COURS DE L'INSTITUT FOURIER

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Chapitre 3 Questions d'effectivité

Cours de l'institut Fourier, tome 19 (1984-1985), p. 91-117

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1984-1985__19__91_0>

Chapitre 3

QUESTIONS D'EFFECTIVITE

1. Décomposition primaire

1.1. DÉFINITION. — *Soit A un anneau, I un idéal de A . On dit que I est primaire s'il possède la propriété suivante :*

$$f \in A \ , \ g \in A \ , \ fg \in I \ , \ f \notin I \Rightarrow \exists k \in \mathbf{N} \quad g^k \in I.$$

Nous conviendrons cependant de ne pas considérer (1) comme un idéal primaire.

1.2. REMARQUE. — Si I est un idéal primaire, $\sqrt{I}$ est un idéal premier.

1.3. DÉFINITION. — *Soit A un anneau, I un idéal de $A \neq (1)$. On dit que I est irréductible si $\forall I_1, I_2$ des idéaux de A contenant I, $I_2 \neq I$ et $I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1$.*

1.4. LEMME. — *Si A est un anneau noethérien et si I est un idéal de A irréductible, I est primaire.*

Démonstration. — Supposons que I ne soit pas primaire. Alors, il existe $f \in A$, $g \in A$, $f \notin I$ tel que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $g^k \notin I$ et $fg \in I$. Soit $J_s = \{h \in A, hg^s \in I\}$. $(J_s)_{s \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante d'idéaux de A , donc stationnaire puisque A est noethérien (cf. II.2.11). Il existe donc $r \in \mathbf{N}$, tel que $J_r = \cdots = J_l = \cdots \quad l \geq r$.

On a $I = (I + (g^r)) \cap (I + (f))$. En effet, soit $h \in (I + (g^r)) \cap (I + (f))$, $h = h_1 + h_2 g^r = h'_1 + h'_2 f$ où $h_1, h'_1 \in I$, $h_2, h'_2 \in A$. Puisque $fg \in I$, $hg \in I$ et $h_2 g^{r+1} \in I$, $h_2 \in J_{r+1} = J_r$. Donc $h_2 g^r \in I$ et $h \in I$. Or $I + (g^r) \neq I$ puisque $g^r \notin I$. De même $I + (f) \neq I$ puisque $f \notin I$. C'est impossible, puisque I est irréductible.

1.5. REMARQUE. — Un idéal primaire n'est pas nécessairement irréductible, mais un idéal premier l'est.

1.6. LEMME. — *Soit A un anneau, I_j , $j = 1 \ldots n$, des idéaux primaires de A tels que $\sqrt{I_j} = \mathcal{P}$, $j = 1 \ldots n$. Alors $I = \cap_{j=1 \ldots n} I_j$ est primaire et $\sqrt{I} = \mathcal{P}$.*

Démonstration. — Soit $f, g \in A$, $fg \in I$, $f \notin I$. Alors $fg \in I_j$, $j = 1 \ldots n$, et il existe $j_0 \in 1 \ldots n$ tel $f \notin I_{j_0}$. Puisque I_{j_0} est primaire $g \in \sqrt{I_{j_0}} = \mathcal{P}$. Donc $g \in \sqrt{I_j}$, $j = 1 \ldots n$. Il existe $k_j \in \mathbf{N}$, $g^{k_j} \in I_j$ et si $k = \sup k_j$, $g^k \in \cap I_j = I$. Ceci montre également que $\mathcal{P} \subset \sqrt{I}$. L'inclusion opposée est claire puisque $I \subset I_j$, $j = 1 \ldots n$.

1.7. LEMME. — *Soit A un anneau noethérien et I un idéal de $A \neq (1)$. Il existe $I_1, \ldots, I_s$ des idéaux irréductibles tels que $I = I_1 \cap \ldots \cap I_s$.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un idéal I de A qui ne possède pas une telle décomposition. I est nécessairement réductible. On peut donc écrire $I = I_1 \cap I_2$ où I_j , $j = 1,2$, sont des idéaux de A distincts de I . I_1 et I_2 ne peuvent tous les deux s'exprimer comme intersection finie d'idéaux irréductibles.

Si l'assertion d'existence était fausse pour I ,nous pourrions donc construire $I' \supset I$, $I' \neq I$ un idéal pour lequel l'assertion d'existence serait également fausse. On obtiendrait une suite strictement croissante d'idéaux de A . C'est impossible. (cf. II.2.12).

1.8. COROLLAIRE. — *Soit A un anneau noethérien et I un idéal de $A \neq (1)$. Il existe $Q_1, \ldots, Q_s$ des idéaux primaires tels que $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$. Une telle représentation de I est appelée une **décomposition primaire** de I .*

1.9. DÉFINITION. — $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ *est appelée décomposition primaire irrédondante de I si*

1) $Q_1, \ldots, Q_s$ sont des idéaux primaires.

2) $\forall i = 1 \ldots s$, Q_i ne contient pas $\cap_{j \neq i} Q_j$.

3) $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$, $i \neq j$, $i = 1 \ldots s$, $j = 1 \ldots s$.

1.10. THÉORÈME . — *Soit A un anneau noethérien; tout idéal $I \neq (1)$ de A possède une décomposition primaire irrédondante.*

Démonstration. — Soit $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ une décomposition primaire de I. Soit $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{s'}$, les différents idéaux premiers apparaissant comme racine d'un des Q_i , $i = 1 \ldots s$. Soit $Q'_j = \cap_{i, \sqrt{Q_i} = \mathcal{P}_j} Q_i$. Q'_j est primaire (1.6) et $I = \cap_{j=1 \ldots s'} Q'_j$. Pour obtenir, une décomposition primaire irrédondante, nous supprimons Q'_j si $Q'_j \supset \cap_{h \neq j} Q'_h$ de la décomposition précédente et ainsi de suite, jusqu'à ce que 2) soit satisfaite.

1.11. REMARQUE. — Deux décompositions primaires irrédondantes de I ne sont pas nécessairement identiques à permutation près des Q_i. Néanmoins :

1.12. PROPOSITION. — *Soit A un anneau noethérien et $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s = Q'_1 \cap \ldots \cap Q'_{s'}$, 2 décompositions primaires irrédondantes de $I \neq (1)$. Alors $s = s'$ et il existe τ une permutation de $(1 \ldots s)$ telle que $\sqrt{Q_i} = \sqrt{Q'_{\tau(i)}}$.*

Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant :

1.12.1. LEMME. — *Soit $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_s$ une décomposition primaire irrédondante de $I \neq (1)$ et $\mathcal{P}$ un idéal premier de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\exists i \in 1 \ldots s$, $\mathcal{P} = \sqrt{Q_i}$.

ii) $\exists c \in A$, $(I : c) = \{f, fc \in I\} = \mathcal{P}$.

Démonstration. —

$i) \to ii)$ Soit $\mathcal{P} = \sqrt{Q_i}$; la décomposition étant irrédondante, il existe $c_1 \in \cap_{j\neq i}Q_j$, $c_1 \notin Q_i$. Si $fc_1 \in I$, $fc_1 \in Q_i$ et Q_i étant primaire, $f \in \sqrt{Q_i} = \mathcal{P}$. Donc $(I : c_1) \subset \mathcal{P}$. Si l'inclusion est stricte, il existe $c_2 \in \mathcal{P}$, $c_2 \notin (I : c_1)$. Puisque $c_1 \in \cap_{j\neq i}Q_j$ et $c_1c_2 \notin I$, $c_1c_2 \notin Q_i$. Donc $(I : c_1) \subset (I : c_1c_2) \subset \mathcal{P}$. Soit $E = \{k \in \mathbf{N}$, $c_1c_2^k \in I\}$. Il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $E = \{k \in \mathbf{N}$, $k \geq n\}$; en effet $E \neq \emptyset$,car $c_2 \in \sqrt{Q_i}$ et il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que $c_2^{k_0} \in Q_i$, $c_1c_2^{k_0} \in \cap_i Q_i = I$. $n \geq 2$ car $c_1c_2 \notin I$. Alors $c_2^{n-1} \in (I : c_1c_2)$ et $\notin (I : c_1)$. Si $(I : c_1c_2) \neq \mathcal{P}$, on construirait $c_3 \in \mathcal{P}$ tel que $(I : c_1) \not\subseteq (I : c_1c_2) \not\subseteq (I : c_1c_2c_3)$. Dans un anneau noethérien, toute suite croissante d'idéaux étant stationnaire, il existe donc $c \in A$, $(I : c) = \mathcal{P}$.

$ii) \to i)$ On a $(I{:}c) = \cap_i(Q_i{:}c)$ et $\sqrt{(I : c)} = \cap_i\sqrt{(Q_i : c)}$. Or $(I : c) = \mathcal{P}$, $\sqrt{(I : c)} = \mathcal{P}$, $\sqrt{(Q_i : c)} = \sqrt{Q_i}$ si $c \notin Q_i$, $= A$ si $c \in Q_i$. (En effet $Q_i \subset (Q_i : c)$ et $\sqrt{Q_i} \subset \sqrt{(Q_i : c)}$, d'autre part si $f^k \in (Q_i : c)$, $cf^k \in Q_i$. Si $c \notin Q_i$, $f \in \sqrt{Q_i}$ et $\sqrt{(Q_i : c)} = \sqrt{Q_i}$. Si $c \in Q_i$, $(Q_i : c) = A$ et $\sqrt{(Q_i : c)} = A$). Finalement, si $J = \{i$, $c \notin Q_i\}$, $\mathcal{P} = \cap_{i\in J}\sqrt{Q_i}$. Or $\mathcal{P}$ premier est irréductible, donc $\exists i \in J$ tel que $\mathcal{P} = \sqrt{Q_i}$.

Démonstration de 1.12. — Considérons $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q_i}$, il existe $c_i \in A$ tel que $(I : c_i) = \mathcal{P}_i$ ($(i) \to ii)$ appliqué à $I = \cap Q_i$). D'autre part, $\exists j \in (1 \ldots s')$ tel que $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q'_j} = \mathcal{P}'_j$ ($(ii) \to i)$ appliqué à $I = \cap Q'_i$) . De même pour tout $h \in (1 \ldots s')$, il existe $l \in (1 \ldots s)$ tel que $\mathcal{P}'_h = \mathcal{P}_l$. Les $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}'_j$ étant 2 à 2 distincts, la proposition en résulte.

1.12.2. DÉFINITION. — *Soit A un anneau noethérien , I un idéal de $A \neq (1)$ et $I = \cap_{i=1\ldots s}Q_i$ une décomposition primaire irrédondante de I. $\{\sqrt{Q_i}\}_{i=1\ldots s}$ est l'ensemble des idéaux premiers associés à I . On le note* Ass$I$. *Si $\mathcal{P} \in$ Ass$I$ et si il existe $\mathcal{P}' \in$ Ass$I$ tel que $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ est dit un idéal premier associé **immergé**. Dans le cas contraire, il est dit **isolé** .*

1.12.3. DÉFINITION. — *Si k est un corps et si I est un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n] \neq (1)$, on dit que I est **équidimensionnel** si il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que* $\dim V(\mathcal{P}) = d$ *, pour tout $\mathcal{P} \in$ Ass$I$.*

! Cette notion ne dépend pas que de $V(I)$.

1.13. DÉFINITION. — *Soit A un anneau, I, I' des idéaux de A . $(I : I') = \{f \in A$, $fI' \subset I\}$.*

1.14. PROPOSITION. — *Si A est noethérien et si I est un idéal de $A \neq (1)$, $(I : I') = I$ si et seulement si I' n'est contenu dans aucun des $\mathcal{P} \in$ Ass$I$.*

Démonstration. — Soit $I = \cap_{i=1\ldots s}Q_i$ une décomposition primaire irrédondante et soit $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q_i}$, $i = 1 \ldots s$. Supposons que $\forall i = 1 \ldots s$, $I' \not\subset \mathcal{P}_i$. Soit $f \in (I : I')$, $fI' \subset Q_i$, $i = 1 \ldots s$; Q_i étant primaire, si $f \notin Q_i$, $I' \subset \mathcal{P}_i$. C'est impossible. Donc $f \in \cap_i Q_i = I$.

