YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre II Variétés symplectiques

Cours de l'institut Fourier, tome 18 (1982-1983), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1982-1983__18__A2_0>

CHAPITRE II

VARIETES SYMPLECTIQUES

Bibliographie pour le chapitre II :

[A-M] , [G-S] , [D] , [W] , [S] , [B-G] .

1. - RAPPELS SUR LES VARIETES

Les notions suivantes seront utilisées dans le cours :

• variété différentiable de classe C^∞ et de dimension d ; applications différentiables entre variétés ; sous-variétés ; plongements et submersions;

• espace tangent, champ de vecteurs, flot d'un champ de vecteurs, crochet de 2 champs de vecteurs;

• formes différentielles symétriques et antisymétriques. Dans le cas des formes antisymétriques : produit extérieur, produit intérieur. Image réciproque. Dérivée de Lie, formule $\mathcal{L}_V \omega = i(V)d\omega + d(i(V)\omega)$, $\mathcal{L}_V W = [V,W]$, $\mathcal{L}_V(i(W)\alpha) = i(W)\mathcal{L}_V\alpha + i([V,W])\alpha$;

• plus tard, on sera aussi amené à utiliser l'intégration des formes différentielles, la formule de Stokes;

Toutes ces choses sont traitées dans [B-G] , [S] et dans de nombreux traités de géométrie différentielle par exemple : Pham Mau Quam (introduction à la géométrie des variétés différentiables), Lelong-Ferrand (géométrie différentielle), Flanders (Differential forms with applications to the Physical Sciences), etc...

Sujet de réflexion : définition intrinsèque des opérateurs div, grad, rot.

Exercice. Formule pour la dérivée de Lie d'une forme symétrique.

Application : $g = \sum (dx_i)^2$, chercher les $\mathcal{V}$ tels que $\mathcal{L}_V g = 0$ et donner une interprétation du flot de ces champs.

2 . - VARIETES SYMPLECTIQUES

DEFINITION. - Une variété symplectique est la donnée d'un couple (X, ω) où X est une variété C^∞ et ω une 2-forme antisymétrique non dégénérée et fermée sur X .

Remarque 1. - Si on demandait à ω d'être symétrique, on obtiendrait la notion de variété (pseudo) riemannienne.

Remarque 2. - ω non dégénérée signifie $\forall x^\circ \in X$, $\omega(x^\circ) \in \Lambda^2(T_{x^\circ}X)$ est non dégénérée : $(T_{x^\circ}X, \omega(x^\circ))$ est un espace symplectique.

En particulier : la dimension de toute variété symplectique est paire. Toute variété symplectique est munie canoniquement d'une orientation et d'une forme volume $\Omega = \frac{1}{n} \underbrace{\omega\wedge\ldots\wedge\omega}_{n}$ où $2n = d$.

Exemple fondamental. On définit pour $x^\circ \in X$, $T^*_{x^\circ}X = (T_{x^\circ}X)^*$: $T^*_{x^\circ}X$ est l'ensemble des $df(x^\circ)$ où $f \in C^\infty(X;\mathbb{R})$: $T^*X = \bigcup_{x^\circ \in X} T^*_{x^\circ}X$ est muni canoniquement d'une structure de variété différentiable : si (U, φ) est une carte de X , on construit une carte $(\pi^{-1}(U), \Phi)$ de $\pi^{-1}(U)$ où $\pi : T^*X \to X$ est la projection canonique.

$$\Phi^{-1} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

est défini par

$$\Phi^{-1}(x_1, \ldots, x_d, \xi_1, \ldots, \xi_d) = \sum \xi_i dx_i \in T^*_{\varphi(x)}X .$$

Nous appellerons carte "naturelle" de T^*X une telle carte.

Exercice. Ecrire les changements de cartes.

Sur T^*X on définit la 1-forme canonique α de la façon suivante : soit $(x, \lambda) \in T^*X$, c'est-à-dire $x \in X$, $\lambda \in T^*_xX$. Si $v \in T_{(x,\lambda)}(T^*X)$, on pose :

$$\alpha(v) = \lambda(d\pi_{x,\lambda}(v)) .$$

En coordonnées locales $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i$.

