s'il est de Kan et si $\partial_i x = \partial_i y$ pour $i \neq k$ implique $\partial_k x = \partial_k y$.*

7.25. PROPOSITION. — *$K(\pi,p)$ est un ensemble simplicial minimal.*

Démonstration. — La condition de minimalité s'interprète dans ce cas particulier comme suit : si un p-cocycle φ est déjà défini sur n faces de Δ^n , il n'existe qu'une seule façon de le prolonger à la dernière. Trois cas sont à envisager :

a) $n \leqslant p$; alors φ est nécessairement nul, compte tenu de la condition de "non dégéneresence" (*cf.* la "convention importante" plus haut).

b) $n = p + 1$; la condition de cocycle impose de définir φ sur la dernière face comme l'opposé de la somme des valeurs de φ sur les autres faces.

c) $n > p + 1$; vu les dimensions, le p-cocycle sur la dernière face est défini par restriction de la restriction du cocycle aux autres faces.

D'où le résultat. ∎

Par contre, sauf cas trivial, $E(\pi,p)$ n'est pas minimal.

7.26. DÉFINITION. — *On dit qu'une application continue $p : E \to B$ entre espaces topologiques vérifie la propriété de relèvement des homotopies pour un espace topologique X si étant donné $f : X \to E$, $G : X \times I \to B$ continues telles que $G(x,0) = pf(x)$, il existe $F : X \times I \to E$, continue, telle que $F(x,0) = f(x)$ et $pF = G$. Ces propriétés se résument dans le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "g"] \arrow[ur, dashed, "\exists F"] & B \end{tikzcd}$$

où i_0 est l'application $x \mapsto (x,0)$.

L'application $p : E \to B$ est une fibration si elle vérifie la propriété de relèvement des homotopies pour tout espace topologique; c'est une fibration de Serre si elle vérifie la propriété pour les cubes $I^r, r \geqslant 0$.

7.27. THÉORÈME. — *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ un fibré simplicial. Si F est un ensemble simplicial minimal, alors $|p| : |E| \to |B|$ est une fibration de Serre.*

Démonstration. — Appliquer le théorème 18.4 (ii) et la remarque 16.5 de [M].

7.28. COROLLAIRE. — *Le fibré simplicial $K(\pi,p-1) \hookrightarrow E(\pi,p) \xrightarrow{d^p} K(\pi,p)$ induit par réalisation un fibré de Serre.*

7.29. PROPOSITION. — *Soit un fibré simplicial (B,F,G,τ) et un morphisme simplicial $f : X \to B$; alors on peut construire un nouveau fibré simplicial $(X,F,G,\tau \circ f)$, qu'on appelle le fibré simplicial induit par f à partir de τ .*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que les $\tau \circ f_n : X_n \to G_{n-1}$ définissent un opérateur de torsion $\tau \circ f$.

NOTATION. — Si on a un fibré simplicial $p : E \to B$ et un morphisme simplicial $f : X \to B$, alors on note $f^*p : f^*E \to X$ le fibré induit par f à partir de p.

7.30. PROPOSITION. — *L'application canonique*

$$f_{*n} : f^*E_n = F_n \times X_n \to F_n \times B_n = E_n$$
$$(y, x) \mapsto (y, f_n x)$$

définit un morphisme simplicial $f_* : g^*E \to E$; *le diagramme* :

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f_*} & E \\ {\scriptstyle f^*p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — C'est une simple vérification.

8. Comment tuer des groupes d'homotopie

Observons en premier lieu que $E(\pi, p+1)_p = C^p(\Delta_p; \pi) = \mathrm{Hom}(C_p(\Delta_p), \pi) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Z}, \pi) \underset{u}{\xrightarrow{\cong}} \pi$, puisque $C_p(\Delta^p)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par $\Delta^{\mathrm{inj}}(\underline{p}, \underline{p}) = \{1_p\}$ où $1_p : \underline{p} \to \underline{p}$ est l'application identique. On va interpréter maintenant l'isomorphisme u comme une p-cochaîne de $E(\pi, p+1)$.

8.1. DÉFINITION. — *Définissons* $u \in C^p\big(E(\pi, p+1); \pi\big)$ *à l'aide de l'image du générateur de* $C_p\big(E(\pi, p+1)\big)$; *autrement dit :*

$$u : E(\pi, p+1)_p \to \pi$$
$$f \mapsto f(1_p) .$$

On dit que u *est la cochaîne fondamentale de* $E(\pi, p+1)$.