Si maintenant, il existe $i \in 1 \dots s$, $I' \subset \mathcal{P}_i$, I possédant un nombre fini de générateurs, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $I'^k \subset Q_i$. Or, il existe $f \in \cap_{j \neq i} Q_i$, $f \notin Q_i$. Soit $E = \{s \in \mathbf{N}, fI'^s \subset I\}$. $E \neq \emptyset$ puisque $fI'^k \subset \cap Q_i = I$. Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $E = \{m \in \mathbf{N}\ ,\ m \geq n\}$. D'autre part $n \neq 0$, car $f \neq I$. Soit $g \in fI'^{n-1}$, $g \notin I$, $gI' \subset fI'^n \subset I$ et $g \in (I : I')$. Donc $(I : I') \neq I$.

1.14.1. COROLLAIRE. — *Dans un anneau noethérien A , $\cup_{\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}(0)} \mathcal{P}$ est l'ensemble des diviseurs de zéro de A.*

1.15. PROPOSITION. — *Soit k un corps, I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$, k' une extension de k et I' l'idéal de $k'[X_1, \dots, X_n]$ engendré par I .*
$\mathrm{Ass} I' \supset \cup_{\mathcal{P} \in \mathrm{Ass} I} \mathrm{Ass} \mathcal{P} k'[X_1, \dots, X_n]$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass} I$. D'après 1.12.1, il existe $c \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que la multiplication par c soit une injection de $k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P} \to k[X_1, \dots, X_n]/I$. Soit $\mathcal{P}' = \mathcal{P} k'[X_1, \dots, X_n]$. La mulitplication par c est encore une injection de $k'[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}' \to k'[X_1, \dots, X_n]/I'$. D'autre part, si $\mathcal{P}" \in \mathrm{Ass} \mathcal{P}'$, il existe $d \in k'[X_1, \dots, X_n]$ tel que la multiplication par d soit une injection de $k'[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}" \to k'[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}'$. La multiplication par cd est donc une injection de $k'[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}"$ dans $k'[X_1, \dots, X_n]/I'$ et d'après 1.12.1, $\mathcal{P}" \in \mathrm{Ass} I$.

1.15.1. REMARQUE. — Dans l'énoncé 1.15, on a en fait égalité. Nous l'admettrons et ne l'utiliserons d'ailleurs pas.

2. Equidimensionalité et suites régulières

2.1. THÉORÈME. — *Soit k un corps infini; soit $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$, $1 \leq r \leq n$. Soit $I_j = (f_1, \dots, f_j)$, $1 \leq j \leq r$. Si $\dim V(I_j) = n - j$, $1 \leq j \leq r$, I_r est équidimensionnel. (1.12.3)*

Démonstration. — Soit $I_r = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ une décomposition primaire irrédondante de I_r. Il s'agit de montrer que $\dim V(Q_i) = n - r$, $i = 1 \dots s$. Considérons par exemple Q_1. On a $I_1 \subset \dots \subset I_j \subset \dots \subset I_r \subset Q_1$. En effectuant au besoin un changement de variables linéaire, on peut supposer que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodes pour $I_1, \dots, I_r$ et Q_1 (cf. 1er exercice, Chap. II). Il résulte alors de II.5.3, II.3.2.1 et II.6.5 que :

1) $d = \dim V(Q_1) \leq n - r = \dim V(I_r)$.

2) $k[X_1, \dots, X_n]/I_j$ est un $k[X_{j+1}, \dots, X_n]$-module fini et $k[X_{j+1}, \dots, X_n] \to k[X_1, \dots, X_n]/I_j$ est injective, $j = 1 \dots r$.

3) $k[X_1, \dots, X_n]/Q_1$ est un $k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$-module fini et $k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] \to k[X_1, \dots, X_n]/Q_1$ est injective.

Soit maintenant $R = k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_1, \dots, X_{n-d}]$ et soit $\tilde{Q}_i$, $i = 1 \dots s$, (resp$\tilde{I}_j$, $j = 1 \dots r$) l'idéal engendré par Q_i (respI_j) dans R . Nous allons montrer que :

$\tilde{1}$) $R/\tilde{I}_j$ est un $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}]$-module fini et $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}] \to R/\tilde{I}_j$ est injective, $j = 1 \dots r$.

$\tilde{2}$) $R/\tilde{Q}_1$ est un $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)$-espace vectoriel de rang fini et $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n) \to R/\tilde{Q}_1$ est injectif.

$\tilde{3}$) Soit $J = \{i, 1 \leq i \leq s \ , \ Q_i \cap k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] = 0\}; 1 \in J$, $\tilde{Q}_i$ est primaire si $i \in J$ et $\tilde{I}_r = \cap_{i \in J} \tilde{Q}_i$ est une décomposition primaire irrédondante de $\tilde{I}_r$.

Preuve de $\tilde{1}$). — De 2), il résulte qu'il existe $g_1, \dots, g_u$ dans $k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $\forall f \in k[X_1, \dots, X_n]$, il existe $h_1, \dots, h_u$ dans $k[X_{j+1}, \dots, X_n]$, $r \in I_j$ tels que

$$f = \sum h_i g_i + r.$$

Soit $\tilde{f} \in \tilde{R}$. Il existe $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ et $q \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] \neq 0$ tels que $\tilde{f} = \frac{f}{q}$. Alors $\tilde{f} = \sum \frac{h_i}{q} g_i + \frac{r}{q}$. Or $\frac{h_i}{q} \in k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}]$ et $\frac{r}{q} \in \tilde{I}_j$; $g_1, \dots, g_u$ engendrent $R/\tilde{I}_j$ comme $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}]$-module.

Supposons maintenant que $\tilde{f} \in \tilde{I}_j \cap k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}]$. Alors il existe $f \in I_j$ et $q \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $q \neq 0$, tels que $\tilde{f} = \frac{f}{q}$. D'autre part, il existe $f' \in k[X_{j+1}, \ldots, X_n]$ et $q' \in k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n]$, $q' \neq 0$ tels que $\tilde{f} = \frac{f'}{q'}$. Alors $fq' = f'q$. Or $f'q \in k[X_{j+1}, \ldots, X_n]$, $fq' \in I_j$. Donc $fq' = f'q = 0$ et $f = \tilde{f} = 0$.

Preuve de $\tilde{2}$). — Elle est analogue à celle de $\tilde{1}$).

Preuve de $\tilde{3}$). — $1 \in J$ par définition. Montrons que $\tilde{Q}_i$ est primaire si $i \in J$. Soit $\tilde{f} \in \tilde{R}$, $\tilde{g} \in \tilde{R}$ tels que $\tilde{f}.\tilde{g} \in \tilde{Q}_i$. Alors $\tilde{f} = \frac{f}{q_1}$, $\tilde{g} = \frac{g}{q_2}$ où $f,g \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $q_1, q_2 \in k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n]$, $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$. Comme ci-dessus, il existe $q \in k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n]$, $q \neq 0$ tel que $qfg \in Q_i$. Or Q_i est primaire. Si $\tilde{g} \notin \tilde{Q}_i$, $g \notin Q_i$, donc il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $q^k f^k \in Q_i$. Or $q^k \notin Q_i$, sinon $Q_i \cap k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n] \neq 0$. Il existe donc $k' \in \mathbf{N}$ tel que $f^{k'} \in Q_i$ et $\tilde{f}^{k'} \in \tilde{Q}_i$.

L'inclusion $\tilde{I}_r \subset \cap_{i \in J} \tilde{Q}_i$ est évidente. Réciproquement, soit $\tilde{f} \in \tilde{Q}_i$, $\forall i \in J$. $\tilde{f} = \frac{f}{q}$ où $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $q \neq 0$, $q \in k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n]$. $\forall i \in J$, il existe $q_i \in k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n]$, $q_i \neq 0$ tel que $q_i f \in Q_i$. Alors $f \prod_{i \in J} q_i \in \cap_{i \in J} Q_i$. Mais si $i \notin J$, $Q_i \cap k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n] \neq 0$. Il existe donc $q_i \neq 0$, $q_i \in Q_i \cap k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n]$, $f \prod_{i \in I} q_i \in \cap_{i \in I} Q_i = I_r$ et $\tilde{f} \in \tilde{I}_r$.

Montrons enfin que cette décomposition primaire est irrédondante. Supposons qu'il existe $j_0 \in J$, $\tilde{Q}_{j_0} \supset \cap_{j \in J - j_0} \tilde{Q}_j$. Soit $f \in \cap_{j \in J - j_0} Q_j$. Alors $f \in \tilde{Q}_{j_0}$ et il existe $q \in k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n]$, $q \neq 0$ tel que $qf \in Q_{j_0}$. Or Q_{j_0} est primaire. Si $f \notin Q_{j_0}$, il existerait $k \in \mathbf{N}$ tel que $q^k \in Q_{j_0} \cap k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n] = 0$ ($j_0 \in J$). C'est impossible. Donc $f \in Q_{j_0}$ et $Q_{j_0} \supset \cap_{j \in J - j_0} Q_j$. A fortiori $Q_{j_0} \supset \cap_{j \in I - j_0} Q_j$. C'est encore impossible.

Finalement, montrons que $\sqrt{\tilde{Q}_i} \neq \sqrt{\tilde{Q}_j}$, $i \neq j$, $i,j \in J$. Si $\sqrt{\tilde{Q}_i} \subset \sqrt{\tilde{Q}_j}$, $i \neq j$, $i,j \in J$, montrons que $\sqrt{Q_i} \subset \sqrt{Q_j}$. En effet, soit $f \in \sqrt{Q_i}$; soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $f^k \in Q_i$, $f^k \in \tilde{Q}_i$ et $f \in \sqrt{\tilde{Q}_j}$. Soit $k' \in \mathbf{N}$ et $q \in k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n]$, $q \neq 0$ tel que $qf^{k'} \in Q_j$. Si $f^{k'} \notin Q_j$, il existe $k'' \in \mathbf{N}$ tel que $q^{k''} \in Q_j \cap k[X_{n-d+1}, \ldots, X_n] = 0$. C'est impossible. Donc $f \in \sqrt{Q_j}$ et $\sqrt{Q_i} \subset \sqrt{Q_j}$.

Soit maintenant L une clôture algébrique de $k(X_{n-d+1}, \ldots, X_n)$ et soit $R^* = L[X_1, \ldots, X_{n-d}]$, Q_i^* , $i \in J$, (respI_j^* , $j = 1 \ldots r$) l'idéal engendré par $\tilde{Q}_i$ (resp$\tilde{I}_j$). $I_j^* = (f_1, \ldots, f_j)$ où f_i , $i = 1 \ldots r$, est l'image de f_i par l'inclusion $k[X_1, \ldots, X_n] \to L[X_1, \ldots, X_{n-d}]$. De II.6.5 et II.6.5.2, $\tilde{1}$), $\tilde{2}$), il résulte que (dans $\mathbf{A}_L^{n-d}$)

$$\dim V(I_j^*) = \dim V(\tilde{I}_j) = k(X_{n-d+1}, \ldots, X_n) - \dim V(\tilde{I}_j) = n - d - j$$
$$\dim V(Q_1^*) = \dim V(\tilde{Q}_1) = k(X_{n-d+1}, \ldots, X_n) - \dim V(\tilde{Q}_1) = 0$$

et si $\tilde{\mathcal{P}}_1 = \sqrt{\tilde{Q}_1}$ et $\mathcal{P}_1^* \in \mathrm{Ass} \tilde{\mathcal{P}}_1 L[X_1, \ldots, X_{n-d}]$, $\mathcal{P}_1^* \in \mathrm{Ass} I_r^*$ (1.15). Enfin, puisque $\tilde{\mathcal{P}}_1 L[X_1, \ldots, X_{n-d}] \subset \mathcal{P}_1^*$,

$$0 \leq \dim V(\mathcal{P}_1^*) \leq \dim V(\tilde{\mathcal{P}}_1 L[X_1, \ldots, X_{n-d}]) = \dim V(\tilde{\mathcal{P}}_1) = \dim V(\tilde{Q}_1) = 0.$$

Nous avons donc construit un corps algébriquement clos L , un anneau de polynômes $L[X_1,\dots,X_{n-d}]$, des éléments $f_1,\dots,f_r$ de $L[X_1,\dots,X_{n-d}]$ $(r \leq n-d)$ tels que si $I_j^* = (f_1,\dots,f_j)$, $\dim V(I_j) = n-d-j$ et nous avons montré qu'un idéal premier $\mathcal{P}_1^*$ tel que $\dim V(\mathcal{P}_1^*) = 0$ était associé à I_r^*.

