MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Appendice I Systèmes et idéaux homogènes et non homogènes

Cours de l'institut Fourier, tome 19 (1984-1985), p. 119-127
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1984-1985__19__119_0>

Appendice I

SYSTÈMES ET IDÉAUX HOMOGÈNES ET NON HOMOGÈNES

Soit k un corps, $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Si H est un idéal homogène de $k[X_0, \ldots, X_n]$ et si $x \in V(H)$, pour tout $\lambda \in \overline{k} - \{0\} = \overline{k}^*$, $\lambda x \in V(H)$. On dit que $V(H)$ *est un cône*.

Sur $\overline{k}^{n+1}$, on introduit la relation d'équivalence : $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x'_0, \ldots, x'_n)$ si il existe $\lambda \in \overline{k}^*$ tel que $x_i = \lambda x'_i$, $i = 0, \ldots, n$.

1. DÉFINITION. — *L'espace projectif à n dimensions sur $\overline{k}$ (noté $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ ou $\mathbf{P}^n$ quand aucune confusion n'est possible) est ensemblistement $\overline{k}^{n+1} - \{0\}/\sim$.*

2. LEMME. — *Soit pour $i = 0 \ldots n$, $\phi_i : \mathbf{A}^n_{\overline{k}} = \overline{k}^n \to \mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ tel que $\phi_i(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) = \mathrm{cl}(x_0, \ldots, 1, \ldots, x_n)$. (La notation $\hat{x}_i$ signifie que x_i a été omis). ϕ_i est injectif, $i = 0 \ldots n$, et si $Z_i = \mathrm{Im}\phi_i$, $\mathbf{P}^n_{\overline{k}} = \cup_{i=0 \ldots n} Z_i$. Si $i \neq j$, $\phi_i^{-1}(Z_i \cap Z_j) = \{(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n) \in \overline{k}^n \ , \ x_j \neq 0\}$.*

3. DÉFINITION. — *La topologie de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ dont les fermés sont les sous-ensembles F tels que $\phi_i^{-1}(F \cap Z_i)$ est un k − (*resp.$\overline{k}$*) sous-ensemble algébrique de $\mathbf{A}^n_{\overline{k}}$, $i = 0 \ldots n$, est appelée la k-topologie de Zariski (*resp. *la topologie de Zariski) de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$. On a $\overline{Z_i} = \mathbf{P}^n_{\overline{k}}$, $i = 0 \ldots n$.*

4. DÉFINITION. — *Soit H un idéal homogène de $k[X_0, \ldots, X_n]$. $\{h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ tel que $\forall i = 0 \ldots n$, $\exists n_i$ (dépendant de h) tel que $X_i^{n_i} h \in H\}$ est un idéal homogène de $k[X_0, \ldots, X_n]$ qu'on appelle le* **saturé de** *H et qu'on note H_{sat}.*

5. DÉFINITION. — *Soit H un idéal homogène de $k[X_0, \ldots, X_n]$. $H_i = \{f \in k[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n]$ tel que $\exists h \in H$ homogène tel que $f = h(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n)\}$ est un idéal de $k[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n]$.*

5.1. REMARQUE . — $V(H_i) = \phi_i^{-1}(V(H) - \{0\}/\sim \cap Z_i)$.

6. PROPOSITION. — *Soit H, H' 2 idéaux homogènes de $k[X_0, \ldots, X_n]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $H_i = H'_i$, $i = 0 \ldots n$;

ii) H *et* H' *ont le même saturé.*

Démonstration. —

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Il suffit de montrer que $H_{\text{sat}} \subset H'_{\text{sat}}$. Soit donc $h \in k[X_0, \ldots, X_n]$ tel que $\forall i = 0 \ldots n$, $\exists n_i$, $X_i^{n_i} h \in H$. On peut supposer h homogène. Il existe donc $h_i \in H$ homogène tel que $X_i^{n_i} h = h_i$, $i = 0 \ldots n$ et $h(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n) = h_i(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n)$ appartient à $H_i = H'_i$. Il existe donc $h'_i \in H'$ homogène, $i = 0 \ldots n$ tel que $h(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n) = h'_i(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n)$, $i = 0 \ldots n$. Considérons l'application $\theta_i : k[X_0, \ldots, X_n] \to k[X_0, \ldots, X_n]$ définie par $\theta_i(X_j) = X_j X_i$, $j \neq i$, $\theta_i(X_i) = X_i$.