8.2. LEMME. — *Soit* X *un ensemble simplicial et* $x \in X_n$; *il existe un unique morphisme simplicial* $m_x : \Delta_n \to X$ *tel que* $m_x(1_n) = x$.

Démonstration. — Si $\mu \in (\Delta_n)_q = \Delta(\underline{q}, \underline{n})$, il suffit de prendre $m_x(\mu) = \mu^*(x)$. ∎

8.3. NOTATIONS. —

a) Si X, Y sont des ensembles simpliciaux, on appelle $\mathrm{Hom}(X, Y) = \{f$ tel que $f : X \to Y$ est un morphisme simplicial$\}$.

b) Soit $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$; on note $f^* : C^p(Y; \pi) \to C^p(X; \pi)$ l'application induite par f : si $\varphi \in C^p(Y; \pi)$ et $x \in X_p$, alors $[f^*\varphi](x) = \varphi[fx]$.

8.4. PROPOSITION. — *Si X est un ensemble simplicial, il existe des bijections réciproques naturelles :*

$$\Phi : \mathrm{Hom}\big(X, E(\pi, p+1)\big) \to C^p(X; \pi)$$

$$\Psi : C^p(X; \pi) \to \mathrm{Hom}\big(X, E(\pi, p+1)\big) .$$

Démonstration. — Soit $\varphi : X \to E(\pi, p+1)$ un morphisme simplicial; considérons $\varphi^* : C^p\big(E(\pi, p+1), \pi\big) \to C^p(X; \pi)$ et définissons $\Phi(\varphi) = \varphi^*(u)$ où u est la cochaîne fondamentale de $E(\pi, p+1)$.

Par ailleurs, si on a $h \in C^p(X; \pi)$ on peut définir un morphisme simplicial $\Psi(h) : X \to E(\pi, p+1)$ comme suit: si $x \in X_n$, alors

$$\Psi(h)(x) = (m_x)^*(h)$$

où m_x est le morphisme associé à x par le lemme 8.2 et où $(m_x)^* : C^p(X; \pi) \to C^p(\Delta^n; \pi) = E(\pi, p+1)_n$. ■

NOTATIONS. — Soit $I = \Delta_1$; on notera simplement 0 l'application $0 \mapsto 0$ de $(\Delta_1)_0 = \Delta(\underline{0}, \underline{1})$ ainsi que ses dégénérescences. De même, on note 1 l'application $0 \mapsto 1$.

8.5. DÉFINITION. — *Soient $f, g : X \to Y$ des morphismes simpliciaux. On dira que f est homotope à g (et on écrira $f \sim g$) s'il existe un morphisme simplicial $F : X \times I \to Y$ tel que $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$.*

8.6. THÉORÈME. — *Soit Y un ensemble simplicial de Kan; alors la relation d'homotopie dans* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *est une relation d'équivalence ; on note* $[X, Y]$ *l'ensemble quotient.*

Démonstration. — C'est la proposition 1.16 de [C].

8.7. PROPOSITION. — *Soit Y un groupe simplicial; alors* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *et* $[X, Y]$ *sont munis naturellement d'une structure de groupe.*

Démonstration. — C'est une simple vérification.

8.8. THÉORÈME. — *Les applications* $\Phi : \mathrm{Hom}\big(X, E(\pi, p+1)\big) \to C^p(X, \pi)$ *et* $\Psi : C^p(X; \pi) \to \mathrm{Hom}\big(X, E(\pi, p+1)\big)$ *de la proposition 8.4 sont des isomorphismes de groupes. De plus, ils induisent des isomorphismes, qu'on notera aussi Φ et Ψ , entre $H^p(X; \pi)$ et $[X, K(\pi, p)]$.*

Démonstration. — Voir les lemmes 24.1, 24.2, 24.3 et le théorème 24.4 de [M]. ■

Considérons maintenant le fibré simplicial de l'exemple 7.21 : $K(\pi, p-1) \hookrightarrow E(\pi, p) \to K(\pi, p)$. A chaque $h \in H^p(X;\pi)$, on peut associer un fibré simplicial de base X et de fibre $K(\pi, p-1)$, simplement en considérant le fibré simplicial induit du précédent par *un* représentant de $\Psi(h) \in [X, K(\pi, p)]$ (voir la proposition 7.29). On va démontrer maintenant un ensemble de lemmes destinés à faciliter la démonstration d'un théorème sur les fibrés simpliciaux du type indiqué.

