

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Résidus en codimension 2

Cours de l'institut Fourier, tome 15 (1980)

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1980__15__1_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RESIDUS EN CODIMENSION 2

par Monique LEJEUNE-JALABERT

On considère un germe d'espace analytique (X, \mathfrak{x}) de codimension pure 2 dans $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$ et dont l'anneau local $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{x}}$ soit un anneau de Cohen - Macaulay non nécessairement réduit. On sait que (X, \mathfrak{x}) peut être plongé dans un germe d'intersection complète (V, \mathfrak{x}) de même dimension. ω_X le Module dualisant de X apparaît alors comme un sous- \mathcal{O}_V -Module de ω_V le Module dualisant de V qui est un \mathcal{O}_V -Module localement libre de rang 1. Nous allons déterminer quel est ce sous-Module et examiner quelques conséquences si $\dim_{\mathfrak{x}} X = 0$ et 1.

§ 1. - DETERMINATION DE ω_X .

Nous désignerons par \mathcal{O} l'anneau des séries convergentes à n variables $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, par $A = \mathcal{O}/I$ l'anneau $\mathcal{O}_{X, \mathfrak{x}}$, par $B = \mathcal{O}/K$ l'anneau $\mathcal{O}_{V, \mathfrak{x}}$, par Ω^n le \mathcal{O} -module des n -formes différentielles sur $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$. Alors $\omega_X \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}/I, \Omega^n)$ et $\omega_V \simeq \text{Ext}_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}/K, \Omega^n)$. De la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow I/K \rightarrow \mathcal{O}/K \rightarrow \mathcal{O}/I \rightarrow 0$$

on déduit une suite exacte (de \mathcal{O} -modules)

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(I/K, \Omega^n) \rightarrow \omega_X \rightarrow \omega_V.$$

Or $\Omega^n \simeq 0$, $\dim I/K = n-2$ et on sait que

$2 = n - \dim I/K = \inf \{i; \text{Ext}_{\mathcal{O}}^i(I/K, \mathcal{O}) \neq 0\}$. L'application naturelle

$\omega_X \rightarrow \omega_V$ est donc injective. Soit (f_0, \dots, f_s) un système de générateurs de I , $h_0 = \sum_{i=0}^s \lambda_i f_i$, $h_1 = \sum_{i=0}^s \mu_i f_i$ un système de générateurs de K .

h_0, h_1 étant une suite régulière, on obtient une résolution libre de \mathcal{O}/K en écrivant le complexe de Koszul :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{v} \mathcal{O}^2 \xrightarrow{h} \mathcal{O} \rightarrow 0$$

où désignant par $e_0 = (1, 0)$, $e_1 = (0, 1)$, $h(e_i) = h_i$, $i=0, 1$ et $v(1) = h_1 e_0 - h_0 e_1$. Cette résolution permet de calculer ω_V .

ω_V s'identifie à

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, \Omega^n) / \text{Image Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^2, \Omega^n)$$

et on note par définition si $\omega \in \Omega^n$,

$$\begin{bmatrix} \omega \\ h_0, h_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ h_1, -h_0 \end{bmatrix}$$

l'élément de ω_V admettant pour représentant le morphisme de \mathcal{O} dans Ω^n qui envoie 1 sur ω .

Considérons maintenant $\mathcal{O}^{s+1} \xrightarrow{f} \mathcal{O}$ défini par

$f(e_i) = f(0, \dots, 1, \dots, 0) = f_i$. Puisque A est de Cohen-Macaulay,

$\text{prof } A = \dim A = n-2$ et \mathcal{O} étant un anneau régulier

$\dim \text{proj } A + \text{prof } A = n$. La dimension projective de A est donc 2.