La démonstration va se faire par récurrence sur n.

Si $n = 1$, $r = 1$, $\dim V(I_1) = 0$ et I_1 est équidimensionnel. Nous pouvons donc supposer l'énoncé du théorème vrai pour tout $n' < n$.

Si donc $d > 0$, $n-d < n$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $f_1,\dots,f_r$ dans $L[X_1,\dots,X_{n-d}]$ entraîne donc que I_r^* est équidimensionnel. Donc $n-d-r = 0$ et $d = n-r$. Il nous reste *à écarter le cas* $d = 0$. Supposons qu'il en soit autrement.

Puisque $\dim V(\mathcal{P}_1^*) = 0$, $V(\mathcal{P}_1^*)$ est un ensemble fini non vide de $\mathbf{A}_L^n$ (II.6.5.7). Mais c'est aussi un L-sous- ensemble algébrique irréductible puisque $I_L(V(\mathcal{P}_1^*)) = \sqrt{\mathcal{P}_1^*} = \mathcal{P}_1^*$ est un idéal premier de $L[X_1,\dots,X_n]$. (II.4.5 et II.2.9). Il existe donc $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{A}_L^n$ tel que $V(\mathcal{P}_1^*) = x$ et $\mathcal{P}_1^* = I_L(x) = (X_1 - x_1,\dots,X_n - x_n)$. Puisque $\mathcal{P}_1^* \in \mathrm{Ass}I_r^*$, $(I_r^* : X_n - x_n) \neq I_r^*$ (1.14).

Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que

$$(I_r^* : X_n - x_n) = I_r^*.$$

Soit donc $f \in L[X_1,\dots,X_n]$ tel que $(X_n - x_n)f \in I_r^*$. Il existe donc $g_1,\dots,g_r \in L[X_1,\dots,X_n]$ tels que $(X_n - x_n)f = g_1f_1 + \cdots + g_rf_r$. Soit θ : $L[X_1,\dots,X_n] \to L[X_1,\dots,X_{n-1}]$ tel que $\theta(X_i) = X_i$, $i = 1\dots n-1$, $\theta(X_n) = x_n$. On a :

$$(*) \qquad \theta(g_r)\theta(f_r) = -\theta(g_1)\theta(f_1) - \cdots - \theta(g_{r-1})\theta(f_{r-1}).$$

D'après 1.14, pour voir que $\theta(g_r) \in (\theta(f_1),\dots,\theta(f_{r-1}))$, il suffit de voir que $\theta(f_r)$ n'appartient à aucun des idéaux premiers associés à $\theta(I_{r-1}^*)$. Or l'hypothèse de récurrence s'applique dans $L[X_1,\dots,X_{n-1}]$ à $\theta(f_1),\dots,\theta(f_{r-1})$. En effet, si $1 \leq j \leq r-1$, $\dim V(\theta(I_j^*)) = n-1-j$. Ceci résulte de $\tilde{1}$, de II.3.2.1, II.5.7 et II.6.5. Par suite, si $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass}\theta(I_{r-1}^*)$, $\dim V(\mathcal{P}) = n-1-(r-1) = n-r$. Soit $\mathcal{P}^*$ l'idéal premier de $L[X_1,\dots,X_n]$ engendré par $\mathcal{P}$ et $X_n - x_n$. On a $L[X_1,\dots,X_n]/\mathcal{P}^* \simeq L[X_1,\dots,X_{n-1}]/\mathcal{P}$ de sorte que $\dim V(\mathcal{P}^*) = \dim V(\mathcal{P}) = n-r$ et si $\theta(f_r) \in \mathcal{P}$, $I_r^* \subset \mathcal{P}^*$. Or $\dim V(I_r^*) = n-r$. Par ailleurs de $\tilde{1}$) il résulte que R^*/I_r^* est une $L[X_{r+1},\dots,X_n]$-algèbre entière (II.3.2.1). Par suite $R^*/\mathcal{P}^*$ quotient de R^*/I_r^* est également une $L[X_{r+1},\dots,X_n]$-algèbre entière et II.6.5.0 entraîne que $L[X_{r+1},\dots,X_n] \to R^*/\mathcal{P}^*$ est injectif. On peut donc appliquer II.5.7 à $L[X_1,\dots,X_n]$ et $\mathcal{P}^*$; il en résulte que $\dim V(\theta(\mathcal{P}^*)) = n-r-1$. Mais $\theta(\mathcal{P}^*) = \mathcal{P}$ et $\dim V(\mathcal{P}) = n-r$. C'est que $\theta(f_r)$ ne peut appartenir à $\mathcal{P}$ et $\theta(g_r) \in (\theta(f_1),\dots,\theta(f_{r-1}))$.

Ecrivons que $g_r = g_{1r}f_1 + \cdots + g_{r-1r}f_{r-1} + (X_n - x_n)g'_r$ où g_{jr} , $j = 1\dots r-1$, $g'_r \in L[X_1,\dots,X_n]$ et reportons dans $(*)$. Il vient :

$$\sum_{i=1\dots r-1} \{\theta(g_i) + \theta(g_{ir})\theta(f_r)\}\theta(f_i) = 0$$

et

$$\{\theta(g_{r-1})+\theta(g_{r-1r})\theta(f_r)\}\theta(f_{r-1}) = -\sum_{i=1\dots r-2}\{\theta(g_i)+\theta(g_{ir})\theta(f_r)\}\theta(f_i).$$

On montre que $\theta(g_{r-1})+\theta(g_{r-1r})\theta(f_r)\in(\theta(f_1),\dots,\theta(f_{r-2}))$ comme ci-dessus en montrant que $\theta(f_{r-1})$ n'appartient à aucun des idéaux premiers associés à $\theta(I^*_{r-2})$. L'hypothèse de récurrence s'applique dans $L[X_1,\dots,X_{n-1}]$ à $\theta(f_1),\dots,\theta(f_{r-2})$. Si $\theta(f_{r-1})\in\mathcal{P}\in \mathrm{Ass}\theta(I^*_{r-2})$, $I^*_{r-1}\subset\mathcal{P}^*$ l'idéal de $L[X_1,\dots,X_n]$ engendré par $\mathcal{P}$ et X_n-x_n.

$$\dim V(\mathcal{P}^*)=\dim V(\mathcal{P}) = n-1-(r-2)=n-r+1;$$

$$\dim V(I^*_{r-1}) = n-r+1.$$

De $\tilde{1}$), II.3.2.1, II.6.5.0, II.5.7, II.6.5, on déduit que $\dim V(\theta(\mathcal{P}^*)) = n-r$ ce qui fournit la contradiction, puisque $\theta(\mathcal{P}^*)=\mathcal{P}$ et $\dim V(\mathcal{P}) = n-r+1$. On détermine ainsi $g_{1r-1},\dots,g_{r-2r-1},g'_{r-1}\in L[X_1,\dots,X_n]$ tels que $g_{r-1} = g_{1r-1}f_1+\dots+g_{r-2\,r-1}f_{r-2}-g_{r-1r}f_r+(X_n-x_n)g'_{r-1}$ d'où il résulte :

$$\sum_{i=1\dots r-2}\{\theta(g_i)+\theta(g_{ir-1})\theta(f_{r-1})+\theta(g_{ir})\theta(f_r)\}\theta(f_i)=0\ .$$

Par récurrence, on détermine donc g_{ji} , $1\le j<i$, g'_i , $i=1\dots r\in L[X_1,\dots,X_n]$ tels que

$$g_i = g_{1i}f_1+\dots+g_{i-1i}f_i-g_{ii+1}f_{i+1}-\dots-g_{ir}f_r+(X_n-x_n)g'_i\ .$$

Posant $g_{ji}=-g_{ij}$ si $j>i$, $g_{ii}=0$, il vient

$$g_i=\sum_j g_{ji}f_j+(X_n-x_n)g'_i$$

et

$$\begin{aligned}\sum_i g_if_i &= \sum_{i,j} g_{ji}f_jf_i+(X_n-x_n)\sum g'_if_i\\ &=\sum_{i<j}(g_{ji}+g_{ij})f_jf_i+(X_n-x_n)\sum g'_if_i\\ &=(X_n-x_n)\sum g'_if_i.\end{aligned}$$

Finalement $(X_n-x_n)[f-\sum_i g'_if_i]=0$ et $f\in I^*_r$.

2.2. REMARQUES. — Si $f_1,\dots,f_r$ sont homogènes et si $\dim V(I_r)=n-r$, $\dim V(I_j)=n-j$, $1\le j\le r$. (C'est une conséquence de II.7.8) de sorte que I_r est équidimensionnel.

Si $f_1,\dots,f_r$ sont quelconques et si $\dim V(I_r) = n-r$, il se peut que $\dim V(I_{r-1})\ne n-r+1$. On a remarqué (cf. 7.8.3) que $V(I_{r-1})\supset V(I_r)$ étant $\ne\emptyset$, $\dim V(I_{r-1})\ge n-r+1$.

Par exemple dans $k[X,Y,Z]$, $f_1=Z(1+X)$, $f_2=Y(1+X)$, $f_3=X$. $V(I_3)=0$, $V(I_2)=V(1+X)\cup V(X,Y)$.

Néanmoins, on peut montrer qu'il existe $g_1, \ldots, g_r$ un système de générateurs de I_r tel que $g_i = \sum \lambda_{ij} f_j$, $\lambda_{ij} \in k$ et tel que si $J_j = (g_1, \ldots, g_j)$, $\dim V(J_j) = n - j$, $j = 1 \ldots r$. La conclusion du théorème 1.2 reste vraie. Nous n'aurons pas besoin d'utiliser ce résultat.

2.3. DÉFINITION. — *Soit $f_1, \ldots, f_r \in A$ un anneau. On dit que $f_1, \ldots, f_r$ est une suite régulière si f_j est non diviseur de zéro dans $A/f_1, \ldots, f_{j-1}$, $j = 1 \ldots r$.*

2.4. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de 2.1, $f_1, \ldots, f_r$ est une suite régulière de $k[X_1, \ldots, X_n]$.*

Démonstration. — Puisque $\dim V(I_1) = n - 1$, $f_1 \neq 0$.

Soit $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $g f_{j+1} \in I_j$. Alors $g \in (I_j : (f_{j+1}))$. Il s'agit donc de montrer que $(I_j : (f_{j+1})) = I_j$. Pour cela, il suffit que f_{j+1} n'appartienne à aucun $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass} I_j$. Or d'après 2.1, $\dim V(\mathcal{P}) = n - j$. Si $f_{j+1} \in \mathcal{P}$, $I_{j+1} \subset \mathcal{P}$ et $\dim V(I_{j+1}) = n - j - 1 \geq \dim V(\mathcal{P}) = n - j$. C'est impossible.