$$\begin{aligned}
\theta_i(h) &= h(X_i X_0, \ldots, X_i, \ldots, X_i X_n) &&= X_i^{\deg h} h(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n) \\
\theta_i(h'_i) &= h'_i(X_i X_0, \ldots, X_i, \ldots, X_i X_n) &&= X_i^{\deg h'_i} h'_i(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n).
\end{aligned}$$

Par suite :

$$X_i^{\deg h'_i} \theta_i(h) = X_i^{\deg h} \theta_i(h'_i).$$

Soit $\delta_i = |\deg h'_i - \deg h|$. On en déduit :

ou bien $\theta_i(h) = \theta_i(X_i^{\delta_i} h'_i)$

ou bien $\theta_i(X_i^{\delta_i} h) = \theta_i(h'_i)$.

Considérons maintenant $\mu_i : k[X_0, \ldots, X_n] \to k(X_0, \ldots, X_n)$ l'application définie par $\mu_i(X_j) = \frac{X_j}{X_i}$, $j \neq i$, $\mu_i(X_i) = X_i$. On constate que $\mu_i \circ \theta_i$ est l'injection canonique de $k[X_0, \ldots, X_n]$ dans son corps des fractions. On a donc ou bien $h = X_i^{\delta_i} h'_i$ ou bien $X_i^{\delta_i} h = h'_i$. Dans les 2 cas, il existe n_i entier tel que $X_i^{n_i} h \in H'$, $i = 0 \ldots n$ et $h \in H'_{\text{sat}}$.

ii) $\to$ *i)*. De même ici, il suffit de montrer que $H_i \subset H'_i$, $i = 0 \ldots n$.

Soit donc $f \in k[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n]$ tel que $\exists h \in H$ homogène tel que $f = h(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n)$. Or $h \in H'_{\text{sat}}$. En particulier, il existe $n_i \in \mathbf{N}$ et $h' \in H'$ homogène tel que $X_i^{n_i} h = h'$. $h(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n) = h'(X_0, \ldots, 1, \ldots, X_n)$. Par définition de H'_i , $f \in H'_i$.

7. UN EXEMPLE . — $H = (X^2, XY, XZ)$ n'est pas saturé. En effet, nous allons montrer que $H_{\text{sat}} = (X)$. Soit $H' = (X)$. Montrons d'abord que $H_{\text{sat}} = H'_{\text{sat}}$. On a $H_0 = (1, Y, Z)k[Y, Z] = k[Y, Z] = H'_0$, $H_1 = (X^2, X, XZ)k[X, Z] = (X)k[X, Z] = H'_1$, $H_2 = (X^2, XY, X)k[X, Y] = (X)k[X, Y] = H'_2$.

Montrons que $H' = H'_{\text{sat}}$. Soit $P(X, Y, Z) \in H'_{\text{sat}}$. En particulier, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $Y^{n_1} P \in H'$. $Y^{n_1} P$ étant divisible par X, P l'est aussi et $P \in H'$.