PROPOSITION. - <u>La forme</u> $\omega = -d\alpha$ <u>définit sur</u> T^*X <u>une structure symplectique ; on a en coordonnées locales</u> $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$ <u>et</u> $\Omega = dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n$.

En <u>mécanique</u> X s'appelle l'espace des positions et T^*X est l'espace des phases : x est la position, $\lambda \in T^*_x X$ est l'impulsion du système. La notation traditionnelle des mécaniciens est $x = q = (q_1, \ldots, q_n)$; $\xi = p = (p_1, \ldots, p_n)$, $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i = -d(\sum p_i dq_i)$. La notation (x, ξ) est plutôt celle des analystes (cf. travaux de Hörmander sur les opérateurs intégraux de Fourier).

3 . - THEOREME DE DARBOUX.

Comment est faite localement une variété symplectique : la réponse est donnée par le théorème de Darboux :

THEOREME. - <u>Si</u> (X, ω) <u>est symplectique et</u> $x° \in X$ <u>il existe au voisinage de</u> $x°$ <u>des coordonnées locales canoniques</u>, <u>i.e. dans lesquelles</u> ω <u>s'écrit</u> $\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$.

<u>Remarque</u>. - Le même théorème est <u>faux</u> en géométrie riemannienne : une métrique de la forme $ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ (i.e. localement euclidienne) n'a pas de courbure : toute métrique riemannienne ayant de la courbure n'est pas de cette forme.

<u>Preuve</u>. - En adaptant une méthode de J. Moser, A. Weinstein a donné une preuve élégante du théorème de Darboux (cf. [W] 5.1 à 5.3) que nous indiquons : soit ω une structure symplectique dans un voisinage de 0

de $\mathbb{R}^{2n}$. On peut par un changement linéaire symplectique (chap. 1) supposer que $\omega(0) = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$: soit $\omega_1 = \omega$ et $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$. On pose $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Dans un voisinage de 0 , ω_t est non dégénérée pour $t \in [0,1]$. On cherche une famille φ_t de germes de difféomorphismes au voisinage de 0 tels que $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$, $\varphi_0 = \mathrm{Id}$.

Par dérivation, si $\xi_t(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)$, on a :

$$\varphi_t^*\left(\frac{d\omega_t}{dt}\right) + \varphi_t^*(\mathcal{L}_{\xi_t}(\omega_t)) = 0 .$$

Soit encore :

$$d(i(\xi_t)\omega_t) = -(\omega_1 - \omega_0) .$$

Soit alors α telle que $d\alpha = -(\omega_1 - \omega_0)$ avec $\alpha(0) = 0$. On déduit de l'équation $i(\xi_t)w_t = \alpha$ un champ de vecteur $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ défini au voisinage de 0 et tel que $\xi_t(0) \equiv 0$. Utilisant le fait que l'ensemble de définition des solutions maximales de : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \xi_t(x) \\ x(0) = \alpha_0 \end{cases}$ est un ouvert contenant $[0,1] \times \{0\}$ on conclut à l'existence de φ_t dans un voisinage fixe de 0 et $t \in [0,1]$ et l'on voit en remontant le calcul que $\varphi_1^*(\omega_1) = \omega_0$, ce qui est l'énoncé de Darboux.

Exercice. Soit X une variété de dimension 2, ω_0 et ω_1 deux structures symplectiques sur X , montrer qu'une CNS pour qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : X \to X$ tel que $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$ est $\int_X \omega_0 = \int_X \omega_1$.

Nous verrons ultérieurement d'autres problèmes de forme normale plus compliqués : coordonnées actions-angles, lemme de Morse avec forme volume.

4 . - SYSTEMES HAMILTONIENS.