2.5. TERMINOLOGIE. — Sous les hypothèses de 2.1, on dit que I_r est une intersection complète.

3. Résultats d'effectivité pour les intersections complètes

3.1. THÉORÈME. — *Soit k un corps, $f_1, \dots, f_r$ des polynômes homogènes non nuls de $k[X_1, \dots, X_n]$, $1 \leq r \leq n$. Soit $I = (f_1, \dots, f_r)$, $d_i = \deg f_i$, $i = 1 \dots r$. Si $\dim V(I) = n - r$, on a dans $\mathbf{Q}[[t]]$*

$$\sum_{s \in \mathbf{N}} \mathrm{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s \ t^s = \frac{(1 - t^{d_1}) \dots (1 - t^{d_r})}{(1 - t)^n}.$$

Démonstration. — Nous montrons d'abord :

3.1.1. LEMME. —

$$\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{s \geq 0} \binom{n+s-1}{n-1} t^s.$$

Par récurrence sur n . Si $n = 1$, $\frac{1}{1-t} = 1 + \cdots + t^s + \cdots$; c'est vrai. Si cette identité est vraie pour n dans $\mathbf{Q}[[t]]$, il vient en la dérivant par rapport à t :

$$\frac{n}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{s \geq 1} s \binom{n+s-1}{n-1} t^{s-1} = \sum_{s \geq 0} (s+1) \binom{n+s}{n-1} t^s.$$

Or,

$$\frac{s+1}{n} \binom{n+s}{n-1} = \frac{(n+s)!}{n! s!} = \binom{n+s}{n}.$$

La démonstration du théorème va se faire par récurrence sur r. On peut supposer k infini (et même algébriquement clos). (II.6.5.3). 2.2 et 2.4 entraînent que $f_1, \dots, f_r$ est une suite régulière. Nous avons donc les suites exactes :

$$0 \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{s-d_r} / I_{r-1\ s-d_r} \xrightarrow{f_r} \dots$$
$$\dots \to k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1 s} \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{rs} \longrightarrow 0 \ , \quad s \geq d_r$$
$$0 \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1 s} \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{rs} \longrightarrow 0 \ , \quad s < d_r \ .$$

Il en résulte alors que :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{rs} &= \mathrm{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1 s} \ , && s < d_r, \\ &= \mathrm{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1 s} \\ &\quad - \mathrm{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_{s-d_r} / I_{r-1\ s-d_r} \ , && s \geq d_r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{s\geq 0} \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_{rs}t^s &= \sum_{s\geq 0} \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_{r-1s}t^s \\ &\quad - \sum_{s\geq d_r} \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_{s-d_r}/I_{r-1\,s-d_r}t^s \\ &= \sum_{s\geq 0} \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_{r-1s}t^s(1-t^{d_r}) \\ &= \frac{(1-t^{d_1})\dots(1-t^{d_r})}{(1-t)^n}\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence.

3.2. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de 3.1, si $P(T) \in \mathbf{Q}[T]$ désigne le polynôme de Hilbert de $k[X_1,\dots,X_n]/I$,*

$$\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s = P(s) \text{ si } s \geq d_1 + \dots + d_r - n + 1.$$

Si $r < n$, le terme dominant de $P(T)$ est $\dfrac{d_1\dots d_r}{(n-r-1)!}T^{n-r-1}$. Si $r = n$, $\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]/I = d_1\dots d_n$.

Démonstration. — Le théorème précédent nous permet de calculer $\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s$ pour tout $s \geq 0$. C'est le coefficient de t^s dans le développement en série en t de la fraction rationnelle $\prod(1-t^{d_i})/(1-t)^n$. Or $(1-t^d) = (1+t+\dots+t^{d-1})(1-t)$.

Supposons d'abord $r = n$. On a alors :

$$\prod_{i=1\dots n}(1-t^{d_i})/(1-t)^n = \prod_{i=1\dots n}(1+t+\dots+t^{d_i-1}).$$

Il en résulte que $\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s = 0$, si $s > \sum_{i=1}^n(d_i-1) = d_1+\dots+d_n-n$. (On savait déjà que $P \equiv 0$).

On remarque également que

$$\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]/I = \sum_s \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s = d_1\dots d_n.$$

Si maintenant $r < n$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{i=1\dots r}(1-t^{d_i})}{(1-t)^n} &= \frac{\prod_{i=1\dots r}(1+t+\dots+t^{d_i-1})}{(1-t)^{n-r}} \\ &= \prod_{i=1\dots r}(1+\dots+t^{d_i-1})\left(\sum_{s\geq 0}\binom{n-r+s-1}{n-r-1}t^s\right).\end{aligned}$$

Posons

$$\prod_{i=1\dots r}(1+t+\dots+t^{d_i-1}) = \sum_{j=0,\dots,\sum d_i - r}\lambda_j t^j .$$

On a

$$\lambda_0 = \lambda_{\sum d_i - r} = 1 \ .$$

Posons

$$R(T) = \frac{(n-r-1+T)\dots(1+T)}{(n-r-1)!} \ ;$$

$R(T)$ est un polynôme à coefficients rationnels de degré $n-r-1$ (pour $n = r+1$, $R(T) \equiv 1$) et on a $R(s) = \binom{n-r+s-1}{n-r-1}$ si $s \in \mathbf{N}$, de sorte que $\frac{1}{(1-t)^{n-r}} = \sum_{s \geq 0} R(s)t^s$. On constate alors que :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s = \lambda_0 R(s) + \lambda_1 R(s-1) + \cdots \\ + \lambda_{\sum d_i - r} R(s - \sum d_i + r) \text{ si } s \geq \sum d_i - r. \end{aligned}$$

Soit $\pi(T) = \lambda_0 R(T) + \cdots + \lambda_{\sum d_i - r} R(T - \sum d_i + r)$. C'est un polynôme de degré $n - r - 1$ à coefficients rationnels et $\pi(s) = \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s$ si $s \geq \sum d_i - r$. Donc $\pi = P$. Si maintenant $0 \leq s < \sum d_i - r$,

$$\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s = \lambda_0 R(s) + \lambda_1 R(s-1) + \cdots + \lambda_s R(0).$$

Or

$$\begin{aligned} \pi(s) = \lambda_0 R(s) + \lambda_1 R(s-1) + \cdots + \lambda_s R(0) + \lambda_{s+1} R(-1) + \cdots \\ + \lambda_{\sum d_i - r} R(s - \sum d_i + r). \end{aligned}$$

Mais $R(-1) = R(-2) = \cdots = R(-(n-r-1)) = 0$.

Si donc $s - \sum d_i + r \geq -(n-r-1)$, i.e. $s \geq \sum d_i - n + 1$,

$$\pi(s) = \lambda_0 R(s) + \lambda_1 R(s-1) + \cdots + \lambda_s R(0) = \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s = P(s).$$

Enfin, puisque le terme dominant de $R(T)$ est $\dfrac{T^{n-r-1}}{(n-r-1)!}$, le terme dominant de P est $(\lambda_0 + \cdots + \lambda_{\sum d_i - r})\dfrac{T^{n-r-1}}{(n-r-1)!} = \dfrac{d_1 \dots d_r}{(n-r-1)!} T^{n-r-1}$.

3.2.1. REMARQUE. — Sous les hypothèses de 3.2, le polynôme de Hilbert de $k[X_1,\dots,X_n]/I$ ne dépend que de $d_1,\dots,d_r$ et n .

3.2.2. REMARQUE. — Sous les hypothèses de 3.2, l'indice de régularité de $k[X_1,\dots,X_n]/I$ est $d_1 + \cdots + d_r - n + 1$.

Démonstration. — En effet

$$\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_{d_1+\cdots+d_r-n}/I_{d_1+\cdots+d_r-n} \neq P(d_1 + \cdots + d_r - n)$$

$$P(\sum d_i - n) = \lambda_0 R(\sum d_i - n) + \cdots + \lambda_{\sum d_i - r} R(-(n-r))$$

$$\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_{\sum d_i - n}/I_{\sum d_i - n} = \lambda_0 R(\sum d_i - n) + \cdots + \lambda_{\sum d_i - n} R(0)$$

Or, $R(-1) = \cdots = R(-(n-r-1)) = 0$ et $R(-(n-r)) \neq 0$.

3.3. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses de 3.1, si les variables* $X_1,\dots,X_n$ *sont commodes pour* I , *pour toute permutation* σ *de* $r+1,\dots,n$, $X_{\sigma(n)},\dots,X_{\sigma(r+1)}$ *est une suite régulière de* $k[X_1,\dots,X_n]/I$.

Démonstration. — $f_1,\dots,f_r$, $X_{\sigma(n)}\dots,X_{\sigma(r+1)}$ satisfait les hypothèses de 3.1, puisque d'après II.5.7 et II.6.5.7, $\dim V(f_1,\dots,f_r,X_{r+1},\dots,X_n) = 0$. $f_1,\dots,f_r,X_{\sigma(n)},\dots,X_{\sigma(r+1)}$ est donc une suite régulière de $k[X_1,\dots,X_n]/f_1,\dots,f_r$, $X_{\sigma(n)},\dots,X_{\sigma(r+1)}$. Par définition, $X_{\sigma(n)},\dots,X_{\sigma(r+1)}$ est donc une suite régulière de $k[X_1,\dots,X_n]/I$.

3.4. PROPOSITION. — *Soit I un idéal homogène de $k[X_1,\dots,X_n]$ tel que* $\dim V(I) = n-r$, $1 \le r \le n$. *Soit* $\theta : k[X_1,\dots,X_n] \to k[X_1,\dots,X_n]$ *tel que* $\theta(X_i) = X_i$, $i = 1\dots,r$, $\theta(X_i) = 0$, $i = r+1,\dots,n$.

$\mathbf{N}^n$ *et* $\mathbf{N}^r$ *étant munis de l'ordre lexicographique inverse (I.1.1.2.2), si* $X_n,\dots,X_{r+1}$ *est une suite régulière de* $k[X_1,\dots,X_n]/I$, $\exp I = \exp\theta(I)\times\mathbf{N}^{n-r}$.

Il en est en particulier ainsi si I vérifie les hypothèses de 3.1 et si les variables $X_1,\dots,X_n$ sont commodes pour I et alors $\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]/\theta(I) = \sharp\mathbf{N}^r - \exp\theta(I) = d_1\dots d_r$.

Démonstration. — Soit $g \in I$. Puisque I est un idéal homogène, et par définition de l'ordre lexicographique inverse, $\mathrm{in}g = \mathrm{in}\,\mathrm{gr}g$ et $\mathrm{gr}g \in I$. On peut donc supposer g homogène. Soit $\mathrm{in}g = c_\alpha X_1^{\alpha_1}\dots X_n^{\alpha_n}$, $c_\alpha \in k$, $c_\alpha \neq 0$. Nous allons montrer qu'il existe $g' \in I$ homogène tel que $\mathrm{in}g' = c_\alpha X_1^{\alpha_1}\dots X_r^{\alpha_r}$.

Soit $g = \sum_\gamma c_\gamma X_1^{\gamma_1}\dots X_n^{\gamma_n}$. Puisque $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \exp g$, si γ est tel que $c_\gamma \neq 0$, $(\gamma_1,\dots,\gamma_n) \le (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. On a donc $\gamma_n \ge \alpha_n$. Il existe donc $g_1 \in k[X_1,\dots,X_n]$ homogène tel que $g = X_n^{\alpha_n}g_1$. Or X_n étant non diviseur de zéro dans $k[X_1,\dots,X_n]/I$, $g_1 \in I$ et on a $\mathrm{in}g_1 = c_\alpha X_1^{\alpha_1}\dots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$.

Supposons qu'on ait déterminé g_i homogène dans I tel que $\mathrm{in}g_i = c_\alpha X_1^{\alpha_1}\dots X_{n-i}^{\alpha_{n-i}}$, $i < n-r$.