Plus généralement, soit H un idéal homogène de $k[X_0, \ldots, X_n]$ et d un entier ≥ 0. ${}^d H = \oplus_{s \geq d} H_s$ est encore un idéal homogène. H et ${}^d H$ ont même saturé. Puisque ${}^d H \subset H$, ${}^d H_{\text{sat}} \subset H_{\text{sat}}$. Soit $h \in H_{\text{sat}}$. $\forall i = 0 \ldots n$, $X_i^{n_i} h \in H$. H_{sat}

étant homogène, on peut supposer h homogène de degré α. Donc $X_i^{n_i}h \in H_{\alpha+n_i}$ et $X_i^{\beta+n_i}h \in H_{\alpha+\beta+n_i}$. Si donc $\alpha+\beta+n_i \geq d$, $X_i^{\beta+n_i}h \in {}^dH$ et $h \in {}^dH_{\text{sat}}$.

8. PROPOSITION. — *Soit H un idéal homogène $\neq (1)$ de $k[X_0,\dots,X_n]$. Pour que $H = H_{\text{sat}}$, il faut et il suffit que $(X_0,\dots,X_n)$ ne soit pas un idéal premier associé à H.*

Démonstration. — Supposons d'abord que $H = H_{\text{sat}}$ et soit $H = \cap_{i\in I}Q_i$ une décomposition primaire irrédondante de H. Supposons aussi qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $\sqrt{Q_{i_0}} = (X_0,\dots,X_n)$. Alors, $\exists n_i \in \mathbf{N}$, $X_i^{n_i} \in Q_{i_0}$, $i = 0\dots n$ et si $f \in \cap_{j\in I-i_0}Q_j$, $X_i^{n_i}f \in \cap_{i\in I}Q_i = H$. Donc $f \in H_{\text{sat}} = H$. Ainsi $H = \cap_{j\in I-i_0}Q_j$. Mais c'est impossible puisque $H = \cap_{i\in I}Q_i$ était une décomposition primaire irrédondante de H. C'est que $\sqrt{Q_i} \neq (X_0,\dots,X_n)$, $\forall i \in I$.

Réciproquement, supposons que $H = \cap_{i\in I}Q_i$ est une décomposition primaire irrédondante de H telle que $\forall i \in I$, $\sqrt{Q_i} \neq (X_0,\dots,X_n)$. Soit $f \in H_{\text{sat}}$. Alors, $\forall j = 0\dots n$, $\exists n_j$, $X_j^{n_j}f \in H$. En particulier, $\forall i \in I$, $X_j^{n_j}f \in Q_i$. Or Q_i est primaire. Si $f \notin Q_i$, $\exists n'_j$, $X_j^{n'_j} \in Q_i$ et ceci pour tout $j = 0\dots n$. Donc $(X_0,\dots,X_n) \subset \sqrt{Q_i}$. Or $\sqrt{Q_i} \neq (1)$ (sinon $Q_i = (1)$ et la décomposition primaire étant irrédondante $I = \{i\}$ et $H = (1)$). Donc $(X_0,\dots,X_n) = \sqrt{Q_i}$ contrairement à l'hypothèse. C'est que $f \in \cap_{i\in I}Q_i = H$.

8.1. REMARQUE . — En particulier, si $H = \sqrt{H}$ et si $H \neq (X_0,\dots,X_n)$, H est saturé.

Démonstration. — En effet, H possède alors une décomposition primaire irrédondante $H = \cap_{i\in I}\mathcal{P}_i$ où $\mathcal{P}_i$ est premier et homogène. Si il existe $i \in I$ tel que $\mathcal{P}_i = (X_0,\dots,X_n)$, montrons que $I = \{i\}$ et $H = \mathcal{P}_i = (X_0,\dots,X_n)$ contrairement à l'hypothèse. Sinon, soit $j \in I - \{i\}$, $1 \notin \mathcal{P}_j$ car alors $\mathcal{P}_j \supset \mathcal{P}_i$ contrairement à l'hypothèse. Donc $\mathcal{P}_j \subset (X_0,\dots,X_n)$. Mais c'est alors $\mathcal{P}_i$ qui serait superflu.