Soit $f \in C^{\infty}(X;\mathbb{R})$ où (X,ω) est une variété symplectique de dimension $2n$. On définit le gradient symplectique H_f de f par la formule

$$\boxed{i(H_f)\omega = df} .$$

Dans les coordonnées canoniques on a :

$$H_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i} .$$

Les trajectoires de H_f vérifient donc l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial \xi_i} \\ \dfrac{d\xi_i}{dt} = -\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \end{cases} .$$

Ces équations s'appellent équations canoniques ou de Hamilton ; f s'appelle l'hamiltonien du système (ou énergie).

PROPRIETES DE H_f. - Si φ_t est le flot de H_f, on a les deux propriétés de conservation : $\varphi_t^*(\omega) = \omega$ (et donc $\varphi_t^*(\Omega) = \Omega$ si $\Omega = \frac{1}{n!}\omega\wedge\ldots\wedge\omega$ est le volume) et $f \circ \varphi_t = f$.

Preuve. - $\frac{d}{dt} \varphi_t^*(\omega)\big|_{t=0} = \mathcal{L}_{H_f}\omega = i(H_f)\,d\omega + d(i(H_f)\omega) = 0 + d(df) = 0$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t)\Big|_{t=0} = df(H_f) = \omega(H_f, H_f) = 0 .$$

La conservation du volume est connue sous le nom de théorème de Liouville. Une conséquence amusante est la suivante : si $\int_X \Omega < +\infty$, on a le théorème de retour de Poincaré : $\forall x \in X$, $\forall U$ voisinage de x, $\forall T$, $\exists t$, $\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$ et $t \geq T$: sinon $\exists U$, $\mathrm{vol}_\Omega(U) > 0$ et $T_n \to +\infty$. $\varphi_{T_n}(U) \cup \varphi_{T_m}(U) = \emptyset$ $(\forall n \neq m)$: d'où contradiction.

Réciproques. - Soit V tel que $\mathcal{L}_V\omega = 0$, on a $d(i(V)\omega) = 0$ et donc localement $i(V)\omega = df$, c'est-à-dire $\omega = H_f$. C'est vrai globalement si $H^1(X) = 0$.

Cas homogène. Si $X = T^*(Y)$, $h = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ est le générateur des homothéties, $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i$ et V un champ de vecteur tel que $\mathcal{L}_V\omega = 0$, $[V,h] = 0$ (V commute aux homothéties), on a : $V = H_f$ avec $f = \alpha(V)$.

Preuve. - $\alpha = -i(h)\omega$ et donc $\mathcal{L}_V\alpha = 0$, $i(V)d\alpha + d(i(V)\alpha) = 0$: $df = i(V)\omega$: c'est-à-dire $V = H_f$.

Crochets de Poisson. Pour $f, g \in C^\infty(X; \mathbb{R})$, on pose

$$\{f, g\} = df(H_g) = -dg(H_f) = \omega(H_f, H_g) .$$

$\{f,g\}$ s'appellent crochet de Poisson de f et g. Il est visiblement bilinéaire antisymétrique et satisfait l'identité de Jacobi :

$$\{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = 0 .$$

Cette identité est en fait équivalente à $H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g]$.

Preuve de l'équivalence.

$$\{\{f,g\},h\} = -dh(H_{\{f,g\}})$$

$$\{f,\{g,h\}\} = -\{f, d_h(H_g)\} = d(dh(H_g))\cdot(H_f) = \frac{\partial^2 h}{\partial H_f \partial H_g} .$$

Donc : Jacobi équivaut à :

$$\frac{\partial h}{\partial H_{\{f,g\}}} = \frac{\partial^2 h}{\partial H_g \partial H_f} - \frac{\partial^2 h}{\partial H_f \partial H_g} = \frac{\partial h}{\partial [H_f, H_g]} .$$

Preuve de Jacobi. $\omega(H_g, \cdot) = dg$, on prend la dérivée de Lie par rapport à H_f :

$$\mathcal{L}_{H_f} dg = d(\mathcal{L}_{H_f} g) = d(dg(H_f)) = -d(\{f,g\})$$

$$\mathcal{L}_{H_f}(i(H_g)\omega) = -\omega([H_f, H_g], \cdot) .$$

Donc :

$$H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g] \ .$$

COROLLAIRE 1. - L'application f H_f de $(C^\infty(X), \{ \ \})$ dans $(\mathcal{V}(X), [\ \ ])$ est un homomorphisme d'algèbre de Lie.