Si $g_i = \sum c_{i\gamma}X_1^{\gamma_1}\dots X_n^{\gamma_n}$ et si $c_{i\gamma} \neq 0$, $(\gamma_1,\dots,\gamma_n) \le (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-i},0,\dots,0)$. Ou bien, il existe j , $n-i+1 \le j \le n$ tel que $\gamma_j > 0$, ou bien $\gamma_{n-i+1} = \dots = \gamma_n = 0$ et $\gamma_{n-i} \ge \alpha_{n-i}$. Il existe donc $g'_1,\dots,g'_{i+1} \in k[X_1,\dots,X_n]$ homogènes tels que $g_i = X_n g'_1 + \dots + X_{n-i+1}g'_i + X_{n-i}^{\alpha_{n-i}}g'_{i+1}$. Or X_{n-i} étant non diviseur de zéro dans $k[X_1,\dots,X_n]/I + (X_n) + \dots + (X_{n-i+1})$, $g'_{i+1} \in I + (X_n) + \dots + (X_{n-i+1})$. Il existe donc $g_{i+1} \in I$ et $h'_1,\dots,h'_i$ dans $k[X_1,\dots,X_n]$ homogènes tels que

$$g'_{i+1} = X_n h'_1 + \dots + X_{n-i+1}h'_i + g_{i+1}$$

et

$$g_i = X_n(g'_1 + X_{n-i}^{\alpha_{n-i}}h'_1) + \dots + X_{n-i+1}(g'_i + X_{n-i}^{\alpha_{n-i}}h'_i) + X_{n-i}^{\alpha_{n-i}}g_{i+1} .$$

Or $\exp g_i = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-i},0,\dots,0)$. Tout monôme de même degré contenant effectivement $X_n,X_{n-1},\dots$ ou X_{n-i+1} est donc strictement plus petit que $\exp g_i$ et $\mathrm{in}g_i = \mathrm{in}X_{n-i}^{\alpha_{n-i}}g_{i+1}$. Donc

$$\mathrm{in}g_{i+1} = c_\alpha X_1^{\alpha_1}\cdots X_{n-i-1}^{\alpha_{n-i-1}} .$$

Itérant ce procédé, on détermine donc $g_{n-r} \in I$ homogène tel que $\mathrm{in}g_{n-r} = c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r}$ comme annoncé. Mais $\theta(g_{n-r}) \neq 0$ et tout monôme contenant effectivement X_n, X_{n-1} ou $\dots X_{r+1}$ étant strictement plus petit qu'un monôme en $X_1, \dots X_r$ c'est que $\mathrm{in}g_{n-r} = \mathrm{in}\theta(g_{n-r})$. On a donc

$$\mathrm{in}g = \mathrm{in}\theta(g_{n-r}) \times X_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \dots X_n^{\alpha_n} \quad \text{et} \quad \exp I \subset \exp \theta(I) \times \mathbf{N}^{n-r} .$$

L'inclusion opposée résulte en fait de la remarque précédente car $\exp I$ étant un E-ensemble, il suffit de montrer que $\exp \theta(I) \times 0, \dots, 0 \subset \exp I$. Or si $\theta(f) \neq 0$, $\exp \theta(f) = \exp f$.

Enfin $X_n, \dots, X_{r+1}$ étant une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$, d'après II.7.8.1, $\dim V(\theta(I)) = 0$ et $\mathrm{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/\theta(I) < \infty$. Si I vérifie les hypothèses de 3.1, $\theta(I)$ aussi dans $k[X_1, \dots, X_r]$ et d'après 3.2 $\mathrm{rg}_k k[X_1, \dots, X_r]/\theta(I) = d_1 \dots d_r$. Enfin, d'après I.2.9 c'est aussi $\sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$.

3.4.1. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de 3.4, $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est un $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$-module libre de type fini.*

Démonstration. — Montrons que

$$(\mathrm{cl} X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \mathrm{mod} I)_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)}$$

forment une base du $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$-module $k[X_1, \dots, X_n]/I$. D'après I.2.7, pour tout $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, $fRI \equiv f \mathrm{mod} I$ et $fRI = \sum c_\alpha X^\alpha$, $\alpha \notin \exp I$. Or $\exp I = \exp \theta(I) \times \mathbf{N}^{n-r}$, $\mathbf{N}^n - \exp I = \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \times \mathbf{N}^{n-r}$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \notin \exp I$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \notin \exp \theta(I)$ et les $(\mathrm{cl} X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \mathrm{mod} I)\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$ engendrent le $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$-module $k[X_1, \dots, X_n]/I$. Si maintenant

$$f = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)} P_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(X_{r+1}, \dots, X_n) X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \in I ,$$

$$P_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \in k[X_{r+1}, \dots, X_n]$$

et si $f \neq 0$, $\exp f \in \exp I$.

Or $\exp I = \exp \theta(I) \times \mathbf{N}^{n-r}$, si $\exp f = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$, d'une part $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \exp \theta(I)$, d'autre part $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \notin \exp \theta(I)$. C'est que $f = 0$ et que $P_\alpha = 0$ pour tout α.

3.4.2. REMARQUE. — Sous les hypothèses de 3.4, les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodes pour I et pour toute permutation σ de $r+1 \dots n$, $X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$.

Démonstration. — $I = \mathrm{gr} I$ puisque I est homogène; II.3.2.1 et 3.4.1 entraînent que ii) de II.5.2 est satisfait avec $d = n - r$. II.6.5.0 entraîne que i) de II.5.2 est aussi satisfait.

Montrons maintenant que $X_{\sigma(i)}$ est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I + (X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(i+1)})$, $r+1 \leq i \leq n$. Soit $f_j \in k[X_1, \dots, X_n]$, $i \leq j \leq n$ tels que : $X_{\sigma(i)} f_i + \dots + X_{\sigma(n)} f_n \in I$. D'après 3.4.1, $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est un $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$-module libre de type fini. Soit (e_h) , $h = 1 \dots t$, une base de ce module. Ecrivons que $\mathrm{cl} f_j \bmod I = \sum_h \lambda_{jh} e_h$, $\lambda_{jh} \in k[X_{r+1}, \dots, X_n]$. On en déduit que $\forall h = 1 \dots t$,

$$X_{\sigma(i)}\lambda_{ih} + \cdots + X_{\sigma(n)}\lambda_{nh} = 0.$$

Alors $\lambda_{ih} \in (X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ et $f_i \in I + (X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(i+1)})$.

3.5. COROLLAIRE. — *Sous les hyptothèses de 3.1, si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodes pour I et si $g_1, \dots, g_t$ est une base standard de cardinal minimal de I pour l'ordre lexicographique inverse* ,

$$\deg g_i \leq d_1 + \cdots + d_r - r + 1 \quad , \quad i = 1 \dots t.$$

Démonstration. — D'après 3.3 et 3.4, $\exp I = \exp \theta(I) \times \mathbf{N}^{n-r}$. Soit $A_i = \exp g_i$. Puisque $A_1, \dots, A_t$ est l'escalier de I, $A_i \in \mathbf{N}^r \times 0$, $i = 1 \dots t$. De 3.2, on déduit que si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \geq d_1 + \cdots + d_r - r + 1$, $X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \in \theta(I)$. Pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ tel que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = d_1 + \cdots + d_r - r + 1$, il existe donc j (dépendant de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$) tel que $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) - A_j \in \mathbf{N}^r$ (en effet $A_1, \dots, A_t$ est également l'escalier de $\theta(I)$) et $|A_j| \leq |\alpha| = d_1 + \cdots + d_r - r + 1$. Soit Λ l'ensemble des $j \in 1 \dots t$ obtenu par ce procédé. Si, il existe $j' \in 1 \dots t$, $j' \notin \Lambda$ et si $|A_{j'}| > d_1 + \cdots + d_r - r + 1$, $A_{j'} \in \exp \theta(I)$ et il existe $j'' \in 1 \dots t$ tel que $A_{j'} \in A_{j''} + \mathbf{N}^r$. Un tel j' ne peut exister, puisque $A_1, \dots, A_t$ est l'escalier d'un E-ensemble. Donc $|A_j| = \deg g_j \leq d_1 + \ldots + d_r - r + 1$, $j = 1 \dots t$.

3.5.1. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de 3.1 et si $r = n$, si $g_1, \dots, g_t$ est une base standard de cardinal minimal pour un ordre total sur $\mathbf{N}^n$ vérifiant I.1.1,* $\deg g_i \leq d_1 + \ldots + d_n - n + 1$, $i = 1 \dots t$.

Démonstration. — Si $|\alpha| \geq d_1 + \cdots + d_n - n + 1$, $X^\alpha \in I$. Pour tout ordre $\exp X^\alpha = \alpha \in \exp I = \cup_i(\exp g_i + \mathbf{N}^n)$. L'argument est comme ci-dessus.

4. Résultats d'effectivité pour les Cohen-Macaulay

Nous allons introduire dans ce paragraphe une classe d'idéaux contenant les intersections complètes à laquelle les résultats d'effectivité du **3** vont s'étendre.

4.1. PROPOSITION. — *Soit k un corps infini. Soit $f_1, \dots, f_s$, $s \geq 1$, des polynômes homogènes de $k[X_1, \dots, X_n]$ tous $\neq 0$. Soit $d_i = \deg f_i$, $i = 1 \dots s$. On suppose que $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s > 0$. Enfin si $I = (f_1, \dots, f_s)$, on pose $\dim V(I) = n - r$. $(1 \leq r \leq n)$. Alors, il existe $g_1, \dots, g_r \in k[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes homogènes tels que :*

1) $\deg g_i = d_i \ , \ i = 1 \dots r$,

2) $g_i \equiv \lambda_i f_i \mathrm{mod}(f_{i+1}, \dots, f_s)$ avec $\lambda_i \in k \ , \ \lambda_i \neq 0 \ , \ i = 1 \dots r \ ,$

3) $g_1, \dots, g_r$ *est une suite régulière de* $k[X_1, \dots, X_n]$.

Démonstration. — Puisque $\dim V(I) \geq n - s$ (II.7.8.2), $r \leq s$. Si $r = s$, $f_1, \dots, f_r$ est une suite régulière (2.2, 2.4). Supposons donc $r < s$. Soit $g_1 = f_1$. On a $\deg g_1 = d_1$ et $g_1 \neq 0$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]$. Supposons qu'on ait déterminé $g_1, \dots, g_{t-1}$, $t \leq r$, tels que :

1) $\deg g_i = d_i \ , \ i = 1 \dots t-1 \ ,$

2) $g_i \equiv \lambda_i f_i \mathrm{mod} f_{i+1}, \dots, f_s$ avec $\lambda_i \in k \ , \ \lambda_i \neq 0 \ , \ i = 1 \dots t-1, \quad (*)_{t-1}$.

3) $g_1, \dots, g_{t-1}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]$

et déterminons g_t. Soit

$$\phi : k \times k^{\binom{n+d_t-d_{t+1}-1}{n-1}} \times \cdots \times k^{\binom{n+d_t-d_s-1}{n-1}} = k^{\tau} \to k[X_1, \dots, X_n]_{d_t}$$

qui à

$$(\lambda_t, \dots \lambda_{t+1,\alpha^{t+1}} \dots, \dots, \dots \lambda_{s,\alpha^s} \dots) \mapsto \lambda_t f_t + \sum \lambda_{t+1,\alpha^{t+1}} X^{\alpha^{t+1}} f_{t+1} + \cdots + \sum \lambda_{s,\alpha^s} X^{\alpha^s} f_s$$

où $\alpha^i = (\alpha^i_n, \dots, \alpha^i_n)$ est tel que $|\alpha^i| = d_t - d_i$.

ϕ est une application linéaire.

D'autre part, $g_1, \dots, g_{t-1}$ étant une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]$ formée d'éléments homogènes, si $J_i = (g_1, \dots, g_i)$, $i = 1 \dots t-1$, $\dim V(J_i) = n - i$ (II.7.8.1) et d'après 2.1, J_{t-1} est équidimensionnel; soit $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_u$ les idéaux premiers associés à J_{t-1}, on a donc $\dim V(\mathcal{P}_i) = n - t + 1 > n - r \ , \ i = 1 \dots u$.

Or pour que $g \in k[X_1, \dots, X_n]$ soit non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/J_{t-1}$, il faut et il suffit que $g \notin \cup_{i=1 \dots u} \mathcal{P}_i$ (1.14.1). J_{t-1} étant un idéal homogène, les idéaux premiers associés à J_{t-1} sont aussi des idéaux homogènes et pour que $g \in k[X_1, \dots, X_n]_{d_t}$ ne soit pas diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/$

J_{t-1}, il faut et il suffit que $g \notin \cup_{i=1\ldots u} \mathcal{P}_{id_t}$. $\mathcal{P}_{id_t}$ est un sous-espace vectoriel de $k[X_1, \ldots, X_n]_{d_t}$. g doit donc éviter une réunion de sous-espaces vectoriels.