Ceci signifie que $\text{Ker } f$ est un \mathcal{O} -module projectif donc libre et

$\text{Ker } f \simeq \mathcal{O}^s$. D'après le théorème de Burch (Kaplanski : Commutative

rings), il existe une base r^1, \dots, r^s du module libre $\text{Ker } f$ telle que

$$f_i = \det(r^1, \dots, r^s, e_i).$$

La résolution libre de \mathcal{O}/I ainsi obtenue :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^s \xrightarrow{r} \mathcal{O}^{s+1} \xrightarrow{f} \mathcal{O} \rightarrow 0$$

où $r(r^i) = r^i$ permet de calculer ω_X . ω_X s'identifie à

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^s, \Omega^n) / \text{Image Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^{s+1}, \Omega^n)$$

et par analogie avec la définition ci-dessus, on notera si $\omega_1, \dots, \omega_s$ sont s éléments de Ω^n ,

$$\begin{bmatrix} \omega_1, \dots, \omega_s \\ \left(\begin{matrix} r_0^1 & \dots & r_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ r_0^s & \dots & r_s^s \end{matrix} \right) \end{bmatrix}$$

l'élément de ω_X admettant pour représentant le morphisme de \mathcal{O}^s dans Ω^n qui envoie r^i sur ω_i .

Il s'agit de voir quelle est l'image de ce symbole dans ω_V . Pour ce faire, nous allons comparer le calcul de ω_V (resp. ω_X) obtenu avec la résolution libre de \mathcal{O}/K (resp. \mathcal{O}/I) avec celui obtenu avec une résolution injective de Ω^n .

Nous utiliserons la résolution de Dolbeault distribution de Ω^n

$$0 \rightarrow \Omega^n \rightarrow \mathcal{D}^{n,0} \rightarrow \mathcal{D}^{n,1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}^{n,n} \rightarrow 0$$

dont on sait qu'elle est injective.

ω_V (resp. ω_X) est alors le 2e groupe de cohomologie du complexe $\text{Hom}(\mathcal{O}/K, \mathcal{D}^{n,\cdot})$ (resp. $\text{Hom}(\mathcal{O}/I, \mathcal{D}^{n,\cdot})$) ; si $\psi : \mathcal{O}/I \rightarrow \mathcal{D}^{n,2}$ est un représentant d'un élément de ω_X , $\bar{\psi} : \mathcal{O}/K \rightarrow \mathcal{O}/I \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}^{n,2}$ est un représentant de son image dans ω_V . Pour comparer les 2 calculs, on est amené à considérer d'abord le double complexe :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,0}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^{s+1}, \mathcal{D}^{n,0}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^s, \mathcal{D}^{n,0}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,1}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^{s+1}, \mathcal{D}^{n,1}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^s, \mathcal{D}^{n,1}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,2}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^{s+1}, \mathcal{D}^{n,2}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^s, \mathcal{D}^{n,2}) \rightarrow 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Dans ce double complexe, la k-ième ligne n'a de cohomologie qu'en dimension 0 et c'est $\text{Hom}(\mathcal{O}/I, \mathcal{D}^{n,k})$ car $\mathcal{D}^{n,k}$ est un \mathcal{O} -module injectif ; les colonnes n'ont de cohomologie qu'en dimension 0 car $\mathcal{O}, \mathcal{O}^{s+1}, \mathcal{O}^s$ sont des \mathcal{O} -modules libres.

Soit $\omega_1, \dots, \omega_s$ s éléments de Ω^n et considérons l'élément de $\text{Hom}(\mathcal{O}^s, \Omega^n)$ qu'ils déterminent ainsi que sa classe dans $\omega_X = \text{Ext}^2(\mathcal{O}/I, \Omega^n)$, $\text{Hom}(\mathcal{O}^s, \Omega^n)$ s'injecte dans $\text{Hom}(\mathcal{O}^s, \mathcal{D}^{n,0})$. $(\omega_1, \dots, \omega_s)$ se relève en un élément de $\text{Hom}(\mathcal{O}^{s+1}, \mathcal{D}^{n,0})$ (pas de cohomologie en dimension 2). Il existe donc $T_0, \dots, T_s \in \mathcal{D}^{n,0}$ tels que

$$I \begin{cases} \omega_1 = r_0^1 T_0 + \dots + r_s^1 T_s \\ \vdots \\ \omega_s = r_0^s T_0 + \dots + r_s^s T_s \end{cases} .$$

La 2e ligne n'ayant pas de cohomologie en dimension 1, il existe $V \in \mathcal{D}^{n,1}$ tel que $f_k V = d'' T_k$, $k = 0, \dots, s$.