8.9. LEMME. — *Soit $p : E \to B$ une fibration de Serre et $f : X \to B$ une application continue. Alors $f^*p : f^*E \to X$ est une fibration de Serre.*

Démonstration. — Analogue à celle du cas classique des fibrations; pour ce dernier cas, voir le théorème 7.21, page 37, de [W].

NOTATION. — On dira que $f^*p : f^*E \to X$ est la *fibration de Serre induite par f à partir de p .*

8.10. LEMME. — *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ un fibré simplicial, et $\varphi : X \to B$ un morphisme simplicial. Considérons le fibré simplicial $\varphi^*p : \varphi^*E \to X$ induit par φ à partir de p et le fibré de Serre $|\varphi|^*|p| : |\varphi|^*|E| \to |X|$ induit par $|\varphi|$ à partir de $|p|$ (voir le théorème 7.27). Alors il existe un homéomorphisme $|\varphi^*E| \to |\varphi|^*|E|$ tel que le diagramme ci-dessous soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} |\varphi^*E| & \rightarrow & |\varphi|^*|E| \\ {\scriptstyle |\varphi^*p|} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle |\varphi|^*|p|} \\ & |X| & \end{array}$$

Démonstration. —

$$|\varphi|^*|E| = \{(x,y) \in |X| \times |E| \text{ tels que } |\varphi|(x) = |p|(y)\} ;$$

$$|\varphi^*E| = \coprod_{n \geqslant 0} F_n \times X_n \times \Delta^n / \sim ;$$

$$|E| = \coprod_{n \geqslant 0} F_n \times B_n \times \Delta^n / \sim$$

(voir la définition de la réalisation en 6.7).

L'application :

$$\coprod_{n \geqslant 0} F_n \times X_n \times \Delta_n \to |\varphi|^*|E|$$

$$(y, x, t) \mapsto (|x, t|, |y, \varphi(x), t|)$$

est bien définie, passe au quotient et définit l'homéomorphisme cherché. ∎

8.11. LEMME. — *Soit $f_i : X_i \to Y$ des fibrations de Serre pour $i = 1,2$; soit $g : Z \to Y$ une application continue et $h : X_1 \to X_2$ un homéomorphisme rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{h} & X_2 \\ {\scriptstyle f_1} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle f_2} \\ & Y & \end{array} .$$

Alors l'application

$$g^*h : g^*X_1 \to g^*X_2$$
$$(z, x_1) \mapsto (z, hx_1)$$

est un homéomorphisme rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} g^*X_1 \arrow[rr, "g^*h"] \arrow[dr, "g^*f_1"'] & & g^*X_2 \arrow[dl, "g^*f_2"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Démonstration. — C'est une simple vérification. On remarque qu'il n'est pas nécessaire que les f_i soient des fibrations : c'est une propriété des pull-backs. ■

8.12. LEMME. — *Soit $p : E \to B$ une fibration de Serre, $f : X \to B$ une application continue et $f^*p : f^*E \to X$ le fibré induit par f à partir de p . Soit $g : Y \to X$ une autre application continue et $g^*(f^*p) : g^*(f^*E) \to Y$ le fibré induit par g à partir de f^*p . Soit enfin $(fg)^*p : (fg)^*E \to Y$ le fibré induit par fg à partir de p . Alors il existe un homéomorphisme canonique $(fg)^*E \to g^*(f^*E)$ rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} (fg)^*E \arrow[rr] \arrow[dr, "(fg)^*p"'] & & g^*(f^*E) \arrow[dl, "g^*(f^*p)"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Se déduit de la propriété correspondante pour les pull-backs.

8.13. LEMME. — *Soit $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} K$ un fibré simplicial. Soit $\varphi : X \to K$ un morphisme simplicial et $\varphi^*p : \varphi^*E \to X$ le fibré simplicial induit par φ à partir de p . Soit $g : Z \to |X|$ une application continue, et $g^*|\varphi^*p| : g^*|\varphi^*E| \to Z$ la fibration de Serre induite par g à partir de $|\varphi^*p|$; soit enfin $(|\varphi| \circ g)^*|p| : (|\varphi| \circ g)^*|E| \to Z$ la fibration induite par $|\varphi| \circ g$ à partir de $|p|$. Alors il existe un homéomorphisme $(|\varphi| \circ g)^*|E| \to g^*|\varphi^*E|$ rendant commutatif le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} (|\varphi| \circ g)^*|E| \arrow[rr] \arrow[dr, "(|\varphi| \circ g)^*|p|"'] & & g^*|\varphi^*E| \arrow[dl, "g^*|\varphi^*p|"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Par application successive des lemmes précédents, 8.10, 8.11 et 8.12.