Plus précisément, pour que $g_1, \ldots, g_{t-1}, \phi(\Lambda)$ vérifie les conditions $(*)_t$, il suffit que $\Lambda \notin \cup_{i=1\ldots u} \phi^{-1}(\mathcal{P}_{id_t}) \cup \{\lambda_t = 0\}$. Λ doit donc éviter un nombre fini de sous-espaces vectoriels de k^r. k étant infini, cela est possible à condition qu'aucun des sous-espaces en question ne soit k^r tout entier. Pour $\{\lambda_t = 0\}$, c'est clair.

Montrons que pour tout $i = 1 \ldots u$, $\phi^{-1}(\mathcal{P}_{id_t}) \neq k^r$. S'il en était autrement pour un indice i , $1 \leq i \leq u$, on en déduirait que $f_t, \ldots, X^{\alpha^j} f_j \ldots$, appartiendrait à $\mathcal{P}_i$ pour tout α^j, $t+1 \leq j \leq s$, de longueur $d_t - d_j$. Si $d_j = d_t$, alors $f_j \in \mathcal{P}_i$. Si $d_j \neq d_t$, $X_1^{d_t - d_j} f_j, \ldots, X_n^{d_t - d_j} f_j \in \mathcal{P}_i$. Si f_j n'appartenait pas à $\mathcal{P}_i$, il en résulterait que $(X_1, \ldots, X_n) \subset \mathcal{P}_i$ et $\dim V(\mathcal{P}_i) = 0$. Or c'est impossible, puisque $\dim V(\mathcal{P}_i) = n - t + 1 > n - r \geq 0$. Donc $f_t \ldots, f_s \in \mathcal{P}_i$. Mais $g_1, \ldots, g_{t-1}$ vérifie les conditions $(*)_{t-1}$. Il en résulte que si $1 \leq j \leq t-1$, $f_j \in (g_j, \ldots, g_{t-1}, f_t, \ldots, f_s)$. Comme $J_{t-1} \subset \mathcal{P}_i$, $f_j \in \mathcal{P}_i$, $1 \leq j \leq t-1$. Au total $I \subset \mathcal{P}_i$. Alors $\dim V(I) \geq \dim V(\mathcal{P}_i)$ i.e. $n - r \geq n - t + 1$ ce qui est contradictoire. Il existe donc $\Lambda \in k^r$ tel que $g_1, \ldots, g_{t-1}, \phi(\Lambda)$ vérifie $(*)_t$ et finalement on obtient $g_1, \ldots, g_r$ vérifiant $(*)_r$.

4.2. DÉFINITION. — *Soit k un corps infini et I un idéal homogène de $k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $\dim V(I) = n - r$. $0 \leq r \leq n$. On dit que $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay (gradué) s'il existe $\tau : k[X_1, \ldots, X_n] \to k[Y_1, \ldots, Y_n]$ un changement de variables linéaire tel que $Y_n, \ldots, Y_{r+1}$ soit une suite régulière de $k[Y_1, \ldots, Y_n]/\tau(I)$.*

Au cours de la démonstration de la proposition suivante, nous utiliserons :

4.3. LEMME. — *Soit $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_t$ des idéaux premiers de $k[X_1, \ldots, X_n]$ et soit I un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$. Si $I \subset \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_t$, $\exists i$, $1 \leq i \leq t$, $I \subset \mathcal{P}_i$.*

Démonstration. — Par récurrence sur t . Si $t = 1$, c'est clair. Supposons $t \geq 2$. Nous allons montrer qu'il existe j , $1 \leq j \leq t$ tel que $I \cap \mathcal{P}_j \subset \cup_{i \neq j} \mathcal{P}_i$. S'il en est ainsi $I = \cup_{i=1\ldots t} I \cap \mathcal{P}_i \subset \cup_{i \neq j} \mathcal{P}_j$ et on conclut en vertu de l'hypothèse de récurrence.

S'il en était autrement, pour tout j , $1 \leq j \leq t$, il existerait $f_j \in I \cap \mathcal{P}_j$, $f_j \notin \mathcal{P}_i$, $i \neq j$. Soit $z = f_1 + f_2 \cdots f_t$, $z \in I$. $f_2 \cdots f_t \notin \mathcal{P}_1$ car $\mathcal{P}_1$ est premier et f_i , $i = 2 \ldots t$, n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$. $f_1 \in \mathcal{P}_1$. Donc $z \notin \mathcal{P}_1$. Soit $i \geq 2$. $f_1 \notin \mathcal{P}_i$. $f_2 \cdots f_t \in \mathcal{P}_i$. Donc $z \notin \mathcal{P}_i$. Alors $z \notin \mathcal{P}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_t$ contrairement à l'hypothèse.

4.3.1. PROPOSITION. — *Soit I un idéal homogène de $k[X_1, \ldots, X_n] \neq (1)$. Si $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay, I est équidimensionnel.*

Démonstration. — Si τ est comme dans 4.2, il s'agit de démontrer que $\tau(I)$ est équidimensionnel. Effectuant au besoin un changement de notation, nous pouvons donc supposer que $X_n, \ldots, X_{r+1}$ est une suite régulière pour $k[X_1, \ldots, X_n]/I$. Soit $d = \dim V(I)$. Il faut montrer que si $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass} I$, $\dim V(\mathcal{P}) = d$.

Soit $\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_t$ les idéaux premiers associés à $I + X_n$. Nous allons d'abord montrer qu'il existe i , $1 \leq i \leq t$, tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'_i$. S'il n'en était pas ainsi $\mathcal{P} \not\subset \cup_{i=1\dots t}\mathcal{P}'_i$ (lemme 4.3). Il existerait donc $f \in \mathcal{P}$, $f \notin \mathcal{P}'_j$, $j = 1 \dots t$. De 1.14, il résulte que $(I + X_n : f) = I + X_n$. Soit maintenant $g \in (I : f)$. Alors $gf \in I \subset I + X_n$ et $g \in I + X_n$. Il existe donc $h' \in I$ et $g' \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $g = h' + X_n g'$. D'où $X_n g' f = gf - h'f \in I$ et puisque X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$, $g'f \in I$ et $g' \in (I : f)$. I étant un idéal homogène, on peut supposer que $\deg h' \leq \deg g$, $\deg g' \leq \deg g - 1$. Par récurrence descendante sur le degré, on en déduit que $g \in I$ (on aboutit à $c \in k$, $\in (I : f)$ donc $cf \in I \subset (I + X_n)$, $c \in (I + X_n : f) = I + X_n$, donc $c = 0$). Ainsi $(I : f) = I$. Mais c'est impossible, d'après 1.14, puisque $f \in \mathcal{P}$.

En raisonnant par récurrence sur le nombre des variables, puisque

$$k[X_1, \dots, X_n]/I + X_n \simeq k[X_1, \dots, X_{n-1}]/\theta(I)$$

où $\theta : k[X_1, \dots, X_n] \to k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ est l'application telle que $\theta(X_i) = X_i$, $i = 1 \dots n-1$, $\theta(X_n) = 0$ et que, $X_n, \dots, X_{r+1}$ étant une suite régulière pour $k[X_1, \dots, X_n]/I$, par définition $X_{n-1}, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière pour $k[X_1, \dots, X_{n-1}]/\theta(I)$ enfin puisque $\dim V(\theta(I)) = \dim V(I) - 1$ (II.7.8.1), il vient que $\dim V(\mathcal{P}'_i) = d - 1$. Par suite, $\dim V(\mathcal{P}) \geq d - 1$. ($1^{er}$ exercice, chap. II). Si l'inégalité est stricte, puisque $\dim V(\mathcal{P}) \leq d$, on a $\dim V(\mathcal{P}) = d$ et on a fini.

Sinon $\dim V(\mathcal{P}) = d - 1$. Alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}'_i$ (II. 1^{er} exercice). Or $I + X_n \subset \mathcal{P}'_i = \mathcal{P}$. Donc $X_n \in \mathcal{P}$. Mais c'est impossible car X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$ (1.14).

4.4. PROPOSITION. — *Soit I un idéal homogène de $k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\dim V(I) = n - r$, $0 \leq r \leq n$. Si $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay et si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodes pour I , $X_n, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. Il en est de même pour toute permutation de $X_n, \dots, X_{r+1}$.*

Démonstration. — X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$. En effet, il suffit de voir que si $\mathcal{P} \in \mathrm{Ass} I$, $X_n \notin \mathcal{P}$ (1.14). Or $\dim V(\mathcal{P}) = n - r$ (4.3.1). Si $X_n \in \mathcal{P}$, $I + X_n \subset \mathcal{P}$; $\dim V(I + X_n) \geq \dim V(\mathcal{P}) = n - r$ (II.1^{er} exercice). Or $\dim V(I + X_n) = n - r - 1$ (II.7.9).

Il existe $X''_{r+1}, \dots, X''_{n-1} \in k[X_1, \dots, X_n]_1$ tels que $X_n, X''_{n-1}, \dots, X''_{r+1}$ soit une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. En effet, supposons qu'on ait construit $X''_{n-1}, \dots, X''_{i+1} \in k[X_1, \dots, X_n]_1$, $i > r$, tels que $X_n, X''_{n-1}, \dots, X''_{i+1}$ soit une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ et construisons X''_i. Par hypothèse, il existe $X'_n = \tau^{-1}(Y_n), \dots, X'_{r+1} = \tau^{-1}(Y_{r+1})$ tel que $X'_n, \dots, X'_{r+1}$ soit une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. X'_i étant non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I + (X'_n, \dots, X'_{i+1})$ on a :

$$(I + (X'_n, \dots, X'_{i+1}) : X'_i) = I + (X'_n, \dots, X'_{i+1}).$$

Soit $M = (X_1, \dots, X_n) = (X'_1, \dots, X'_n)$ où $X'_i = \tau^{-1}(Y_i)$, $i = 1 \dots n$. A fortiori

$$(I + (X'_n, \dots, X'_{i+1}) : M) = I + (X'_n, \dots, X'_{i+1}).$$

Admettons pour l'instant que ceci entraîne que

$$(I+(X_n,\ldots,X''_{i+1}):M)=I+(X_n,\ldots,X''_{i+1}).$$

Soit $\mathcal{P}'_1,\ldots,\mathcal{P}'_t$ les idéaux premiers associés à $I+(X_n,\ldots,X''_{i+1})$. D'après 1.14, M n'est contenu dans aucun des $\mathcal{P}'_i$, $i=1\ldots t$ et $(\mathcal{P}'_i)_1\neq k[X_1,\ldots,X_n]_1$, $i=1\ldots t$. k étant un corps infini, $\cup_{i=1\ldots t}(\mathcal{P}'_i)_1\neq k[X_1,\ldots,X_n]_1$. Il existe donc $X''_i\in k[X_1,\ldots,X_n]_1$ tel que X''_i soit non diviseur de zéro dans $k[X_1,\ldots,X_n]/I+(X_n,\ldots,X''_{i+1})$; $X_n,\ldots,X''_{i+1},X''_i$ est la suite régulière cherchée.

Par définition

$$k[X_1,\ldots,X_n]/I+X_n\simeq k[X_1,\ldots,X_{n-1}]/I(X_1,\ldots,X_{n-1},0)=A$$

est Cohen-Macaulay puisque $X''_{n-1},\ldots,X''_{r+1}$ est une suite régulière de A qui est de dimension $n-r-1$. Par récurrence sur n, on peut donc supposer que $X_{n-1},\ldots,X_{r+1}$ est une suite régulière de A. (Les variables $X_1,\ldots,X_{n-1}$ sont commodes pour A-II.5.7). $X_n,\ldots,X_{r+1}$ est donc une suite régulière de $k[X_1,\ldots,X_n]/I$. La même démonstration s'applique à toute permutation de $X_n\ldots,X_{r+1}$.

