MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Appendice II Le théorème de Bézout

Cours de l'institut Fourier, tome 19 (1984-1985), p. 129-136

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1984-1985__19__129_0>

Appendice II

LE THÉORÈME DE BEZOUT

Nous supposons ici que k est un *corps algébriquement clos* . Soit I un idéal homogène de $k[X_0,\ldots,X_n]$ tel que $X = V(I) - \{0\}/\sim$ soit un ensemble fini de points $P_1,\ldots,P_s$ de $\mathbf{P}^n$. A chaque P_i, nous allons associer un entier strictement positif e_{P_i} que nous appellerons *l'ordre de multiplicité* de X en P_i , $i = 1\cdots s$.

Nous devons pour ce faire introduire la notion de localisation.

1. DÉFINITION. — *On dit qu'un anneau (commutatif et unitaire) A est local si A possède un unique idéal maximal M . A/M est appelé le corps résiduel de A.*

2. DÉFINITION. — *Soit A un anneau et $\mathcal{P}$ un idéal premier de A. $A_{\mathcal{P}} = \{\frac{f}{g}; f,g \in A; g \notin \mathcal{P}$ modulo la relation d'équivalence $\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}$ si $\exists g'' \notin \mathcal{P}, g''(fg'-gf') = 0\}$. $A_{\mathcal{P}}$ est un anneau local dont l'idéal maximal est $\mathcal{P}\cdot A_{\mathcal{P}}$ et le corps résiduel $\kappa(\mathcal{P})$ est le corps des fractions de $A/\mathcal{P}$.*

3. DÉFINITION. — *Soit A un anneau gradué et $\mathcal{P}$ un idéal premier de A engendré par des éléments homogènes ne contenant pas $\oplus_{s\geq 1}A_s$. $A_{(\mathcal{P})} = \{\frac{f}{g}, f$ et g homogènes de même degré dans A, $g \notin \mathcal{P}$ modulo la relation d'équivalence $\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'}$, si $\exists g'' \notin \mathcal{P}$ homogène $g''(fg'-gf') = 0\}$.*

4. LEMME. — *Soit I un idéal homogène de $k[X_0,\ldots,X_n]$. Si $x = (x_0,\ldots,x_n) \in V(I)$ et si $x_0 \neq 0$, désignant par $\mathcal{P}$ l'idéal homogène de $k[X_0,\ldots,X_n]$ des polynômes qui s'annulent sur la droite l_x de $\mathbf{A}^{n+1}$ passant par 0 et x , on a un isomorphisme canonique entre $k[X_0,\ldots,X_n]/I_{(\mathcal{P}/I)}$ et $k[X_1,\ldots,X_n]/I_{0\,\mathcal{P}_0/I_0}$ (où I_0 (resp $\mathcal{P}_0$) comme dans l'appendice I.déf.5 est l'idéal de $k[X_1,\ldots,X_n]$ formé des $h(1,X_1,\ldots,X_n)$, h homogène dans I (resp $\mathcal{P}$)).*

Démonstration. — Soit $\Psi_0 : k[X_0,\ldots,X_n] \to k[X_1,\ldots,X_n]$ le morphisme de k-algèbres tel que $\Psi_0(X_0) = 1$, $\Psi_0(X_i) = X_i$, $i = 1\cdots n$. Ψ_0 induit $\overline{\Psi}_0 : k[X_0,\ldots,X_n]/I \to k[X_1,\ldots,X_n]/I_0$ par définition de I_0.

Si g est homogène et n'appartient pas à $\mathcal{P}$, $\overline{\Psi}_0(g \bmod I) \notin \mathcal{P}_0/I_0$. En effet, autrement il existerait h homogène dans $\mathcal{P}$ et $h' \in k[X_0,\ldots,X_n]$ tels que $g = h + (X_0-1)h'$. Or $x' = (1,\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}) \in l_x$. Donc $h(x') = 0$ et $g(x') = 0$.