8.14. LEMME. — *Si $p : E \to B$ est une fibration de Serre et (X, A) une paire de CW-complexes, alors pour tout diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ A \times I \arrow[r, hook] \arrow[urr, bend left, "G"] & X \times I \arrow[r, "F"'] & B \, . \end{tikzcd}$$

il existe $\widetilde{F} : X \times I \to E$ continue, laissant le diagramme commutatif. On dit que $\widetilde{F}$ relève F et étend G .

Démonstration. — C'est le théorème 4.1.3.6, page 261, de [R-F].

Remarque. — On note que d'après le lemme précédent, une application $p : E \to B$ est une fibration de Serre si et seulement si elle vérifie la propriété de relèvement des homotopies pour tout CW-complexe.

8.15. LEMME. — *Soit $p : X \to B$ une fibration de Serre et soient $f, g : X \to B$ des applications continues homotopiques. Alors,il existe un isomorphisme T_r entre les groupes d'homotopie de degré r de $f^*(p)$ et $g^*(p)$.*

Démonstration. — Soit $H : X \times I \to B$ continue telle que $H_0 = f$, $H_1 = g$. Soit $\alpha : (I^r, FrI^r) \to \big(f^*(E), (x_0, e_0)\big)$ un représentant d'un élément de $\pi_r\big(f^*(E), (x_0, e_0)\big)$ (r-ième groupe d'homotopie).

Puisque p est une fibration de Serre, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & e_0 \in E \\ {\scriptstyle i_0}\big\downarrow & \exists\, \overline{s} \nearrow & \big\downarrow {\scriptstyle p} \\ I & \xrightarrow{s} & B \\ t & \longmapsto & H(x_0, t) \end{array}$$

et on peut définir une homotopie

$$\begin{aligned} G : FrI^r \times I &\longrightarrow E \\ (y, t) &\longmapsto \overline{s}(t) \ . \end{aligned}$$

Soient $\overline{f} : f^*(p) \to E$, $\overline{p} : f^*(p) \to X$ les applications canoniques du pull-back. Alors on a un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} I^r & \xrightarrow{\overline{f}\circ\alpha} & E \\ {\scriptstyle i_0}\big\downarrow & \circlearrowleft & \big\downarrow {\scriptstyle p} \\ I^r \times I & \xrightarrow{J} & B \\ (y, t) & \longmapsto & H\big(\overline{p}\alpha(y), t\big) \ . \end{array}$$

En plus, $pG(y, t) = J(y, t)$, $\forall y \in F_r I, t \in I$. Donc on a les conditions du lemme 8.14 et il existe $\widetilde{J} : I^r \times I \to E$ relevant J et étendant G . Alors, si $e_1 = \overline{s}(1)$, on définit :

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha} : (I^r, F_r I^r) &\longrightarrow \big(g^*(E), (x_0, e_1)\big) \\ y &\longmapsto \big(\overline{p}\alpha(y), \widetilde{J}(y, 1)\big) \ . \end{aligned}$$

On vérifie que $\widetilde{\alpha}$ est bien définie et que la classe d'homotopie de $\widetilde{\alpha}$ ne dépend pas du choix fait de $\overline{s}$ et $\widetilde{J}$. En plus, $\alpha \simeq \beta$ entraîne $\widetilde{\alpha} \simeq \widetilde{\beta}$. Donc :

$$\begin{aligned} T_r : \pi_r\big(f^*(E), (x_0, e_0)\big) &\longrightarrow \pi_r\big(g^*(E), (x_0, e_1)\big) \\ [\alpha] &\longmapsto [\widetilde{\alpha}] \end{aligned}$$

est l'isomorphisme cherché. ■

8.16. DÉFINITIONS. — *Une application continue $\varphi : X \to Y$ entre des espaces topologiques est une équivalence d'homotopie faible si $f_* : \pi_r(X) \to \pi_r(Y)$ est* *un isomorphisme pour tout r . Une approximation cellulaire d'un espace topologique X est un couple (K,φ) , où K est un CW-complexe et $\varphi : K \to X$ est une équivalence d'homotopie faible. On dira que deux espaces topologiques X,Y ont le même type d'homotopie faible si X,Y admettent des approximations à partir du même CW-complexe.*