4.4.1. LEMME. — *Soit $X'_n,\ldots,X'_j$; $X''_n,\ldots,X''_j$ 2 suites régulières de $k[X_1,\ldots,X_n]/I$ formées d'éléments de M_1. Les 2 $k[X_1,\ldots,X_n]/I$-modules :*

$$(I+(X'_n,\ldots,X'_j):M)/I+(X'_n,\ldots,X'_j)$$

et

$$(I+(X''_n,\ldots,X''_j):M)/I+(X''_n,\ldots,X''_j)$$

sont isomorphes.

Démonstration. — Puisque X'_j (resp.X''_j) est non diviseur de zéro dans

$$k[X_1,\ldots,X_n]/I+(X'_n,\ldots,X'_{j-1})(\text{resp.}k[X_1,\ldots,X_n]/I+(X''_n,\ldots,X''_{j-1})),$$

M n'est pas un idéal premier associé à $I+(X'_n,\ldots,X'_{j-1})$, (resp. $I+(X''_n,\ldots,X''_{j-1})$). Soit $Y\in M_1$, n'appartenant à aucun des idéaux premiers associés à $I+(X'_n,\ldots,X'_{j-1})$ et à $I+(X''_n,\ldots,X''_{j-1})$. Un tel Y existe à cause de 4.3. Alors $X'_n,\ldots,X'_{j-1},Y$; $X''_n,\ldots,X''_{j-1},Y$ sont 2 nouvelles suites régulières pour $k[X_1,\ldots,X_n]/I$.

Nous allons voir que :

$$\begin{aligned}&(I+(X'_n,\ldots,X'_{j-1},X'_j):M)/I+(X'_n,\ldots,X'_j)\\ &\simeq(I+(X'_n,\ldots,X'_{j-1},Y):M/I+(X'_n,\ldots,Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(I+(X''_n,\ldots,X''_{j-1},X''_j):M)/I+(X''_n,\ldots,X''_j)\\ &\simeq(I+(X''_n,\ldots,X''_{j-1},Y):M/I+(X''_n,\ldots,Y).\end{aligned}$$

Il suffit de montrer la première assertion.

Soit $A'=k[X_1,\ldots,X_n]/I+(X'_n,\ldots,X'_{j-1})$, $M'=(X_1,\ldots,X_n)A'$. Il s'agit de voir que $(X'_j:M')/X'_j\simeq(Y:M')/Y$ comme A'-module.

Soit T le localisé de A' en la partie multiplicative S des non diviseurs de zéro de $A'(T = \{\frac{a'}{b'}$, $a' \in A'$, $b' \in S$ modulo la relation d'équivalence $\frac{a'}{b'} \sim \frac{a''}{b''}$ $a'b'' - a''b' = 0$). X'_j et Y appartiennent à S. Soit $\phi : T \to T$ l'application A' linéaire définie par $\phi(f) = \dfrac{X'_j}{Y} f$. A' est un sous-anneau de T et $\phi(Y : M') \subset (X'_j : M')$. D'autre part $\phi((Y)A') \subset (X'_j)A'$. ϕ induit donc une application A'-linéaire : $(Y : M')/Y \to (X'_j : M')/X'_j$. Mais $\psi : T \to T$ défini par $\psi(f) = \dfrac{Y}{X'_j} f$ induit une application A'- linéaire $(X'_j : M')/X'_j \to (Y : M')/Y$. Puisque $\psi \circ \phi = \mathrm{Id} = \phi \circ \psi$, ces deux applications sont des isomorphismes.

Or d'après 3.4.2, $Y, X'_n, \ldots, X'_{j-1}$ et $Y, X''_n, \ldots, X'_{j-1}$ sont encore des suites régulières de $k[X_1, \ldots, X_n]/I$. Raisonnant par récurrence sur la longueur des suites régulières données initialement, on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $k[X_1, \ldots, X_n]/I + (Y)$. On en déduit un isomorphisme de $k[X_1, \ldots, X_n]/I + (Y)$-modules entre

$$(I + (Y) + (X'_n, \ldots, X'_{j-1}) : M)/I + (Y) + (X'_n, \ldots, X'_{j-1})$$

et

$$(I + (Y) + (X''_n, \ldots, X''_{j-1}) : M)/I + (Y) + (X''_n, \ldots, X''_{j-1})$$

ce qui achève la démonstration.

4.5. PROPOSITION. — *Soit k un corps infini et I un idéal homogène de $k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $\dim V(I) = n - r$, $1 \leq r \leq n$. Soit $\theta : k[X_1, \ldots, X_n] \to k[X_1, \ldots, X_r]$ tel que $\theta(X_i) = X_i$, $1 \leq i \leq r$, $\theta(X_i) = 0$, $r + 1 \leq i \leq n$. Soit ${}^cI$ l'idéal engendré par $\theta(I)$ dans $k[X_1, \ldots, X_n]$. Si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont commodes pour I, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay.

ii) $\forall s \in \mathbf{N}$, $\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]_s/I_s = \mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]_s/{}^cI_s$.

Démonstration. — *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. D'après 4.4, $(X_n, \ldots, X_{r+1})$ est une suite régulière de $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ et d'après 3.4.1, $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est un $k[X_{r+1}, \ldots, X_n]$-module libre. Plus précisément, nous avons montré que les

$$(cl\ X_1^{\alpha_1} \ldots X_r^{\alpha_r} \mathrm{mod} I)_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)}$$

en formaient une base. (L'ordre sur $\mathbf{N}^n$ est l'ordre lexicographique inverse). On a donc :

$$k[X_1, \ldots, X_n]_s/I_s = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \\ |\alpha| \leq s}} k[X_{r+1}, \ldots, X_n]_{s-|\alpha|} cl\ X_1^{\alpha_1} \ldots X_r^{\alpha_r} \mathrm{mod} I$$

de sorte que $\forall s \in \mathbf{N}$:

$$\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]_s/I_s = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \\ |\alpha| \leq s}} \binom{n - r + s - |\alpha| - 1}{n - r - 1}.$$

Mais $k[X_1,\dots,X_n]/{}^cI = k[X_1,\dots,X_r]/\theta(I)[X_{r+1},\dots,X_n]$. $X_n,\dots,X_{r+1}$ est trivialement une suite régulière de $k[X_1,\dots,X_n]/{}^cI$. Comme $\theta(I) = \theta({}^cI)$ les $(cl\ X_1^{\alpha_1}\dots X_r^{\alpha_r}\mathrm{mod}^c I)_{\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\mathbf{N}^r-\exp\theta(I)}$ forment une base du $k[X_{r+1},\dots,X_n]$-module $k[X_1,\dots,X_n]/{}^cI$. On a donc

$$k[X_1,\dots,X_n]_s/{}^cI_s = \bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}^r-\exp\theta(I)\\ |\alpha|\le s}} k[X_{r+1},\dots,X_n]_{s-|\alpha|}cl\ X_1^{\alpha_1}\dots X_r^{\alpha_r}\mathrm{mod}^c I$$

et $\forall s\in\mathbf{N}$

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/{}^cI_s &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{N}^r-\exp\theta(I)\\ |\alpha|\le s}} \binom{n-r+s-|\alpha|-1}{n-r-1}\\ &= \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s.\end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ *i*) Nous aurons besoin de 2 lemmes préliminaires :

4.5.1. LEMME. — *Sous les hypothèses de 4.5, si on munit* $\mathbf{N}^n$ *de l'ordre lexicographique inverse,* $\exp\theta(I) = \exp I\cap(\mathbf{N}^r\times 0)$.

Démonstration. — Soit $\alpha_1,\dots,\alpha_r\in\exp\theta(I)$. Il existe donc $f\in I$ homogène tel que $\theta(f)\ne 0$ et que $\theta(f) = cX_1^{\alpha_1}\dots X_r^{\alpha_r} + \sum_{\beta<\alpha} c_\beta X_1^{\beta_1}\dots X_r^{\beta_r}$, $c,c_\beta\in k$, $c\notin 0$. Alors, il existe $\gamma\in\mathbf{N}^n$, tels que $(\gamma_{r+1},\dots,\gamma_n)\ne 0$ et $d_\gamma\in k$ tels que $f = \theta(f) + \sum_\gamma d_\gamma X_1^{\gamma_1}\dots X_n^{\gamma_n}$. Mais par définition de l'ordre lexicographique inverse pour un tel γ, $(\gamma_1,\dots,\gamma_n) < (\alpha_1,\dots,\alpha_r,0,\dots,0)$. Donc $\exp f = (\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ et $\exp\theta(I)\subset\exp I\cap(\mathbf{N}^r\times 0)$.

Si maintenant $(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\exp I\cap\mathbf{N}^r\times 0$, il existe $f\in I$ homogène tel que

$$f = cX_1^{\alpha_1}\dots X_r^{\alpha_r} + \sum_{\beta<(\alpha_1,\dots,\alpha_r,0,\dots,0)} c_\beta X_1^{\beta_1}\dots X_n^{\beta_n}\ ,\ c,c_\beta\in k\ ,\ c\ne 0.$$

Alors $\theta(f)\ne 0$ et si $(\beta_{r+1},\dots,\beta_n) = 0$ et $c_\beta\ne 0$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_r) > (\beta_1,\dots,\beta_r)$ pour l'ordre lexicographique inverse sur $\mathbf{N}^r$. Donc $\exp\theta(f) = (\alpha_1,\dots,\alpha_r)$.

4.5.2. LEMME. — *Sous les hypothèses de 4.5,*

$$\forall s\in\mathbf{N}\ ,\ \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s \le \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/{}^cI_s\ .$$

Démonstration. — Il résulte tout d'abord de 4.5.1 que :

$$\mathbf{N}^n - \exp I\subset\mathbf{N}^r - \exp\theta(I)\times\mathbf{N}^{n-r} = \mathbf{N}^n - \exp^c I,$$

puisque $\exp I$ est un E-ensemble. L'inégalité est alors une conséquence immédiate du fait que (II.7.1)

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s &= \sharp\{\alpha\ ,\ \alpha\in\mathbf{N}^n\ ,\ |\alpha| = s\ ,\ \alpha\notin\exp I\}\\ \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/{}^cI_s &= \sharp\{\alpha\ ,\ \alpha\in\mathbf{N}^n\ ,\ |\alpha| = s\ ,\ \alpha\notin\exp{}^cI\}.\end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que *ii*) $\Rightarrow$ *i*). Montrons d'abord que X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1,\dots,X_n]/I$; $\forall s\in\mathbf{N}$, $s\ge 1$, nous avons les suites exactes de $(k-ev)$:

$$k[X_1,\dots,X_n]_{s-1}/I_{s-1}\xrightarrow{X_n} k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s\xrightarrow{\phi} k[X_1,\dots,X_n]_s/(I+X_n)_s\to 0$$

$$0 \to k[X_1,\dots,X_n]_{s-1}/{}^cI_{s-1} \xrightarrow{X_n} k[X_1,\dots,X_n]_s/{}^cI_s \longrightarrow \dots$$
$$\dots \to k[X_1,\dots,X_n]_s/({}^cI + X_n)_s \to 0.$$

Soit $N_s = \ker\phi$. On a $\mathrm{rg}_k N_s \leq \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_{s-1}/I_{s-1} = H(s-1)$. D'autre part, soit $\theta' : k[X_1,\dots,X_n] \to k[X_1,\dots,X_{n-1}]$ tel que $\theta'(X_i) = X_i$, $i=1\dots n-1$, $\theta'(X_n) = 0$. $k[X_1,\dots,X_n]/I + X_n \simeq k[X_1,\dots,X_{n-1}]/\theta'(I)$; les variables $X_1,\dots,X_{n-1}$ sont commodes pour $\theta'(I)$ (II.5.7). Enfin $k[X_1,\dots,X_n]/{}^cI + X_n \simeq k[X_1,\dots,X_{n-1}]/{}^c\theta'(I)$. Le lemme 4.5.2 appliqué à $\theta'(I)$ nous dit que :

$$\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/(I + X_n)_s \leq \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/({}^cI + X_n)_s.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}_k N_s = {} & \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s - \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/(I + X_n)_s \geq \\ & \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/{}^cI_s - \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/({}^cI + X_n)_s = \\ & \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_{s-1}/{}^cI_{s-1} = \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_{s-1}/I_{s-1} = H(s-1) \\ & \geq \mathrm{rg}_k N_s.\end{aligned}$$

Les inégalités précédentes sont donc toutes des égalités. En particulier $\mathrm{rg}_k N_s = H(s-1)$ et la surjection canonique de $k[X_1,\dots,X_n]_{s-1}/I_{s-1}$ sur N_s est donc un isomorphisme, ce qui implique que X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1,\dots,X_n]/I$. Egalement $\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/(I + X_n)_s = \mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/({}^cI+X_n)_s$. $\theta'(I)$ satisfait donc la condition ii). Par hypothèse de récurrence sur le nombre des variables, on peut donc supposer que $k[X_1,\dots,X_{n-1}]/\theta'(I)$ est Cohen-Macaulay et (4.4) $X_{n-1},\dots,X_{r+1}$ est une suite régulière de $k[X_1,\dots,X_{n-1}]/\theta'(I)$. $X_n,\dots,X_{r+1}$ est donc une suite régulière de $k[X_1,\dots,X_n]/I$.