Mais g étant homogène, $g(y) = 0$, $\forall y \in l_x$ et $g \in \mathcal{P}$. Il en résulte que $\overline{\Psi}_0$ induit une application

$$\Psi_x : k[X_0, \ldots, X_n]/I_{(\mathcal{P}/I)} \to k[X_1, \ldots, X_n]/I_{0\mathcal{P}_0/I_0}.$$

Cette application est injective. Si $\Psi_x(\frac{f}{g}) = 0$, il existe $h \notin \mathcal{P}_0/I_0$ tel que $h\overline{\Psi}_0(f) = 0$. Notons encore pour simplifier h un représentant de h, $\notin \mathcal{P}_0$. Soit $d = \deg h$ et soit $H = {}^h h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ (App. I.12). Puisque $H(1, X_1, \ldots, X_n) = h$, $H \notin \mathcal{P}$ et si F est un polynôme homogène de degré d' dont la classe $\bmod I$ est f, il existe $H' \in k[X_0, \ldots, X_n]$ et $G \in I$ tels que $HF = (X_0 - 1)H' + G$. On a $H' = \sum_{i=0\cdots\delta} H'_i$, $G = \sum_{i\in\mathbf{N}} G_i$ où H'_i (resp G_i) est homogène de degré i , $i \in \mathbf{N}$, ou nul. Identifiant les termes de même degré dans cette égalité, il vient

$$\begin{aligned}
&H'_0 = G_0 \in I \text{ puisque } I \text{ est un idéal homogène,}\\
&H'_1 = X_0H'_0 + G_1 \in I, \ldots, H'_{d+d'-1} = X_0H'_{d+d'-2} + G_{d+d'-1} \in I,\\
&H \cdot F = X_0H'_{d+d'-1} - H'_{d+d'} + G_{d+d'}, X_0H'_{d+d'} = H'_{d+d'+1} - G_{d+d'+1} \cdots\\
&\qquad \cdots X_0H'_{\delta-1} = H'_\delta - G_\delta, X_0H'_\delta = -G_{\delta+1}, G_i = 0, i \geq \delta + 2.
\end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbf{N}$ tel que $X_0^\alpha H'_{d+d'} \in I$ et $X_0^\alpha HF \in I$. Or $X_0 \notin \mathcal{P}$, $H \notin \mathcal{P}$; par définition $\dfrac{f}{g} \sim \dfrac{0}{1}$ et $\dfrac{f}{g} = 0$. Enfin, cette application est surjective. Si $f \in k[X_1, \ldots, X_n]/I_0$, on construit comme en App.I.12, $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène tel que $F(1, X_1, \ldots, X_n) \bmod I_0 = f$. Si $f \notin \mathcal{P}_0/I_0$, $F \bmod I \notin \mathcal{P}/I$. Enfin, on ajuste les degrés en multipliant soit au numérateur soit au dénominateur par une puissance convenable de $\mathrm{cl}\, X_0 \bmod I \notin \mathcal{P}/I$.

5. Lemme. — *Soit k un corps algébriquement clos, J un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/J < \infty$. Soit $J = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ une décomposition primaire irrédondante de J . On a un isomorphisme canonique entre $k[X_1, \ldots, X_n]/J_{\sqrt{Q_i}/J}$ et $k[X_1, \ldots, X_n]/Q_i$, $i = 1 \cdots s$.*

Démonstration. — Nous allons d'abord construire un morphisme

$$\mu_i : k[X_1, \ldots, X_n]/J_{\sqrt{Q_i}/J} \to k[X_1, \ldots, X_n]/Q_i.$$

Puisque $J \subset Q_i$, nous avons tout d'abord un morphisme $k[X_1, \ldots, X_n]/J \to k[X_1, \ldots, X_n]/Q_i$. Soit $x^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i) \in k^n$ tel que $\sqrt{Q_i} = (X_1 - x_1^i, \ldots, X_n - x_n^i)$. Il existe N tel que si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geq N$, $(X_1 - x_1^i)^{\alpha_1} \cdots (X_n - x_n^i)^{\alpha_n} \in Q_i$. Si donc $G \notin \sqrt{Q_i}$, autrement dit si $G(x^i) \neq 0$, $\mathrm{cl}\, G \bmod Q_i = G(x^i) + \sum_{|\alpha|<N} C_\alpha (X - x^i)^\alpha \bmod Q_i$ est inversible dans $k[X_1, \ldots, X_n]/Q_i$. Si $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$, on posera donc $\mu_i\left(\frac{\mathrm{cl}\, F \bmod J}{\mathrm{cl}\, G \bmod J}\right) = \mathrm{cl}\, F \bmod Q_i \cdot (\mathrm{cl}\, G \bmod Q_i)^{-1}$. On vérifie que cette définition est compatible avec la relation d'équivalence.