8.17. REMARQUES. —

a) Tout espace topologique a une approximation cellulaire (voir le théorème 5.4.3.2, page 454, [R-F]).

b) Si entre deux espaces il existe une équivalence d'homotopie faible, ils ont le même type d'homotopie faible.

c) Si deux espaces ont le même type d'homotopie, il existe entre eux une équivalence d'homotopie qui est notamment une équivalence d'homotopie faible et donc tous les deux ont le même type d'homotopie faible.

d) Deux espaces qui ont le même type d'homotopie faible ont évidemment leurs groupes d'homotopie isomorphes. La relation "avoir le même type d'homotopie faible" est une relation d'équivalence.

8.18 LEMME. — *Soit $p : X \to B$ une fibration de Serre et soient $f,g : X \to B$ des applications homotopes. Alors $f^*(p)$ et $g^*(p)$ ont le même type d'homotopie faible.*

Démonstration. — On emploie les notations de la démonstration du dernier lemme et soit (K,φ) une approximation cellulaire de $f^*(p)$. On suppose φ définie entre espaces basés, c'est-à-dire , $\varphi : (K,k_0) \to \big(f^*(p),(x_0,e_0)\big)$.

Soit $\overline{G} : \{k_0\} \times I \to E$ et on considère le diagramme :
$$(k_0,t) \mapsto \overline{s}(t)$$

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\overline{f}\circ\varphi} & E \\ i_0\big\downarrow & \circlearrowleft & \big\downarrow p \\ K\times I & \xrightarrow{F} & B \\ (k,t) & \longmapsto & H\big(\overline{p}\varphi(k),t\big) \end{array} .$$

On a $p\overline{G}(k_0,t) = F(k_0,t)$, $\forall t \in I$ et K est un CW-complexe, donc le lemme 8.14 entraîne qu'il existe une application continue $\widetilde{F} : K \times I \to E$ relevant F et étendant $\overline{G}$. On définit :

$$\psi : K \longrightarrow g^*(p)$$
$$k \longmapsto \big(\overline{p}\varphi(k),\widetilde{F}(k,1)\big)$$

qui est bien définie et bien basée : $\psi(k_0) = (x_0,e_1)$.

Maintenant soit $\beta : (I^r,F_rI^r) \to (K,k_0)$ un représentant d'un élément de $\pi_r(K,k_0)$. Si on refait pour l'application $\varphi \circ \beta$ ce qu'on a fait dans la démonstration de 8.17 pour α , il est facile d'en déduire qu'on peut prendre, dans ce cas, pour J

l'application $F \circ (\beta \times 1)$ et pour $\widetilde{J}$ l'application $\widetilde{F} \circ (\beta \times 1)$. Alors on a une suite d'égalités :

$$\widetilde{\varphi \circ \beta}(y) = \big(\overline{p}\varphi\beta(y), \widetilde{F}(\beta(y), 1)\big) = \psi \circ \beta(y) \; .$$

Cela induit entre les groupes d'homotopie un diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \pi_r(K, k_0) \arrow[dl, "\varphi_*"'] \arrow[dr, "\psi_*"] & \\ \pi_r\big(f^*(p), (x_0, e_0)\big) \arrow[rr, "T_r"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \pi_r\big(g^*(p), (x_0, e_1)\big) \; . \end{tikzcd}$$

On sait que T_r et φ_* sont des isomorphismes, d'où ψ_* est aussi un isomorphisme; donc $\psi : K \to g^*(p)$ est une équivalence d'homotopie faible et $f^*(p)$ et $g^*(p)$ ont le même type d'homotopie faible. ■

8.19. LEMME. — *Soit $p : E \to B$ une fibration de Serre et soit $f : X \to B$ une équivalence d'homotopie faible. Alors $\overline{f} : f^*(p) \to E$ est une équivalence d'homotopie faible.*

Démonstration. — On considère les applications entre espaces basés :

$$\begin{tikzcd} \big(f^*(p), (x_0, e_0)\big) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{p}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (X, x_0) \arrow[r, "f"'] & (E, f(x_0)) \; . \end{tikzcd}$$