9. PROPOSITION. — *Soit H un idéal homogène de $k[X_0,\dots,X_n]$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $s \geq N$, $(H_{\text{sat}})_s = H_s$.*

Démonstration. — Si H est saturé, c'est évident. Si H n'est pas saturé, alors $H \neq (1)$. Soit $H = \cap_{i\in I}Q_i$ une décomposition primaire irrédondante de H. D'après 8, il existe $i \in I$ tel que $\sqrt{Q_i} = (X_0,\dots,X_n)$.

Si $I = \{i\}$, $H = Q_i$ et $\sqrt{Q_i} = (X_0,\dots,X_n)$. Or il existe N tel que si g est homogène de degré $s \geq N$, $g \in Q_i$. Ainsi $H_s = k[X_0,\dots,X_n]_s$ si $s \geq N$. Or $1 \in H_{\text{sat}}$, puisque $\forall i = 0\dots n$, $X_i^{n_i} \in Q_i = H$. Donc $H_{\text{sat}} = (1)$.

Si $I \neq \{i\}$, montrons que N convient encore. Soit $f \in (H_{\text{sat}})_s$, $s \geq N$. Puisque f est de degré $s \geq N$, $f \in Q_i$. D'autre part, $\forall k = 0\dots n$, $\exists m_k \in \mathbf{N}$ tel que $X_k^{m_k}f \in H$. En particulier, si $j \in I$, $j \neq i$, $X_k^{m_k}f \in Q_j$. Mais Q_j est primaire. Si $f \notin Q_j$, alors $(X_0,\dots,X_n) \subset \sqrt{Q_j}$. $\sqrt{Q_j} = k[X_0,\dots,X_n]$ est impossible, car $Q_j = k[X_0,\dots,X_n]$ ne peut contenir $Q_i \subset (X_0,\dots,X_n)$ puisque la décomposition est irrédondante. $\sqrt{Q_j} = (X_0,\dots,X_n)$ est également impossible, car $\sqrt{Q_j} \neq \sqrt{Q_i}$ pour la même raison. C'est que $f \in \cap_{j\in I-i}Q_j$. Ainsi $f \in H$.

9.1. COROLLAIRE. — *Soit H, H' 2 idéaux homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\exists N \in \mathbf{N}$, $H_s = H'_s$, $s \geq N$;

ii) *H et H' ont le même saturé.*

Démonstration. —

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Si $d \geq N$, ${}^dH = {}^dH'$ (*cf.* exemple 7). Or H et ${}^dH$ d'une part, H' et ${}^dH'$ d'autre part, ont le même saturé.

ii) $\Rightarrow$ *i)* est une conséquence immédiate de 9.

10. DÉFINITIONS . — $Y \subset \mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ est appelé k-sous-ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ si et seulement si c'est un fermé pour la k-topologie de Zariski de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$. Il revient au même de dire qu'il existe H un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ tel que $Y = V(H) - \{0\}/\sim$. $Y \subset \mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ est appelé k-variété algébrique projective (resp. variété algébrique projective) si c'est un fermé irréductible de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ pour la k-topologie de Zariski (resp. pour la topologie de Zariski).

Si Y est un sous-ensemble de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$, $I_k(Y)$ est l'idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ engendré par les f homogènes de $k[X_0, \dots, X_n]$ tels que $f(x) = 0$, $\forall x \in \overline{k}^{n+1} - \{0\}$ tel que $\pi(x) \in Y$, $\pi : \overline{k}^{n+1} - \{0\} \to \mathbf{P}^n_{\overline{k}}$ étant l'application canonique.

On écrit parfois $I(Y)$ au lieu de $I_{\overline{k}}(Y)$.

Remarquons que $I_k(Y) = \sqrt{I_k(Y)}$ et que $I_k(Y) \neq (X_0, \dots, X_n)$ donc que $I_k(Y)$ est saturé.