μ_i est évidemment surjective. Montrons qu'elle est aussi injective. Si $\mu_i\left(\frac{\mathrm{cl}\, F \bmod J}{\mathrm{cl}\, G \bmod J}\right) = 0$ avec $G \notin \sqrt{Q_i}$, on a $F \in Q_i$. Pour voir que $\frac{\mathrm{cl}\, F \bmod J}{\mathrm{cl}\, G \bmod J} = 0$, il faut montrer qu'il existe $G' \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $G'(x^i) \neq 0$ et $G'F \in J$. Or la décomposition primaire $J = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ étant irrédondante (III.1.9), si $\sqrt{Q_j} = (X_1 - x_i^j, \ldots, X_n - x_n^j)$ on a $x^j = (x_1^j, \ldots, x_n^j) \neq x^i$ si $j \neq i$. Il existe donc

$\tau(j) \in 1\cdots n$ tel que $x^j_{\tau(j)} \neq x^i_{\tau(j)}$ et $\alpha_j \in \mathbf{N}$ tel que $\left(X_{\tau(j)} - x^j_{\tau(j)}\right)^{\alpha_j} \in Q_j$ si $j \neq i$. Soit $G' = \prod_{j \neq i}\left(X_{\tau(j)} - x^j_{\tau(j)}\right)^{\alpha_j}$, $G'(x^i) \neq 0$ et $G'F = \cap Q_i = J$.

6. LEMME. — *Sous les hypothèses du lemme 5, l'application canonique*

$$k[X_1,\ldots,X_n]/J \to \bigoplus_{i=1\cdots s} k[X_1,\ldots,X_n]/Q_i$$

qui à $\mathrm{cl}\, F \bmod J$ *fait correspondre* $\sum_{i=1\cdots s} \mathrm{cl}\, F \bmod Q_i$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Cette application est clairement injective. Nous allons montrer qu'elle est surjective par récurrence sur s .

Si $s = 1$, c'est évident. Supposons l'assertion vraie pour $s-1$ et soit $f_1,\ldots,f_s \in k[X_1,\ldots,X_n]$. Il s'agit de déterminer $f \in k[X_1,\ldots,X_n]$ tel que $f - f_i \in Q_i$, $i = 1\cdots s$. Par hypothèse de récurrence, il existe $f' \in k[X_1,\ldots,X_n]$ tel que $f' - f_i \in Q_i$, $i = 1\cdots s-1$.

Or $x^s \neq x^i$, $i = 1\cdots s{-}1$. On a donc $V(Q_s + Q_i) = V(Q_s) \cap V(Q_i) = x^s \cap x^i = \emptyset$. D'après II.4.3, $1 \in Q_s + Q_i$. Il existe donc $g_i \in Q_i$, $g^i_s \in Q_s$, $i = 1\cdots s-1$, tel que $1 = g_i + g^i_s$ et $1 = \prod_{i=1\cdots s-1}(g_i + g^i_s)$. Il existe donc $h \in Q_s$ tel que $1 = g_1\cdots g_{s-1} + h$.

Soit $f = f' + (f_s - f')g_1\cdots g_{s-1}$, $f - f_i = (f' - f_i) + (f_s - f')g_1\cdots g_{s-1} \in Q_i$ si $i = 1\cdots s-1$. $f - f_s = (f' - f_s)(1 - g_1\cdots g_{s-1}) = (f' - f_s)h \in Q_s$.

Revenant à la situation considérée au début, nous sommes maintenant en mesure de définir e_{P_i} , $i = 1\cdots s$. Soit $x^i = (x^i_0,\ldots,x^i_n) \in k^{n+1} - \{0\}$ un représentant de P_i et soit $\mathcal{P}^i$ l'idéal homogène de $k[X_0,\ldots,X_n]$ des polynômes qui s'annulent sur la droite l_{x^i} de k^{n+1} passant par 0 et x^i. Nous allons voir que $k[X_0,\ldots,X_n]/I_{(\mathcal{P}^i/I)}$ est un k-espace vectoriel de rang fini sur k .

Considérons x^i . Il existe j , $1 \leq j \leq n$ (dépendant de i) tel que $x^i_j \neq 0$. Supposons pour fixer les idées que $j = 0$ convient. En changeant au besoin la numérotation des $\mathcal{P}_i$, on peut supposer que $x^k_0 \neq 0$, $k = 1\cdots s'$ où $1 \leq s' \leq s$. Avec les notations de l'appendice I, on a

$$V(I_0) = \phi_0^{-1}\left(V(I) - \{0\} \sim \cap Z_0\right) = \bigcup_{k=1\cdots s'} \left(\frac{x^k_1}{x^k_0},\ldots,\frac{x^k_n}{x^k_0}\right).$$