Enfin, la 3e ligne ayant $\text{Hom}(\mathcal{O}/I, \mathcal{D}^{n,2})$ comme cohomologie en dimension 0, le morphisme $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{D}^{n,2}$ qui envoie $g \in \mathcal{O}$ sur $gd''V$ provient d'un morphisme de \mathcal{O}/I dans $\mathcal{D}^{n,2}$ qui est un représentant de l'élément de ω_X associé à $\omega_1, \dots, \omega_s$.

Considérons maintenant le double complexe :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,0}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^2, \mathcal{D}^{n,0}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,0}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,1}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^2, \mathcal{D}^{n,1}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,1}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,2}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}^2, \mathcal{D}^{n,2}) & \rightarrow & \text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{D}^{n,2}) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Soit η un élément de Ω^n et considérons l'élément de $\text{Hom}(O, \Omega^n)$ qu'il détermine ainsi que sa classe dans $\omega_V \simeq \text{Ext}^2(O/K, \Omega^n)$.

Le même raisonnement que précédemment montre qu'il existe

$S_0, S_1 \in 'D^{n,0}$ tels que

$$\eta = h_1 S_0 - h_0 S_1$$

puis $W \in 'D^{n,1}$ tel que $h_k W = d'' S_k$, $k=0,1$; enfin le morphisme $O \rightarrow 'D^{n,2}$ qui envoie $g \in O$ sur $gd''W$ provient d'un morphisme de $O/K \rightarrow 'D^{n,2}$ qui est un représentant de l'élément de ω_V associé à η .

Pour déterminer l'image dans ω_V du symbole associé à w_1, \dots, w_s il suffit de procéder par linéarité et considérer successivement le cas où dans w_1, \dots, w_s seul w_k est éventuellement non nul. Dans ce cas, le système I entraîne que

$$\det \begin{pmatrix} r_0^1 & \dots & r_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ r_0^k & \dots & r_s^k \\ \vdots & & \vdots \\ r_0^s & \dots & r_s^s \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_s \\ \mu_0 & \dots & \mu_s \end{pmatrix} T_j = \det \begin{pmatrix} r_0^1 & \dots & 0 & \dots & r_s^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_0^k & \dots & 0 & \dots & r_s^k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_0^s & \dots & 0 & \dots & r_s^s \\ \lambda_0 & \dots & \sum_{i=0}^s \lambda_i T_i & \dots & \lambda_s \\ \mu_0 & \dots & \sum_{i=0}^s \mu_i T_i & \dots & \mu_s \end{pmatrix} \quad j=0 \dots s$$

la colonne contenant T_0, \dots, T_s occupant la j ème place.

On en déduit que :

$$\det \begin{pmatrix} r_0^1 & \dots & r_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ r_0^k & \dots & r_s^k \\ \vdots & & \vdots \\ r_0^s & \dots & r_s^s \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_s \\ \mu_0 & \dots & \mu_s \end{pmatrix} w_k = (-1)^{s+k} \left\{ \det \begin{pmatrix} r_0^1 & \dots & r_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ r_0^s & \dots & r_s^s \\ \mu_0 & \dots & \mu_s \end{pmatrix} \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i T_i \right) - \det \begin{pmatrix} r_0^1 & \dots & r_s^1 \\ \vdots & & \vdots \\ r_0^s & \dots & r_s^s \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_s \end{pmatrix} \left(\sum_{i=0}^s \mu_i T_i \right) \right\}$$

$$= (-1)^{s+k} \left\{ (\mu_0 f_0 + \dots + \mu_s f_s) \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i T_i \right) - (\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_s f_s) \left(\sum_{i=0}^s \mu_i T_i \right) \right\}$$

$$= (-1)^{s+k} \left\{ h_1 \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i T_i \right) - h_0 \left(\sum_{i=0}^s \mu_i T_i \right) \right\} .$$