Si Y est un $\overline{k}$-sous-ensemble algébrique de $\mathbf{P}^n_{\overline{k}}$, le polynôme de Hilbert de $\overline{k}[X_0, \dots, X_n]/I(Y)$ est par définition le polynôme de Hilbert de Y. Si d est le degré de ce polynôme et $\frac{mT^d}{d!}$ est son terme dominant, m est appelé le *degré* de Y. $P_a(Y) = (-1)^d(P(0) - 1)$ (où $P(T)$ est le polynôme de Hilbert de Y) est traditionnellement appelé le *genre arithmétique* de Y.

11. REMARQUE . — Soit H un idéal homogène de $k[X_0, \dots, X_n]$ et soit $h_1, \dots, h_s$ des éléments homogènes de H qui sont une base standard de H à la fois pour l'ordre diagonal et pour l'ordre lexicographique (*cf.* II.6.1).

$h_1(X_0, \dots, X_{n-1}, 1), \dots, h_s(X_0, \dots, X_{n-1}, 1)$ est une base standard de H_n pour l'ordre lexicographique.

Démonstration. — Soit h un élément homogène quelconque de H. Montrons d'abord que $\mathrm{in}h(X_0, \dots, X_{n-1}, 1) = (\mathrm{in}h)(X_0, \dots, X_{n-1}, 1)$. (Les monômes de $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$ et $k[X_0, \dots, X_n]$ sont ordonnés au moyen de l'ordre lexicographique).

Soit $h = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}, |\alpha| = d} c_\alpha X^\alpha$. Dire que $\mathrm{in}h = c_\gamma X^\gamma$ signifie que $c_\gamma \neq 0$ et que si $c_\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \gamma$, $\gamma > \alpha$ pour l'ordre lexicographique.

Or $h(X_0, \dots, X_{n-1}, 1) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{n+1}, |\alpha| = d} c_\alpha X_0^{\alpha_0} \dots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$. On a toujours

$c_\gamma \neq 0$. Si $\alpha \neq \alpha'$, $|\alpha| = |\alpha'| = d$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq (\alpha'_0, \ldots, \alpha'_{n-1})$. Donc si $\alpha \neq \gamma$ et $c_\alpha \neq 0$, $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$ et $(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) > (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ pour l'ordre lexicographique. Ainsi $\mathrm{in}h(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1) = c_\gamma X_0^{\gamma_0} \ldots X_{n-1}^{\gamma_{n-1}} = (\mathrm{in}h)(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1)$. Maintenant, puisque $h_1, \ldots, h_s$ est une base standard de H pour l'ordre lexicographique, pour tout $h \in H$ homogène, il existe M_i , $i \in (1 \ldots s)$, un monôme tel que $\mathrm{in}h = M_i \mathrm{in}h_i$. Soit enfin $f \in H_n$. Par définition, il existe $h \in H$ homogène tel que $f = h(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{in}f &= \mathrm{in}h(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1) = (\mathrm{in}h)(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1) \\ &= M_i(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1)(\mathrm{in}h_i)(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1) \\ &= M_i(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1)\mathrm{in}h_i(X_0, \ldots, X_{n-1}, 1).\end{aligned}$$

11.1. EXEMPLE. — $H = (X_1^4, X_0^3X_1 - X_2^4)$, $H_2 = (X_1^4, X_0^3X_1 - 1)$. On vérifie que $(X_1^4, X_0^3X_1 - X_2^4, X_1^3X_2^4, X_1^2X_2^8, X_1X_2^{12}, X_2^{16})$ est une base standard de H à la fois pour l'ordre diagonal et pour l'ordre lexicographique.

$$\mathrm{in}I = (X_1^4, X_0^3X_1, X_1^3X_2^4, X_1^2X_2^8, X_1X_2^{12}, X_2^{16}).$$

$$V(\mathrm{in}I) = \{(x_0, x_1, x_2) \in \overline{k}^3 \ , \ x_1 = x_2 = 0\} \ , \ \dim V(I) = 1.$$

Une base standard pour l'ordre lexicographique de I_2 est donc $(X_1^4, X_0^3X_1, X_1^3, X_1^2, X_1, 1)$ et également (1). Donc $I_2 = (1)$ et $V(I_2) = \emptyset$. L'algorithme pour trouver une base standard pour l'ordre lexicographique de I_2 passe par les intermédiaires $X_1^3, X_0^3X_1 - 1, X_1^3, X_1^2, X_1, 1$. Trouver une base standard pour I renseigne donc sur les étapes intermédiaires dans la construction d'une base standard pour l'ordre lexicographique de I_2. (Cet exemple est dû à Mora).