Exercice. Soit V_1, V_2, V_3 tels que $\mathcal{L}_{V_i} \omega = 0$ et $[V_1, V_2] = V_3$. Prouver que $V_3 = H_f$ avec $f = \omega(V_1, V_2)$.

COROLLAIRE 2. - Si $\{f,g\} = 0$, les champs H_f, H_g commutent.

5. - VARIETES LAGRANGIENNES. TRANSFORMATIONS CANONIQUES.

DEFINITION. - Soit (X, ω) une variété symplectique, $Y \subset X$ une sous-variété et $j : Y \to X$ l'injection canonique. On dit que Y est

- symplectique si $(Y, j^*(\omega))$ l'est (alors dimension (Y) est paire).
- isotrope si $j^*(\omega) = 0$.
- lagrangienne si elle est isotrope de dimension maximale $\frac{1}{2}$ dimension (X) .

Exemple 1. - Soit $Y \subset T^*(X)$ et supposons que $\pi : Y \to X$ (restriction de la projection canonique) soit un difféomorphisme, alors $Y = \{(x, \beta(x)) \mid x \in X\}$ et α est une 1-forme différentielle sur X ; on a alors :

$$\boxed{Y \text{ lagrangienne} \Leftrightarrow d\beta = 0} \ .$$

Donc localement (et globalement si $H^1(X) = 0$) on a :

$$Y = \{(x, df(x)) \mid x \in X\} \ .$$

Preuve. - On a $j^*(\alpha) = \sum y_i(x)\, dx_i = \beta$ (on a paramétré Y par $\pi^{-1} : X \to Y$). Donc $j^*(\omega) = 0 = d(\beta) = 0$.

Exemple 2. - $\chi : (X_1, \omega_1) \to (X_2, \omega_2)$ est dite canonique (ou symplectomorphisme) si c'est un difféomorphisme de X_1 sur X_2 tel que $\chi^*(\omega_2) = \omega_1$. Soit $Y \subset X_1 \times X_2$ le graphe de χ ; si on équipe $X_1 \times X_2$ de la forme $\omega_2 - \omega_1$, on a : Y lagrangienne $\Leftrightarrow \chi$ canonique.

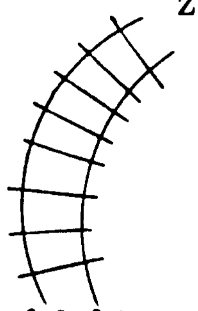
Utilisant des coordonnées naturelles dans le cas où $X_1 = X_2 = T^*X$ on est amené à supposer que l'application $Y \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui a $(x, \xi, x', \xi') \rightsquigarrow (\xi, x')$ est un difféomorphisme ce qui est le cas si $\chi = \mathrm{Id}$ et donc si χ est proche de l'identité : alors il existe une fonction $\Phi(x', \xi)$ telle que :

$$Y = \left\{ \left(x + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \xi \; ; x', \xi_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right) \mid (\xi, x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \right\}$$

(preuve = exercice) ; Φ est appelée fonction génératrice de χ .

Application des variétés lagrangiennes à la résolution de $F(x, d_x f) = 0$.