Il existe un homéomorphisme canonique :

$$\begin{aligned} h : \overline{p}^{-1}(x_0) = \{(x_0, e_0) \; ; \; f(x_0) = p(e)\} &\longrightarrow \{e \in E \; ; \; f(x_0) = p(e)\} = p^{-1}[f(x_0)] \\ (x_0, e) &\longmapsto e \end{aligned}$$

tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \big(\overline{p}^{-1}(x_0), (x_0, e_0)\big) \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & \big(p^{-1}f(x_0), e_0\big) \arrow[d, hook] \\ \big(f^*(p), (x_0, e_0)\big) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{p}"'] & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (X, x_0) \arrow[r, "f"'] & \big(B, p(e_0)\big) \; . \end{tikzcd}$$

Puisque $p, \overline{p}$ sont des fibrations de Serre, on a deux suites exactes d'homotopie (voir, par exemple 5.1.8.4, page 390, [R-F]) :

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow \\
\pi_{r+1}(X, x_0) & \xrightarrow{f_* \cong} & \pi_{r+1}\big(B, p(e_0)\big) \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
\pi_r\big(p^{-1}(x_0), (x_0, e_0)\big) & \xrightarrow{h_* \cong} & \pi_r\big(p^{-1}f(x_0), e_0\big) \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
\pi_r\big(f^*(p), (x_0, e_0)\big) & \xrightarrow{\overline{f}_*} & \pi_r(E, e_0) \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
\pi_r(X, x_0) & \xrightarrow{f_* \cong} & \pi_r\big(B, p(e_0)\big) \\
\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
\pi_{r-1}\big(\overline{p}^{-1}(x_0), (x_0, e_0)\big) & \xrightarrow{h_* \cong} & \pi_{r-1}\big(p^{-1}f(x_0), e_0\big) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

et par le lemme de cinq (voir, par exemple, le lemme I.3.3 de [ML]) on obtient que $\overline{f}_*$ est un isomorphisme. ∎

8.20. LEMME. — *Soit $\varphi : X \to B$ une application continue. Alors il existe un espace topologique Y et des applications $f : Y \to B$, $f : Y \to X$ tels que :*

a) f est une fibration.

b) g est une équivalence d'homotopie.

c) $\varphi \circ g$ est homotopique à f .

Démonstration. — Voir le théorème I.7.30 de [W]. Les constructions de Y, f, g seront utilisées dans ce qui suit. On note $F(B)$ l'espace topologique $\{u : I \to B$ continues $\}$ avec la topologie compacte-ouverte. Alors Y est défini par $\{(x, u) \in X \times F(B) \; ; \; \varphi(x) = u(0)\}$, $f : Y \to B$, $g : Y \to X$ sont définies respectivement par $f(x, u) = u(1)$, $g(x, u) = x$. ∎

8.21. THÉORÈME. — *Soit $p : E \to B$ un fibré simplicial avec une fibre minimale et soit $|E|$ contractile. Soit $\varphi : X \to B$ un morphisme simplicial et on considère le fibré simplicial $p' : \varphi^*(p) \to X$ induit par φ à partir de p. Soient Y, f, g les associés par le lemme 8.20 à l'application continue $|\varphi| : |X| \to |B|$. Alors, la fibre F de la fibration $f : Y \to |B|$ et $|\varphi^*(p)|$ ont le même type d'homotopie faible.*

Démonstration. — D'abord, en appliquant le lemme 8.13, on obtient que $(|\varphi| \circ g)^*(|p|)$ et $g^*(|p'|)$ sont homéomorphes.

Maintenant on a $|\varphi| \circ g \simeq f$ (lemme 8.19, c)), d'où il résulte que $(|\varphi| \circ g)^*(|p|)$ et $f^*(|p|)$ ont le même type d'homotopie faible (lemme 8.18).

Puisque g est une équivalence d'homotopie, c'est en particulier une équivalence d'homotopie faible et, en appliquant le lemme 8.19, on obtient que $g^*(|p'|)$ et $|\varphi^*(p)|$ ont le même type d'homotopie faible.

Ainsi $f^*(|p|)$ et $|\varphi^*(p)|$ ont le même type d'homotopie faible.

On va démontrer que la fibre F de $f : Y \to |B|$ et $f^*(|p|)$ ont le même type d'homotopie. Ceci terminera la démonstration.