4.6. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses de 4.1, si $k[X_1,\dots,X_n]/I$ est Cohen-Macaulay et si $P(T) \in \mathbf{Q}[T]$ désigne le polynôme de Hilbert de $k[X_1,\dots,X_n]/I$,*

$$\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s = P(s) \quad si \quad s \geq d_1 + \dots + d_r - n + 1 \; .$$

i.e. l'indice de régularité de $k[X_1,\dots,X_n]/I$ est au plus $d_1 + \dots + d_r - n + 1$.

Si $r < n$ et si $\dfrac{d}{(n-r-1)!}T^{n-r-1}$ est le terme dominant de $P(T)$, $d \leq d_1 \dots d_r$.

Si $r = n$, $\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]/I \leq d_1 \dots d_n$.

Démonstration. — Quitte à effectuer un changement de variables linéaire, on peut supposer que les variables $X_1,\dots,X_n$ sont commodes pour I et d'après 4.5, $\forall s \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_n]_s/I_s = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp\theta(I) \\ |\alpha| \leq s}} \binom{n-r+s-|\alpha|-1}{n-r-1}.$$

Les variables $X_1,\dots,X_n$ étant commodes pour I, $\dim V(\theta(I)) = 0$ et $\mathrm{rg}_k k[X_1,\dots,X_r]/\theta(I) = \sharp\mathbf{N}^r - \exp\theta(I) < +\infty$. On a $\theta(I) = (\theta(f_1),\dots,\theta(f_s))$.

Ou bien $\theta(f_i) = 0$, ou bien $\theta(f_i)$ est homogène de degré d_i. Appliquant 4.1 à $\theta(I)$, on détermine $g_1, \ldots, g_r$ une suite régulière de $k[X_1, \ldots, X_r]$ formée de polynômes homogènes telle que $J = (g_1, \ldots, g_r) \subset \theta(I)$ et si $\delta_i = \deg g_i$, $\delta_1, \ldots, \delta_r$ est la suite des degrés des r premiers termes non nuls de la suite $\theta(f_1), \ldots, \theta(f_s)$. En particulier $\delta_i \leq d_i$, $i = 1 \ldots r$. Il résulte alors de 3.2 que si $|\alpha| \geq d_1 + \cdots + d_r - r + 1 \geq \delta_1 + \cdots + \delta_r - r + 1$, $X_1^{\alpha_1} \ldots X_r^{\alpha_r} \in J \subset \theta(I)$ et que

$$\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_r]/\theta(I) \leq \mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_r]/J = \delta_1 \ldots \delta_r \leq d_1 \ldots d_r.$$

En particulier, $\sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \leq d_1 \ldots d_r$ et si $\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$, $|\alpha| \leq d_1 + \cdots + d_r - r$.

Si donc $s \geq d_1 + \cdots + d_r - r$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$, $s \geq |\alpha|$ et

$$\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]_s/I_s = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)} \binom{n - r + |s| - \alpha - 1}{n - r - 1}.$$

Comme en 3.2, soit $R(T) = \dfrac{(n - r - 1 + T) \ldots (1 + T)}{(n - r - 1)!}$; alors

$$P(T) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)} R(T - |\alpha|).$$

Le terme dominant de $P(T)$ est alors $\sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \dfrac{T^{n-r-1}}{(n - r - 1)!}$ si $r < n$.

Considérons maintenant s , $d_1 + \cdots + d_r - n + 1 \leq s < d_1 + \cdots + d_r - r$ (un tel s n'existe que si $n > r + 1$).

On a d'une part $P(s) = \sum\limits_{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)} R(s - |\alpha|)$ et d'autre part :

$$\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]_s/I_s = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \\ |\alpha| \leq s}} R(s - |\alpha|).$$

Il suffit donc de constater que si $\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$, $s < |\alpha|$ et $d_1 + \cdots + d_r - n + 1 \leq s < d_1 + \cdots + d_r - r$, $R(s - |\alpha|) = 0$. Or R de degré $n - r - 1$ admet comme racines $-1, -2, \ldots, -(n - r - 1)$, et si $\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$, nous avons vu que $|\alpha| \leq d_1 + \cdots + d_r - r$. Au total nous avons donc :

$$d_1 + \cdots + d_r - n + 1 \leq s < |\alpha| \leq d_1 + \cdots + d_r - r.$$

Ainsi $s - |\alpha|$ ne peut varier que de -1 à $d_1 + \cdots + d_r - n + 1 - (d_1 + \cdots + d_r - r) = -(n - r - 1)$.

Dans le cas $n = r + 1$, $P(T) = \sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$. On a bien $\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]_s/I_s = \sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$ si $s \geq d_1 + \cdots + d_r - r = d_1 + \cdots + d_r - n + 1$.

Dans le cas $r = n$, $\theta(I) = I$, $P(T) = 0$; on a vu que si $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \geq d_1 + \cdots + d_n - n + 1$, $X^\alpha \in I$ et que $\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I \leq d_1 \ldots d_n$.

4.6.1. REMARQUE. — Les hypothèses et notations étant celles de 4.6, si $f_1, \ldots, f_s$ est un système de générateurs minimal de I, $\theta(f_i) \neq 0$, $i = 1 \ldots s$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe i , $1 \leq i \leq s$ tel que $\theta(f_i) = 0$. Alors il existe $f'_{r+1}, \ldots, f'_n \in k[X_1, \ldots, X_n]$ homogènes de degré $d_i - 1$ tels que $f_i = X_{r+1}f'_{r+1} + \cdots + X_n f'_n$. Mais $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ étant un $k[X_{r+1}, \ldots, X_n]$-module libre, $f'_{r+1}, \ldots, f'_n \in I$. Puisque $d_1 \geq \ldots \geq d_s$ on a donc $f'_j \in (f_{i+1}, \ldots, f_s)$, $j = r+1, \ldots, n$ et $f_i \in (f_{i+1}, \ldots, f_s)$ contrairement à l'hypothèse.

4.7. REMARQUE. — Sous les hypothèses de 4.1, si $r = n$ et si $\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I = d_1 \ldots d_n$ ou si $r < n$ et si $\dfrac{d_1 \ldots d_r}{(n-r-1)!} T^{n-r-1}$ est le terme dominant du polynôme de Hilbert de $k[X_1, \ldots, X_n]/I$, alors il existe $g_1, \ldots, g_r$ des polynômes homogènes de $k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $\deg g_i = d_i$, $i = 1 \ldots, r$, et $I = (g_1, \ldots, g_r)$.

Démonstration. — Supposons d'abord $r = n$. Soit $g_1, \ldots, g_n$ des polynômes vérifiant les conditions 1), 2), 3) de 4.1. Puisque $J = (g_1, \ldots, g_n) \subset I$,

$$k[X_1, \ldots, X_n]/J \to k[X_1, \ldots, X_n]/I$$

est surjectif. Or d'après 3.2, $\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/J = d_1 \ldots d_n$. Donc $J = I$. Si maintenant $r < n$, considérons encore $g_1, \ldots, g_r$ des polynômes vérifiant 1), 2), 3) de 4.1 et soit $J = (g_1, \ldots, g_r)$. En effectuant au besoin un changement de variables linéaire, on peut supposer que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont commodes pour J. D'après II.6.5.0, elles seront également commodes pour I.

Montrons d'abord que $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay. Munissons $\mathbf{N}^n$ de l'ordre lexicographique inverse. D'après II.7.1, nous pouvons calculer le polynôme de Hilbert $P(T)$ de $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ à partir de $\exp I$ et d'après II.5.5 et un calcul fait dans la démonstration de II.7.4, si $p : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}^r$ désigne la projection de $\mathbf{N}^n$ sur les r premiers facteurs $\dfrac{\sharp \mathbf{N}^r - p(\exp I)}{(n-r-1)!} T^{n-r-1}$ est le terme dominant de $P(T)$. Soit θ comme en 4.5. De 4.5.1, il résulte que $\mathbf{N}^r - p(\exp I) \subset \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$. Par ailleurs $\theta(J) \subset \theta(I)$ et $\mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \subset \mathbf{N}^r - \exp \theta(J)$. Mais $g_1, \ldots, g_r$ étant une suite régulière vérifie les hypothèses de 3.1. De plus, les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant commodes pour J , $\sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(J) = d_1 \ldots d_r$. (3.4). D'où

$$d_1 \ldots d_r = \sharp \mathbf{N}^r - p(\exp I) \leq \sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \leq \sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(J) = d_1 \ldots d_r \ .$$

On en déduit : $\mathbf{N}^r - p(\exp I) = \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) = \mathbf{N}^r - \exp \theta(J)$. La première égalité entraîne que $\exp I = \exp \theta(I) \times \mathbf{N}^{n-r} = \exp {}^c I$ où ${}^c I$ est l'idéal engendré par $\theta(I)$ dans $k[X_1, \ldots, X_n]$. D'après II.7.1, la condition ii) de 4.5 est donc satisfaite et $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay (4.5). Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant commodes pour I , $X_n, \ldots, X_{r+1}$ est une suite régulière de $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ (4.4) et $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ est un $k[X_{r+1}, \ldots, X_n]$- module libre de type fini (3.4.1. Plus précisément, $(cl\ X_1^{\alpha_1} \ldots X_r^{\alpha_r} \mathrm{mod} I)_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)}$ est une base de ce module.

Mais $k[X_1, \ldots, X_n]/J$ est également un $k[X_{r+1}, \ldots, X_n]$-module libre de type fini dont les $(cl\ X_1^{\alpha_1} \ldots X_r^{\alpha_r} \mathrm{mod} J)_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(J)}$ forment une base (3.4, 3.4.1). La surjection canonique $k[X_1, \ldots, X_n]/J \to k[X_1, \ldots, X_n]/I$ envoyant une base du 1^{er} $k[X_{r+1}, \ldots, X_n]$- module sur le 2e est donc aussi injective et $J = I$.

4.8. PROPOSITION. — *Les hypothèses et notations étant celles de 4.1, si* $k[X_1, \ldots, X_n]/I$ *est Cohen-Macaulay, si les variables* $X_1, \ldots, X_n$ *sont commodes pour* I *et si* $f'_1, \ldots, f'_t$ *est une base standard de cardinal minimal* I *pour l'ordre lexicographique inverse* $\deg f'_i \leq d_1 + \cdots + d_r - r + 1$, $i = 1 \ldots t$.

Démonstration. — Elle est identique à celle de 3.5.

4.8.1. PROPOSITION. — *Les hypothèses et notations étant celles de 4.1 et si* $r = n$, *si* $f'_1, \ldots, f'_t$ *est une base standard de cardinal minimal pour un ordre total sur* $\mathbf{N}^n$ *vérifiant I.1.1,* $\deg f'_i \leq d_1 + \cdots + d_n - n + 1$, $i = 1 \ldots t$.

Démonstration. — Soit J comme dans 4.1; si $|\alpha| \geq d_1 + \cdots + d_n - n + 1$, $X^\alpha \in J \subset I$. La démonstration est ensuite identique à celle de 3.5.1.