Puisque c'est un ensemble fini non vide, $1 \leq \mathrm{rg}_k k[X_1,\ldots,X_n]/I_0 < \infty$ (II.6.5.7) et I_0 possède une décomposition primaire irrédondante $I_0 = Q_1 \cap \cdots \cap Q_{s'}$ où $\sqrt{Q_k} = \left(X_1 - \frac{x^k_1}{x^k_0},\ldots,X_n - \frac{x^k_n}{x^k_0}\right) = \mathcal{P}^k_0$, $k = 1\cdots s'$. Or

$$\begin{aligned} k[X_0,\ldots,X_n]/I_{(\mathcal{P}^k/I)} &\simeq k[X_1,\ldots,X_n]/I_{0\mathcal{P}^k_0/I_0} \simeq k[X_1,\ldots,X_n]/I_{0\sqrt{Q_k}/I_0} \\ &\simeq k[X_1,\ldots,X_n]/Q_k \end{aligned}$$

qui est un quotient de $k[X_1,\ldots,X_n]/I_0$.

7. DÉFINITION. — $e_{P_i} = \mathrm{rg}_k k[X_0,\ldots,X_n]/I_{(\mathcal{P}^i/I)}$, $i = 1\cdots s$.

8. Théorème (Bezout). — *Soit $f_1, \ldots, f_n$ des polynômes homogènes de $k[X_0, \ldots, X_n]$ tous $\neq 0$. Soit $d_i = \deg f_i$, $i = 1 \cdots n$.*

Si $X = V(f_1, \ldots, f_n) - \{0\}/\sim$ est un ensemble fini de points $P_1, \ldots, P_s$ de $\mathbf{P}^n$,

$$\sum_{i=1\cdots s} e_{P_i} = d_1 \cdots d_n \ .$$

Démonstration. — k algébriquement clos étant infini, il existe un hyperplan H de k^{n+1} tel que $P_i \notin H - \{0\}/\sim$, $i = 1 \cdots s$. Quitte à effectuer un changement de variables linéaire, on peut supposer que $H = V(X_0)$ de sorte que si $x^i = (x_0^i, \ldots, x_n^i) \in k^{n+1} - \{0\}$ est un représentant de P_i , $x_0^i \neq$, $i = 1 \cdots s$.

Soit $I = (f_1, \ldots, f_n)$. Reprenant l'analyse ci-dessus, on a donc ici $s' = s$ et

$$\sum_{i=1\cdots s} e_{P_i} = \sum_{i=1\cdots s} \operatorname{rg} k[X_1, \ldots, X_n]/Q_i = \operatorname{rg}_k [X_1, \ldots, X_n]/I_0$$

(d'après le lemme 6).

D'autre part, ceci entraîne que $V(f_1, \ldots, f_n, X_0) = \{0\}$; $(f_1, \ldots, f_n; X_0)$ satisfait donc dans $k[X_0, \ldots, X_n]$ les hypothèses de III.3.1 et d'après III.3.2, $d_1 \cdots d_n = \operatorname{rg}_k k[X_0, \ldots, X_n]/I + X_0$.

Il s'agit donc de montrer que

$$\operatorname{rg}_k k[X_0, \ldots, X_n]/I + X_0 = \operatorname{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I_0.$$

Soit $\theta_{x_0} : k[X_0, \ldots, X_n] \to k[X_1, \ldots, X_n]$, $x_0 \in k$, le morphisme tel que $\theta_{x_0}(X_0) = x_0$, $\theta_{x_0}(X_i) = X_i$, $i = 1 \cdots n$ et soit $I(x_0) = \theta_{x_0}(I)$. Il revient au même de démontrer que :

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I(0) = \operatorname{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I(1).$$

Mais les variables $(X_1, \ldots, X_n, X_0)$ sont commodes pour I . En effet, puisque $V(f_1, \ldots, f_n, X_0) = 0$, $V(I) \cap V(X_0) = 0$ et (II.5.4) $k[X_0, \ldots, X_n]/I$ est une $k[X_0]$-algèbre entière. D'autre part, nous avons remarqué (III.2.2) que $\dim V(f_1, \ldots, f_n, X_0) = 0$ entraîne $\dim V(I) = 1$, puisque $f_1, \ldots, f_n, X_0$ sont homogènes. Par suite (II.6.5.0), $k[X_0] \to k[X_0, \ldots, X_n]/I$ est injective. I satisfaisant également les hypothèses de III.3.1, $k[X_0, \ldots, X_n]/I$ est un $k[X_0]$ -module libre (III.3.4.1). Plus précisément, si on munit $\mathbf{N}^n$ de l'ordre lexicographique inverse les $(\operatorname{cl} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \operatorname{mod} I)_{\alpha \notin \mathbf{N}^n - \exp I(0)}$ forment une base du $k[X_0]$- module $k[X_1, \ldots, X_n, X_0]/I$ et $\operatorname{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I(0) = \sharp \mathbf{N}^n - \exp I(0)$. On vérifie facilement que $\left(\operatorname{cl} X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \operatorname{mod} I(1)\right)_{\alpha \notin \mathbf{N}^n - \exp I(0)}$ forment également une base de $k[X_1, \ldots, X_n]/I(1)$.