D'autre part,

$$h_0 V = d''(\sum_{i=0}^s \lambda_i T_i) \quad h_1 V = d''(\sum_{i=0}^s \mu_i T_i) .$$

L'élément de ω_X associé à $(0, \dots, \omega_k, \dots, 0)$ correspond au morphisme $\varphi : O/I \rightarrow \mathcal{D}^{n,2}$ induit par le morphisme $O \rightarrow \mathcal{D}^{n,2}$ envoyant g sur $gd''V$. Son image dans ω_V correspond au morphisme $\bar{\varphi} : O/K \rightarrow O/I \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}^{n,2}$ induit également par celui de $O \rightarrow \mathcal{D}^{n,2}$ envoyant g sur $gd''V$. Or, posant $S_0 = \sum \lambda_i T_i$, $S_1 = \sum \mu_i T_i$

$$\text{et } \eta = (-1)^{s+k} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_0 & \dots & r_s \\ \vdots & & \vdots \\ r_s & \dots & r_s \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_s \\ \mu_0 & \dots & \mu_s \end{pmatrix} \omega_k, \text{ on constate que } \eta = h_1 S_0 - h_0 S_1$$

$$h_i V = d'' S_i, \quad i=0,1 .$$

1.1. PROPOSITION. - L'injection $\omega_X \rightarrow \omega_V$ envoie le symbole

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \omega_1 \dots \omega_s \\ \left(\begin{array}{c} 1 \dots 1 \\ r_0 \dots r_s \\ \vdots \\ r_s \dots r_s \end{array} \right) \end{array} \right] \text{ sur le symbole} \\ \left[\begin{array}{c} \Sigma (-1)^{s+k} \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_0 & \dots & r_s \\ \vdots & & \vdots \\ r_s & \dots & r_s \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_s \\ \mu_s \dots \mu_s \end{pmatrix} \omega_k \\ \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_0 & \dots & r_s \\ \vdots & & \vdots \\ r_s & \dots & r_s \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_s \end{pmatrix} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_0 & \dots & r_s \\ \vdots & & \vdots \\ r_s & \dots & r_s \\ \mu_0 & \dots & \mu_s \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

1.2. Remarque : Identifiant $\omega_{V,x}$ à $\mathcal{O}_{V,x} = O/K$, $\omega_{X,x}$ s'identifie à J/K où J est l'idéal de O engendré par

$$h_0 = \det \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ r_0 & \dots & & & r_s \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_0 & \dots & & & r_s \\ \lambda_0 & \dots & & & \lambda_s \end{vmatrix}, \quad h_1 = \det \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ r_0 & \dots & & & r_s \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_0 & \dots & & & r_s \\ \mu_0 & \dots & & & \mu_s \end{vmatrix}$$

$$g_k = (-1)^k \det \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 \\ r_0 & \dots & & & r_s \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_0 & \dots & & & r_s \\ \lambda_0 & \dots & & & \lambda_s \\ \mu_0 & \dots & & & \mu_s \end{vmatrix} \quad k=1, \dots, s$$

1.3. Remarque (Peskin-Szpiro) : Soit (Y, x) le germe d'espace analytique déterminé par l'idéal J défini ci-dessus, X et Y sont liés par V et on a la suite exacte au voisinage de x ,

$$0 \rightarrow \omega_X \rightarrow \omega_V \rightarrow \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V \rightarrow 0.$$