Etant donné un idéal homogène dans un anneau de polynômes à $n+1$ variables, nous venons de voir comment lui associer des idéaux quelconques dans un anneau de polynômes à n variables. Ce procédé est souvent appelé *déshomogénéisation.*

Nous cherchons maintenant étant donné un idéal quelconque d'un anneau de polynômes à n variables à lui associer un idéal homogène d'un anneau de polynômes à $n+1$ variables. C'est l'opération inverse d'*homogénéisation.*

12. DÉFINITIONS. — *Soit $f \in k[X_1, \ldots, X_n] \neq 0$. Si $d = \deg f$ et si $f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0$ où f_i est homogène de degré i , $i = 0, \ldots, d$, on pose ${}^hf = f_d + X_0 f_{d-1} + \cdots + X_0^d f_0$. ${}^hf$ est homogène en $X_0, \ldots, X_n$ de degré d et ${}^hf(0, X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{gr}f$, ${}^hf(1, X_1, \ldots, X_n) = f$. Si I est un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$, on pose ${}^hI = \oplus_{s\in\mathbb{N}}({}^hI)_s$ où $({}^hI)_s = \{X_0^k \ {}^hf, k \in \mathbb{N}, f \in I$ de degré $s - k\}$.*

On vérifie que ${}^hI$ est un idéal homogène de $k[X_0, \ldots, X_n]$, que $I = {}^hI_0$ (au sens de 5.) et par suite que $V({}^hI) \cap V(X_0 - 1) = V(I)$.

13. LEMME. — *X_0 est non diviseur de zéro dans $k[X_0, \ldots, X_n]/{}^hI$.*

Démonstration. — En effet, soit $g \in k[X_0, \dots, X_n]$ tel que $X_0 g \in {}^hI$. ${}^hI$ étant homogène, on peut supposer g homogène $\neq 0$. Il existe alors $k \in \mathbf{N}$ et $f \in I$, $f \neq 0$ tel que $X_0 g = X_0^k \, {}^hf$. Si $k \geq 1$, $g \in {}^hI$, par définition. $k = 0$ est impossible, car ${}^hf$ n'est pas divisible par X_0.

13.1. REMARQUE . — ${}^hI$ est saturé. (8, 13, III.1.14.1).

14. PROPOSITION. — *Soit $I = (f_1, \dots, f_s)$ un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. On suppose $f_i \neq 0$, $i = 1 \dots s$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) ${}^hI = ({}^hf_1, \dots, {}^hf_s)$

ii) $\mathrm{gr}I = (\mathrm{gr}f_1, \dots, \mathrm{gr}f_s)$

iii) X_0 est non diviseur de zéro dans $k[X_0, \dots, X_n]/({}^hf_1, \dots, {}^hf_s)$.

Démonstration. —

i) $\Rightarrow$ *ii)*. Soit $f \in I$, $f \neq 0$. Par hypothèse, il existe $g_i \in k[X_0, \dots, X_n]$ homogènes, $i = 1 \dots s$ tels que ${}^hf = \sum_{i=1\dots s} g_i \, {}^hf_i$. Substituant 0 à X_0 , nous obtenons $\mathrm{gr}f = \sum_i g_i(0, X_1, \dots, X_n)\mathrm{gr}f_i$.

i) $\Rightarrow$ *iii)* à cause de 13.

ii) $\Rightarrow$ *i)*. Soit $g \in I$, $g \neq 0$ de degré d. Par hypothèse, il existe $g_i \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogènes, $i = 1 \dots s$ tels que $\mathrm{gr}g = \sum_{i=1\dots s} g_i \, \mathrm{gr}f_i$.