9. Proposition. — *Soit $f_1, \ldots, f_s$, $s \geq n$ des polynômes homogènes de $k[X_0, \ldots, X_n]$ tous $\neq 0$. Soit $d_i = \deg f_i$, $i = 1 \cdots s$. On suppose que $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s > 0$. Si $X = V(f_1, \ldots, f_s) - \{0\}/\sim$ est un ensemble fini de points $P_1, \ldots, P_k$ de $\mathbf{P}^n$, $\sum_{i=1\cdots k} e_{P_i} \leq d_1 \cdots d_n$.*

Démonstration. — Comme en 8, on peut supposer que si $x^i = (x_0^i, \ldots, x_n^i) \in k^{n+1} - \{0\}$ est un représentant de P_i, $x_0^i \neq 0$, $i = 1 \cdots k$. Si $I = (f_1, \ldots, f_s)$, on a alors

$$\sum_{i=1\cdots k} e_{P_i} = \operatorname{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I_0.$$

De plus, comme ci-dessus $V(I + X_0) = \{0\}$. Par suite (II.7.8), $\dim V(I) \leq 1$. Mais $\dim V(I) = 0$ est impossible, car $V(I)$ n'est pas un ensemble fini de points dans k^{n+1}. Donc $\dim V(I) = 1$. Le polynôme de Hilbert $P(T)$ de $k[X_0, \ldots, X_n]/I$ se réduit donc à une constante d . Soit $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que si $s \geq N_1$, $\operatorname{rg}_k k[X_0, \ldots, X_n]/I_s = d$. D'autre part soit $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que si $s \geq N_2$, $\operatorname{rg}_k k[X_0, \ldots, X_n]/(I + X_0)_s = 0$. Si $s \geq \sup N_1$, $N_2 - 1$, l'application

$$k[X_0, \ldots, X_n]_s/I_s \xrightarrow{X_0} k[X_0, \ldots, X_n]_{s+1}/I_{s+1}$$

est donc un isomorphisme.

Nous allons voir que si $s \geq \sup N_1$, $N_2 - 1$, l'application canonique $k[X_0, \ldots, X_n]_s/I_s \to k[X_1, \ldots, X_n]/I_0$ (consistant à envoyer X_0 sur 1) est également un isomorphisme.

Cette application est injective. Si $f \in k[X_0, \ldots, X_n]_s$ est tel que $f(1, X_1, \ldots, X_n) \in I_0$, il existe $h \in I$ homogène tel que $f(1, X_1, \ldots, X_n) = h(1, X_1, \ldots, X_n)$. Il en résulte qu'il existe $s' \in \mathbf{N}$ tel que ou bien $f = X_0^{s'} h$ et $f \in I_s$ ou bien $X_0^{s'} f = h \in I_{s+s'}$ et puisque $s \geq \sup N_1, N_2 - 1$, $f \in I_s$.

Cette application est surjective. Soit $h \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Si $\deg h \leq s$, il existe $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogène de degré s tel que $h = f(1, X_1, \ldots, X_n)$. Si $\delta = \deg h > s$, il existe $H \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogène de degré δ tel que $H(1, X_1, \ldots, X_n) = h$. Mais

$$k[X_0, \ldots, X_n]_s/I_s \xrightarrow{X_0^{\delta-s}} k[X_0, \ldots, X_n]_\delta/I_\delta$$

étant surjective, il existe $F \in k[X_0, \ldots, X_n]_s$ tel que $H = X_0^{\delta-s} F \operatorname{mod} I_\delta$. On a donc $h = F(1, X_1, \ldots, X_n) \operatorname{mod} I_0$.

Il s'ensuit que $\operatorname{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I_0 = d$.

