Cours de l'institut Fourier

Monique Lejeune-Jalabert

Notations et terminologie

Cours de l'institut Fourier, tome 19 (1984-1985), p. 15-18
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1984-1985__19__15_0>

NOTATIONS ET TERMINOLOGIE

N est l'ensemble des entiers positifs ou nul.

Z est l'anneau des entiers relatifs. Si p est premier, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps que nous notons $\mathbf{F}_p$.

Q est le corps des nombres rationnels, **R** est le corps des nombres réels.

C est le corps des nombres complexes.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Si E est un ensemble fini, $\sharp E$ désigne le cardinal de cet ensemble.

Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires. Tous les homomorphismes d'anneaux envoient 1 sur 1 . Dans un anneau intègre ou un corps $0 \neq 1$.

Si k est un corps, $k[X_1, \ldots, X_n]$ est l'anneau des polynômes à n indéterminés sur k . Si $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $f \neq 0$, $\deg f$ désigne son degré.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$.

Si A est un anneau et M un$A$-module, on dit que M est un A-module de type fini s'il existe des éléments de M en nombre fini $m_1, \ldots, m_n$ tels que M soit le plus petit sous A-module de M contenant $m_1, \ldots, m_n$. On dit alors que $m_1, \ldots, m_n$ est un système de générateurs de M ou que M est engendré par $m_1, \ldots, m_n$ et on note $M = (m_1, \ldots, m_n)$.

Un idéal de A est un sous A-module de A.

Un idéal I de A est dit principal s'il existe $a \in A$ tel que a soit un système de générateurs de I.

Un idéal premier (resp. maximal) est un idéal $\mathcal{P}$ d'un anneau A tel que $A/\mathcal{P}$ soit intègre (resp. un corps). Ainsi l'anneau lui-même ne doit pas être considéré comme un idéal premier ou un idéal maximal.

Si k est un corps et A une k-algèbre, on dit que A est une k-algèbre de type fini s'il existe des éléments de A en nombre fini $a_1, \ldots, a_n$ tels que A soit la plus petite sous k- algèbre de A contenant $a_1, \ldots, a_n$.

Un anneau gradué est la donnée d'un anneau A et d'une famille $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de sous-groupes de A tels que $A = \oplus_{n \in \mathbf{N}} A_n$ et $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$, $\forall n, \forall m \in \mathbf{N}$.

On dit que $f \in A$, $f \neq 0$ est homogène, s'il existe n tel que $f \in A_n$. n est alors appelé le degré de f .

Si k est un corps et si $k[X_1, \ldots, X_n]_s$ désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré $s \cup 0$, $\big(k[X_1, \ldots, X_n], k[X_1, \ldots, X_n]_s \ , \ s \in \mathbf{N}\big)$ est un anneau gradué.

Si $(A, A_n \ , \ n \in \mathbf{N})$ est un anneau gradué, H un idéal de A est appelé un idéal homogène si $H = \oplus_{n \in \mathbf{N}} H \cap A_n$.

Il revient au même de dire que H peut être engendré par des éléments homogènes de A ou que $H = (0)$.

k et k' étant deux corps, si k est un sous-corps de k' , on dit que k' est une extension de k .

On dit qu'un corps k est algébriquement clos si tout polynôme de $k[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine dans k .

Si k est un corps et si K est une extension de k , on dit que K est une clôture algébrique de k si K est une extension algébrique de k et si K est algébriquement clos.

Si k est un corps, k possède une clôture algébrique et deux clôtures algébriques de k sont des corps k-isomorphes.

Dans une extension K d'un corps k , un sous-ensemble L de K est dit algébriquement libre (sur k), si, pour tout sous-ensemble fini $x_1, \ldots, x_n$ de L , les monômes $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, sont k- linéairement indépendants.

On dit que L est une base de transcendance de K sur k si L est un sous-ensemble algébriquement libre maximal de K sur k , c'est-à-dire si L n'est pas contenu dans un sous-ensemble algébriquement libre $L' \neq L$.

Deux bases de transcendance de K sur k ont le même cardinal. S'il est fini, on l'appelle le degré de transcendance de K sur k et on le note $\deg \mathrm{tr} K : k$.

Pour que le degré de transcendance de K sur k soit $n \in \mathbf{N}$, il faut et il suffit que K soit k-isomorphe à une extension algébrique du corps des fonctions rationnelles $k(X_1, \ldots, X_n)$.