Il en résulte que ${}^hg - \sum g_i \, {}^hf_i \in {}^hI \cap (X_0)$. Etant homogène de degré d , ce polynôme est de la forme $X_0^{k_1} \, {}^hg_1$ avec $k_1 \geq 1$ et $g_1 \in I$ de degré $d_1 = d - k_1 < d$, s'il n'est pas nul. Ainsi de suite, on détermine $g_{ij} \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogènes, $k_j \geq 1$, $g_j \in I$ de degré $d_j = d_{j-1} - k_j$, $i = 1 \dots s$, $j \geq 1$ tels que : $\mathrm{gr}g_j = \sum_i g_{ij}\mathrm{gr}f_i$, ${}^hg_j - \sum_i g_{ij} \, {}^hf_i = X_0^{k_{j+1}} \, {}^hg_{j+1}$. Ce processus s'arrête puisque la suite $(d_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante.

iii) $\Rightarrow$ *i)*. De façon générale, si $g_1, g_2 \in k[X_1, \dots, X_n]$,

$$X_0^{\deg g_1 + \deg g_2} \, {}^h g_1 + g_2 = X_0^{\deg(g_1+g_2)} \left[X_0^{\deg g_2} \, {}^h g_1 + X_0^{\deg g_1} \, {}^h g_2 \right].$$

et

$${}^hg_1 \, {}^hg_2 = {}^hg_1 g_2.$$

Il en résulte que si $g \in I$, $\exists k \in \mathbf{N}$ tel que $X_0^k \, {}^hg \in ({}^hf_1, \dots, {}^hf_s)$. Mais si X_0 est non diviseur de zéro dans $k[X_0, \dots, X_n]/({}^hf_1, \dots, {}^hf_s)$, ${}^hg \in ({}^hf_1, \dots, {}^hf_s)$ et ${}^hI \subset ({}^hf_1, \dots, {}^hf_s)$.

14.1. REMARQUE . — Soit $\theta_{x_0} : k[X_0, \dots, X_n] \to k[X_1, \dots, X_n]$, $x_0 \in k$, le morphisme tel que $\theta_{x_0}(X_0) = x_0$, $\theta_i(X_j) = X_j$, $j = 1 \dots n$. Notons ${}^hI(x_0) = \theta_{x_0}(I)$. Nous avons : ${}^hI(0) = \mathrm{gr}I$, ${}^hI(1) = I$. Nous avons construit une famille d'idéaux ${}^hI(x_0)$ paramétrée par X_0 "continue" en fonction de X_0 dont la valeur en 0 est $\mathrm{gr}I$ et la valeur en 1 , I. Pour illustrer cette idée de continuité, nous avons déjà remarqué (II.6.5.4) que $\dim V(\mathrm{gr}I) = \dim V(I)$. Elle s'exprime algébriquement par le fait que X_0 étant non diviseur de zéro dans $k[X_0, \dots, X_n]/{}^hI$, $k[X_0, \dots, X_n]/{}^hI$ est un $k[X_0]$-module libre. C'est la déformation au cône des directions asymptotiques.

Remarquons également que à cause de II.7.8.1, la dimension de l'ensemble algébrique $V(^hI)$ de $\mathbf{A}_{\overline{k}}^{n+1}$ est $\dim V(\mathrm{gr}I) + 1$ donc aussi $\dim V(I) + 1$.

En particulier, si $\dim V(I) = 0$ (i.e. si le système n'a qu'un nombre fini de solutions), $V(\mathrm{gr}I) = 0$. La variété projective $Y = V(^hI) - \{0\}/\sim$ est toute entière contenue dans Z_0.