Rappelons que (X, x) et (Y, x) sont liés par (V, x) si (X, x) et (Y, x) sont équidimensionnels et sans composantes immergés et si $J/K = \text{Hom}(\mathcal{O}/I, \mathcal{O}/K)$ et $I/K = \text{Hom}(\mathcal{O}/J, \mathcal{O}/K)$ et pour qu'il en soit ainsi il suffit que $J/K = \text{Hom}(\mathcal{O}/I, \mathcal{O}/K)$ (cf. [3] §2). Or, on a un isomorphisme canonique de foncteurs de la catégorie des \mathcal{O}/K -modules de type fini dans elle-même

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^2(?, \Omega^n) \simeq \text{Hom}(?, \text{Ext}_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}/K, \Omega^n)).$$

Remplaçant $?$ par \mathcal{O}/I , il suffit d'identifier $\omega_{X, x}$ à J/K et $\omega_{V, x}$ à \mathcal{O}/K .

1.4. Remarque : Si de plus (X, x) et (Y, x) n'ont pas de composantes irréductibles communes, on a une suite exacte canonique au voisinage de x :

$$0 \rightarrow \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{Y \cap X} \rightarrow 0$$

où $(Y \cap X, x)$ est le germe de sous-espace de $(\mathbb{C}^n, \underline{0})$ défini par $I + J$.

En effet, X et Y sont alors géométriquement liés ; on a $V = X \cup Y$, $K = I \cap J$.

1.5. Remarque : Serre montre dans [4] que I est engendré par 2 éléments si et seulement si $\omega_{X,X}$ est un \mathcal{O} -module monogène.

§ 2. - $n = 2$. CAS DES POINTS EPAIS DANS \mathbb{C}^2 .

Dans tout ce paragraphe $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ et I est un idéal primaire pour l'idéal maximal. On sait alors que $\text{Ext}_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}/I, \Omega^2)$ s'identifie au dual de \mathcal{O}/I . Cette identification se fait de la façon suivante :

2.1. PROPOSITION. - L'accouplement

$$\mathcal{O}/I \times \text{Ext}_{\mathcal{O}}^2(\mathcal{O}/I, \Omega^2) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\left\langle f \text{ mod } I, \begin{bmatrix} \omega_1, \dots, \omega_s \\ (r_o^1 \dots r_s^1) \\ \vdots \\ (r_o^s \dots r_s^s) \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle f \text{ mod } K, \begin{bmatrix} (-1)^s \sum g_k \omega_k \\ h_o \quad h_1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{|h_o| \geq \epsilon \\ |h_1| \geq \epsilon}} \frac{(-1)^s f(\sum g_k \omega_k)}{h_o h_1}$$

est un accouplement parfait d'espaces vectoriels de dimension finie. h_o, h_1, g_k $k=1 \dots s$ sont les éléments de \mathcal{O} définis en en 1.2.

Démonstration : on sait que $\left\langle f \text{ mod } I, \begin{bmatrix} \omega_1, \dots, \omega_s \\ (r_j^i) \end{bmatrix} \right\rangle = \langle d^"V, \tilde{f} \rangle$

où \tilde{f} est une fonction C^∞ à support compact sur \mathbb{C}^2 coïncidant avec f dans un voisinage de $\underline{0}$, et où $V \in \mathcal{B}^{2,1}$ est tel qu'il

existe $T_k \in \mathcal{D}^{2,0}$, $k=0\dots s$, vérifiant

$$f_k V = d'' T_k \quad k=0\dots s \quad \text{et} \quad \omega_i = \sum_j r_j^i T_j \quad i=1\dots s .$$

D'autre part $\langle f \bmod K, \begin{bmatrix} \eta \\ h_0 & h_1 \end{bmatrix} \rangle = \langle d'' W, \tilde{f} \rangle$ où $W \in \mathcal{D}^{2,1}$ est tel qu'il

existe $S_0, S_1 \in \mathcal{D}^{2,0}$ vérifiant $h_k W = d'' S_k$, $k=0,1$ et $\eta = h_1 S_0 - h_0 S_1$.