L'espace $|E|$ est contractile et est un CW-complexe (voir la remarque 6.9). Soit $e \in |E|$ un sommet, $i : \{e\} \hookrightarrow |E|$ l'inclusion canonique et $q : |E| \to \{e\}$ la projection canonique. Puisque $|E|$ est contractile, il existe $H : |E| \times I \to |E|$ vérifiant $H_0 = 1$ et $H_1 = i \circ q$. On sait que, puisque $|E|$ est un CW-complexe et e un sommet, on peut choisir H de façon que $H(e,t) = e$, $\forall t \in I$.

Maintenant, étant donné $y \in |E|$ on définit de façon canonique un chemin γ_y joignant y à e par : $\gamma_y(t) = H(y,t)$. Remarquer que γ_e est le chemin constant en e .

Soit $b = |p|(e) \in |B|$. Par la construction de Y et f dans le lemme 8.20, on a :

$$F = f^{-1}(b) = \Big\{(x,u) \in |X| \times F(|B|) \ ; \ |\varphi|(x) = u(0), |p|(e) = u(1)\Big\}$$

et

$$f^*(|p|) = \Big\{(x,u,y) \in |X| \times F(|B|) \times |E| \ ; \ |\varphi|(x) = u(0), |p|(y) = u(1)\Big\} .$$

On définit ensuite deux applications :

$$\begin{array}{rlcl} h: & F & \longrightarrow & f^*(|p|) \\ & (x,u) & \longmapsto & (x,u,e) \\ \overline{h}: & f^*(|p|) & \longrightarrow & F \\ & (x,u,y) & \longmapsto & \big(x,(|p|)\gamma_y) * u\big) . \end{array}$$

Puisque γ_e est un chemin constant, il est évident que $\overline{h} \circ h = 1$. Il suffit donc de démontrer que $h \circ \overline{h} \simeq 1$.

Etant donné $t \in I, y \in |E|$, on définit

$$\begin{array}{rl} \gamma_{y,t} : I \longrightarrow & |E| \\ \overline{t} \longmapsto & H(y, t \cdot \overline{t}) . \end{array}$$

Remarquer que $\gamma_{y,t} \in F(|E|)$, $\forall t \in I$, que $\gamma_{t,0}$ est le chemin constant en e et que $\gamma_{y,1} = \gamma_y$. Alors l'homotopie cherchée entre 1 et $h \circ \overline{h}$ n'est autre que :

$$\begin{array}{c} f^*(|p|) \times I \longrightarrow f^*(|p|) \\ (x,u,y,t) \longmapsto \big(x,(|p|) \circ \gamma_{y,t}) * u, H(y,t)\big) . \blacksquare \end{array}$$

A partir d'ici et jusqu'à la fin du paragraphe, on reprend les idées qui précédaient le lemme 8.9 et on développe une méthode pour "tuer" des groupes d'homotopie, due à J.P. Serre. En plus du théorème 8.21, on utilisera :

a) 8.22. THÉORÈME. Coefficients universels en cohomologie. — *Il existe, pour tout n, une suite exacte courte :*

$$0 \to \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}(X);\pi\big) \to H^n(X;\pi) \to \mathrm{Hom}\,\big(H_n(X);\pi\big) \to 0 .$$

Démonstration. — C'est le théorème 4.1, page 77 de [ML].

b) Comme remarqué en 6.13 (4), $|E(\pi,p)|$ est contractile et $\pi_r(|K(\pi,p)|)=0$, si $r\neq p$ et $\pi_p(|K(\pi,p)|)=\pi$.

Soit maintenant X un ensemble simplicial simplement connexe et $p = \min\{r; H_r(X)\neq 0\}>1$. Soit $\pi=H_p(X)$.

En appliquant le théorème des coefficients universels pour $n=p$, on obtient un isomorphisme canonique entre Hom $\big(H_p(X);\pi\big)$ et $H^p(X;\pi)$. Puisque $H_p(X)=\pi$, à l'application identique entre π et π, il correspond par cet isomorphisme un élément $[X]\in H^p(X;\pi)$, qu'on appelle la *classe fondamentale de* X.

Maintenant à $[X]$ il correspond (théorème 8.8) un élément $\Psi([X])\in[X,K(\pi,p)]$. Soit $\varphi: X\to K(\pi,p)$ un représentant de cet élément.

On considère le fibré simplicial $K(\pi,p-1)\hookrightarrow E(\pi,p)\to K(\pi,p)$, et le morphisme simplicial $\varphi: X\to K(\pi,p)$. Les conditions du théorème 8.21 sont satisfaites; soient Y,f,g comme dans cet énoncé. Par commodité de notation, on écrira $X'=\varphi^*(p)$.