14.2. REMARQUE . — Etant donné $f_1, \ldots, f_s$ des polynômes $\neq 0$ de $k[X_1, \ldots, X_n]$, on considère aussi dans la littérature le système $^hf_1, \ldots, ^hf_s$ appelé *système homogène associé au système* $f_1, \ldots, f_s$.

Comme nous avons vu, cette opération dépend en général du choix de $f_1, \ldots, f_s$ et non de l'idéal I qu'ils engendrent.

Si $H = (^hf_1, \ldots, ^hf_s)$ et si $H(x_0) = \theta_{x_0}(H)$ comme en 14.1, on a bien $H(1) = I$, mais il se peut que $\dim V(H(0)) > \dim V(H(1))$. La famille d'idéaux $H(x_0)$ n'est plus continue en fonction de X_0.

Supposons par exemple que $\dim V(I) = 0$. Dire que $Y = V(H) - \{0\}/\sim$ n'est pas tout entier contenu dans $Z_0(\mathbf{P}_{\overline{k}}^n - Z_0$ étant appelé l'*hyperplan à l'infini* de $\mathbf{P}_{\overline{k}}^n$, cela revient au même de dire que le système homogène $^hf_1, \ldots, ^hf_s$ a des solutions à l'∞) est équivalent à dire qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{k}^n - \{0\}$ tel que $h(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $\forall h \in H(0)$ ou bien encore tel que : $\mathrm{gr}f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1 \ldots s$. Si l est la droite de $\overline{k}^n$ joignant 0 à $(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathrm{gr}f_i(x'_1, \ldots, x'_n) = 0$, $i = 1 \ldots s$, $\forall x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in l$. $V(H(0))$ n'est donc pas un ensemble fini et $\dim V(H(0)) > 0$. C'est ce qui se produit dans l'exemple II.1.5 avec $n = 2$, $s = 2$. On vérifie que : $X_0 \, ^hf_4 = (X_2 - X_1 - 3X_0) \, ^hf_1 + (X_1 + 2X_0) \, ^hf_2$ alors que $^hf_4 \notin (^hf_1, ^hf_2)$. Néanmoins, toujours si $\dim V(I) = 0$ et si $s = n$, si le système homogène $^hf_1, \ldots, ^hf_n$ n'a pas de solutions à l'infini, alors $^hI = (^hf_1, \ldots, ^hf_n)$.

En effet, dans $k[X_0, \ldots, X_n]$ le système $^hf_1, \ldots, ^hf_n, X_0$ ne possède que la solution $(0, \ldots, 0)$. On a donc $\dim V(^hf_1, \ldots, ^hf_n, X_0) = 0$. D'après III.2.2, III.2.4, $^hf_1, \ldots, ^hf_n, X_0$ est donc une suite régulière de $k[X_0, \ldots, X_n]$. En particulier, X_0 est non diviseur de zéro dans $k[X_0, \ldots, X_n]/^hf_1, \ldots, ^hf_n$ et d'après 14, $^hI = (^hf_1, \ldots, ^hf_n)$. Cette propriété ne reste pas vraie si $s > n$, comme le montre l'exemple suivant : $n = 2$. $f_1 = X_1(X_1 + X_2)$, $f_2 = X_2(X_1 + X_2)$, $f_3 = X_1^2 + X_2^2 - 1$, $f_4 = (-1 + X_1 + X_2)(X_1 + X_2)$. On a $V(I)$ fini. Le système $^hf_1, \ldots, ^hf_4$ n'a pas de solutions à l'∞. Néanmoins, $^hI \neq (^hf_1, \ldots, ^hf_4)$ car $X_1 + X_2 \in I$ et $\mathrm{gr}I \neq (\mathrm{gr}f_1, \ldots, \mathrm{gr}f_4) \subset \oplus_{s \geq 2} k[X_1, \ldots, X_n]_s$, puisqu'il contient $X_1 + X_2$.