Il existe maintenant $g_1, \ldots, g_n \in k[X_0, \ldots, X_n]$ des polynômes homogènes tels que $\deg g_i = d_i, i = 1 \cdots n$, $g_1, \ldots, g_n$ est une suite régulière de $k[X_0, \ldots, X_n]$ et $J = (g_1, \ldots, g_n) \subset I$ (III.4.1). Puisque $\dim V(J) = 1$, le polynôme de Hilbert $Q(T)$ de $k[X_0, \ldots, X_n]/J$ se réduit à une constante (II.7.4.1) qui vaut $d_1 \cdots d_n$ d'après III.3.2. Pour s assez grand $\operatorname{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]_s/J_s = d_1 \cdots d_n$. Puisque $k[X_1, \ldots, X_n]_s/J_s \to k[X_1, \ldots, X_n]/I_s$ est surjectif, $\forall s \in \mathbf{N}$, $d \leq d_1 \cdots d_n$.

10. REMARQUE. — Soit $f_1, \ldots, f_s \in k[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes non nécessairement homogènes et soit $d_i = \deg f_i$. On suppose que $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_s$ que $\dim V(f_1, \ldots, f_s) = 0$ et $\dim V(\operatorname{gr} f_1, \ldots, \operatorname{gr} f_s) \leq 1$.

Si $(f_1', \ldots, f_t')$ est une base standard de cardinal minimal de $I = (f_1, \ldots, f_s)$ pour un ordre total sur $\mathbf{N}^n$ vérifiant I.1.1, $\deg f_i' \leq d_1 \cdots d_n$.

Démonstration. — Soit $H = ({}^hf_1, \ldots, {}^hf_s)$. L'hypothèse signifie que $V(I)$ est un ensemble fini de points $x^1, \ldots, x^t$ de k^n et que $V(\mathrm{gr}\, f_1, \ldots, \mathrm{gr}\, f_s)$ est ou $\{0\}$ ou un ensemble fini de droites $l^1, \ldots, l^{t'}$ passant par 0 dans k^n. $V(H)$ est donc, dans k^{n+1}, la réunion des droites passant par 0 et les points $(1, x^i)$, $i = 1 \cdots t$ de k^{n+1} et des droites $0 \times l^j$, $j = 1 \cdots t'$, de k^{n+1} et $V(H) - \{0\}/\sim$ est un ensemble fini de points de $\mathbf{P}^n$; P_i, $i = 1 \cdots t$, correspondant aux droites de la 1ère sorte, $P'_{i'}$, $i' = 1 \cdots t'$, correspondant aux droites de la 2ème sorte. On a $I = H_0$ et

$$\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I = \sum_{i=1\cdots t} e_{P_i} \leq \sum_{i=1\cdots t} e_{P_i} + \sum_{i'=1\cdots t'} e_{P'_{i'}} \leq d_1 \cdots d_n.$$

Pour tout ordre total sur $\mathbf{N}^n$ vérifiant I.1.1, on a alors

$$\mathrm{rg}_k k[X_1, \ldots, X_n]/I = \sharp \mathbf{N}^n - \exp I \leq d_1 \cdots d_n.$$

Soit $A_1, \ldots, A_u$ l'escalier de $\exp I$. Il s'agit de voir que $|A_i| \leq d_1 \cdots d_n$, $i = 1 \cdots u$. Soit $A_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ est tel que $\gamma_i \leq \alpha_i$, $i = 1 \cdots n$ et $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \notin \exp I$. En effet autrement $A_1, \ldots, \gamma, \ldots, A_n$ serait une autre frontière de cardinal minimal de $\exp I$. En particulier, si $\alpha_j \neq 0$, $(\alpha_1, \ldots, k, \ldots, \alpha_n)$-($k$ à la $j^{\text{ème}}$ place), $0 \leq k \leq \alpha_j - 1$, n'appartient pas à $\exp I$ et ces éléments sont deux à deux distincts. On a donc trouvé $|A_i| = |\alpha| = \sum_j \alpha_j$ éléments de $\mathbf{N}^n - \exp I$. Donc $|A_i| \leq \sharp \mathbf{N}^n - \exp I \leq d_1 \cdots d_n$.

Cette borne peut être atteinte. Si on munit $\mathbf{N}^2$ de l'ordre lexicographique et si $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - 2$, $f_2 = x_1 x_2 - 1$, une base standard de cardinal minimal de $I = (f_1, f_2)$ pour cet ordre est donnée par $f'_1 = x_1 + x_2^3 - 2x_2$, $f'_2 = x_2^4 - 2x_2 + 1$. $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (0, 4)$, $|A_2| = 4$.