Supposons F de classe C^∞ si $f(x)$ est une solution de $F\left(x, \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = ($ on peut associer à f la variété lagrangienne $\Lambda_f = \{x, d_x f\} \subset T^*X$. On est donc amené à chercher des variétés lagrangiennes dans T^*X qui sont contenu dans $F = 0$. On a alors : H_F est tangent à Λ : en effet $dF(V) = \omega(H_F, V)$ et donc si V tangent à Λ , H_F est ω-orthogonal à V et comme $T_{\lambda_0} \Lambda$ est lagrangien, H_F est tangent à Λ . D'où la construction : on choisit une variété isotrope $Y \subset \{F = 0\}$ de dimension n-1 telle que H_F soit transverse à Y et on pose $\Lambda = \bigcup_{t \text{ petit}} \varphi_t(Y)$. On est alors amené à regarder si $\pi : \Lambda \to X$ est un difféomorphisme local. Exemple : $F = \sum \xi_i^2 - 1$. On prend $Y = \{(y, v)\}$ où $y \in Z$ sous-variété de codim 1 de X et $v \in N^*(Z)$ vérifie $F(y, v) = 1$: $Y \subset N^*(Z)$ est isotrope et contenue dans $F = 0$.



on a dessiné sur la figure les lignes de niveau de f $(f = 0 \Leftrightarrow x \in Z)$.

Systèmes complètement intégrables. (X, ω) symplectique, $f = f_1$ un hamiltonien, on dit que f_1 est complètement intégrable s'il existe $f_2, \ldots, f_n \in C^\infty(X)$ telles que $\{f_i, f_j\} = 0$ $(\forall i, j)$ et les différentielles df_i sont linéairement indépendantes en (presque) tout point de X . Les variétés de niveau $X_{a_1, \ldots, a_n} = \{f_i = g_i\}$ sont alors lagrangiennes et leur espace tangent est engendré par les H_{f_i} qui vérifient du reste $[H_{f_i}, H_{f_j}] = 0$: on a donc localement une action de $\mathbb{R}^n$ sur $X_{a_1, \ldots, a_n}$: si les champs sont complets les variétés X_a sont donc des quotients de $\mathbb{R}^n$ (le chapitre 4 sera consacré à l'étude de ces systèmes).

Exercice 1. Soit $(\mathbb{R}^2, dx\wedge dy)$ et $\chi_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$. Pour quelles valeurs de θ, χ_θ admet-elle une fonction génératrice $f(y,x_1)$? $(\chi(x,y) = (x_1,y_1))$. Calculer f.

Exercice 2. Soit $\chi : (\mathbb{R}^2, dx\wedge dy) \to (\mathbb{R}^2, dx\wedge dy)$ une transformation canonique qui conserve les lignes $y = c^{te}$ $(y_1 = y)$. Prouver que χ est de la forme $x_1 = x + F(y)$, $y_1 = y$.

Exercice 3. Soit ω une structure symplectique arbitraire sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$. On pose $p(x,y) = \iint_{0\leq y'\leq y} \omega$. Prouver que si $\mathrm{Im}(p) =]a,b[$, il existe un difféomorphisme canonique $\chi : \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times]a,b[$ tel que $\chi^*(d\theta\wedge dp) = \omega$ et $p\circ\chi = p(x,y)$.

Exercice 4. Soit ω la structure symplectique (au sens formel) sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie par $\omega(f,g) = \iint K(x,y)f(x)g(y)\,dx\,dy$, $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $K(x,y) = \mathrm{sgn}(y-x)$. Soit $F(f) = \int_{\mathbb{R}} P(f,f')dx$, en utilisant la formule du calcul des variations (cf. Cartan : Calcul diff. et formes diff.), calculer H_F (formellement). Soit $F_1(f) = \int f^2 dx$ et $F_2(f) = \int f^2 + 4f'^3$, prouver que $\{F_1,F_2\} = 0$. [cf. Faddeev + Zakharov ; Funct. analysis 5 (1971)].