8.23. Lemme. — *$f_*:\pi_p(Y)\to\pi_p(|K(\pi,p)|)=\pi$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Puisque $|\varphi|\circ g\simeq f$ et que g est une équivalence d'homotopie, on a un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \pi_p(Y) & \xrightarrow{f_*} & \pi_p(|K(\pi,p)|) \\ {\scriptstyle\cong g_*}\searrow & \circlearrowleft & \nearrow{\scriptstyle |\varphi|_*} \\ & \pi_p(|X|) & \end{array}$$

Donc il suffit de démontrer que $|\varphi|_*:\pi_p(|X|)\to\pi_p(|K(\pi,p)|)$ est un isomorphisme. Grâce aux théorèmes de Hurewicz et à 7.7 a), ceci revient à démontrer que $\varphi_*: H_p(X)=\pi\to H_p\big(K(\pi,p)\big)=\pi$ est un isomorphisme. Cela s'obtient sans difficulté car, par la définition de $[X]$ et la construction de φ (voir la démonstration de 8.4), on sait que $\varphi_p: X_p\to K(\pi,p)_p$ est une bijection canonique (l'application φ_* induite en homologie est l'identité). ∎

La suite exacte de Serre pour la fibration $F\hookrightarrow Y\xrightarrow{f}(|K(\pi,p)|)$, donne, si $r\neq p$, $p-1$:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots\to & \pi_{r+1}(|K(\pi,p)|) & \to & \pi_r(F) & \to & \pi_r(Y) & \to \pi_r(|K(\pi,p)|) & \to\cdots \\ & \| & & & & & \| & \\ & 0 & & & & & 0 & \end{array}$$

donc $\pi_r(F)\cong\pi_r(Y)$, pour $r\neq p,p-1$.

Pour les degrés $r=p$, $r=p-1$, on obtient :

$$\begin{array}{l} \cdots\to\pi_{r+1}(|K(\pi,p)|)\to\pi_r(F)\to\pi_r(Y)\underset{\cong}{\xrightarrow{f_*}}\pi_p(|K(\pi,p)|)\to\pi_{p-1}(F)\to\pi_{p-1}(Y)\to 0 \\ \qquad\qquad\| \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Donc $\pi_p(F)=0$ et puisque Y et $|X|$ ont le même type d'homotopie il vient $\pi_{p-1}(Y)\cong\pi_{p-1}(|X|)\cong H_{p-1}(X)=0$ et donc $\pi_{p-1}(F)=0$. On obtient ainsi que $\pi_r(F)\cong\pi_r(|X|)$, si $r\neq p$ et $\pi_p(F)=0$.

Du théorème 8.21 il résulte un isomorphisme entre $\pi_r(|X'|)$ et $\pi_r(|X|)$, si $r \neq p$ et $\pi_p(|X'|) = 0$; on a réussi à *"tuer" le p-groupe d'homotopie* de $|X|$. Par le théorème de Hurewicz $\pi_{p+1}(|X'|) \cong H_{p+1}(X')$, et on a donc réduit le problème du calcul du $(p+1)$-groupe d'homotopie d'un ensemble simplicial au calcul d'un groupe d'homologie d'un autre ensemble simplicial connu.

CONCLUSION. — Il résulte des résultats de ce chapitre et du précédent que le problème du calcul des groupes d'homotopie des ensembles simpliciaux (CW-complexes) simplement connexes et de type fini (c'est-à-dire , avec des groupes d'homologie de type fini) se réduit, si *on suppose connue l'homologie effective de* $K(\pi, p-1)$ et celle de X , à calculer celle de X' à partir du fibré simplicial $K(\pi, p-1) \hookrightarrow X' \to X$. Autrement dit, on a besoin d'une version "homologie effective" de la suite spectrale de Serre. C'est ce qui est fait dans le chapitre suivant.

Références pour le Chapitre 2

[M] MAY J.P. — *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand, 1967.

[C] CURTIS E. — *Simplicial Homotopy Theory*, Lecture Aarhus, n° 10, 1968.

[W] WHITEHEAD G.W. — *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1978.

[R-F] ROHLIN V., FUCHS D. — *Premier cours de Topologie, Chapitres Géométriques*, MIR, 1981.

[ML] MAC LANE S. — *Homology*, Springer-Verlag, 1967.