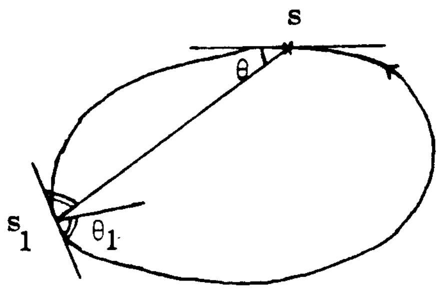
Exercice 5. Soit $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et supposons donnée une action symplectique homogène de G sur $T^*(X)$ (par exemple induite par une action sur X), on pose $f_2 = \alpha(\frac{\partial}{\partial\theta})$ où $\frac{\partial}{\partial\theta}$ est le générateur infinitésimal du groupe φ_θ. Soit $f_1 \in C^\infty(X;\mathbb{R})$ telle que $f_1\circ\varphi_\theta = f_1$ $(\forall\theta\in G)$. Prouver que $\{f_1,f_2\} = 0$

Exemple. $X = \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $f_1(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(|x|)$. Etudier les sous-ensemble $X_{a,b} = \{f_1 = a, f_2 = b\}$. Pour quelles valeurs de (a,b), $X_{a,b}$ est-elle une sous-variété lagrangienne de $T^*(X)$; pour quelles valeurs de (a,b) est-ce un tore ? cas où $V(|x|) = -\frac{1}{|x|}$.

Exercice 6. On admettra que si X est simplement connexe et β est une 1-forme sur X telle que $d\beta = 0$ alors $\beta = df$. Soit $\Lambda\subset T^*X$ une variété lagrangienne telle que $\pi : \Lambda \to X$ est un difféomorphisme. Prouver que si X est compacte, $\Lambda \cap \Lambda_0$ contient au moins deux points (Λ_0 correspond au graphe de la forme $\beta = 0$). Est-ce le cas si X n'est pas simplement connexe ? [cf. Weinstein, Ann. of Math. 98 (1973), pp. 377-410] .

Exercice 7. Soit $f(x,\theta) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $X = \{(x,\theta) \mid \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0\}$. On suppose que $d(\frac{\partial f}{\partial \theta}) \neq 0$ sur X et soit $j : X \to T^*(\mathbb{R}^n)$ définie par $j(x,\theta) = (x, d_x f)$. Prouver que si ω est la structure symplectique sur $T^*\mathbb{R}^n$, $j^*(\omega) = 0$ et donc que si j est un plongement, son image est lagrangienne. [cf. [D]] .

Exercice 8.



1) Soit Γ une courbe convexe de $\mathbb{R}^2$ de longueur L et $X = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times]-1,+1[$. On considère sur X la transformation $T(s, \cos\theta) = (s_1, \cos\theta_1)$ où s , s_1 sont les abscisses curvilignes sur Γ et T est définie sur la figure. Prouver que T est canonique en utilisant la fonction génératrice $f(s,s_1) = d(m(s), m(s_1))$ où d est la distance euclidienne.

2) Dans le cas où Γ est une ellipse de foyer F , F' , on pose $g(s,\cos\theta) = d^2 \cdot d'^2$ où d (resp. d') est la distance de F (resp. F') à la corde $m(s)m(s_1)$. Prouver que $g \circ T = g$. Tracer l'allure des lignes de niveaux de g . [cf. G. BIRKHOFF, Dynamical systems p. 169 et sv[tes]] .

Exercice 9. Soit $V(x) \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction telle que $V(0) = 0$, $V'(x)\,\mathrm{sgn}(x) > 0$ et $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$. Soit sur $T^*\mathbb{R}$, $f(x,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x)$. Prouver que les trajectoires de H_f sont périodiques de période $T(E)$ (si la trajectoire est $\subset \{f=E\})$. Soit $A(E) = \iint_{f \leq E} dx \wedge d\xi$. Prouver que $T(E) = \frac{dA}{dE}(E)$. En déduire la construction de $V \neq \frac{1}{2}x^2$ tels que $T(E) \equiv 2\pi$. Est-ce possible avec V pair. Montrer (plus difficile) que A et T sont des fonctions C^∞ de E $(E \geq 0)$ en supposant $V''(0) > 0$. Dans le cas du pendule simple $V(x) = 1 - \cos x$ (x voisin de 0), prouver que $T(E)$ est une fonction analytique de E dont on calculera le développement de Taylor.

Exercice 10. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$ telle que $\sum (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 = 1$, montrer que f est une fonction affine.