Or, on a vu au cours de la démonstration de la proposition 1.1 que pour tout système V, T_k vérifiant les propriétés ci-dessus avec $\omega_i = 0 \quad i \neq k$,

on a $(-1)^s g_k \omega_k = h_1 (\sum \lambda_i T_i) - h_0 (\sum \mu_i T_i)$, $h_0 V = d'' (\sum \lambda_i T_i)$,

$h_1 V = d'' (\sum \mu_i T_i)$.

2.2. COROLLAIRE. - Si I et J sont deux idéaux primaires liés par K, on a $\text{rg}_{\mathbb{C}} O/I + \text{rg}_{\mathbb{C}} O/J = \text{rg}_{\mathbb{C}} O/K$.

Démonstration : $\text{rg}_{\mathbb{C}} O/I = \text{rg}_{\mathbb{C}} \text{Ext}^2(O/I, \Omega^2) = \text{rg}_{\mathbb{C}} J/K$
 $= \text{rg}_{\mathbb{C}} O/K - \text{rg}_{\mathbb{C}} O/J$.

2.3. THEOREME. - Soit I un idéal primaire de $\mathbb{C}\{x_1, x_2\}$. Soit f_0, \dots, f_s un système de générateurs de I, r^1, \dots, r^s un système de générateurs des relations tel que $f_i = \det(r^1, \dots, r^s, e_i)$.

On a :

$$\langle \text{cl } f \bmod I, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dots, \sum_{i=0}^s df_i \wedge dr_i^k, \dots \\ (r_j^i) \end{bmatrix} \rangle = \text{rg}_{\mathbb{C}} O/I \cdot f(0) .$$

Démonstration : nous allons utiliser le théorème de liaison locale de Peskine Szpiro [3] th. 3.3. Il existe des quotients de codimension 2 de O, $O/I_1, \dots, O/I_t$ tels que :

a) pour $i < t$, $O/I_i, \dots, O/I_{i+1}$ sont liés algébriquement ;

b) $I = I_1$ et O/I_t est une intersection complète.

Ceci nous permet de raisonner par récurrence sur le plus petit t pour

lequel on a une telle suite (en fait c'est le nombre minimal de générateurs de I diminué de un). Pour simplifier, nous noterons comme ci-dessus $I = I_1$, $J = I_2$ et K l'idéal qui les lie. K est engendré par h_0, h_1 ou $h_0 = \sum \lambda_i f_i$, $h_1 = \sum \mu_i f_i$. La proposition 2.1 entraîne que (2.3.1)

$$\langle f \bmod I, \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \dots, \sum_{i=0}^s df_i \wedge dr_i^k, \dots \\ (r_j^i) \end{array} \right] \rangle = \langle f \bmod K, \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} (-1)^s \sum_k g_k \sum_i df_i \wedge dr_i^k \\ h_0, h_1 \end{array} \right] \rangle$$

J est engendré par $(-1)^s g_1, \dots, (-1)^s g_s, -h_1, h_0$ où g_k $k=1 \dots s$ est défini comme en 1.2. La matrice des relations entre ces générateurs est

$$\begin{vmatrix} r_0^1 & \dots & r_0^s & \lambda_0 & \mu_0 \\ r_s^1 & \dots & r_s^s & \lambda_s & \mu_s \end{vmatrix}.$$

En effet, on vérifie d'abord facilement que chaque ligne fournit une relation. (Le calcul conduit à un déterminant dont deux lignes sont identiques).

On sait d'autre part (§ 1) qu'il existe une base du module des relations $\rho^1, \dots, \rho^{s+1}$ telle que $\det(\rho^1, \dots, \rho^{s+1}, e_k) = (-1)^s g_k$, $k=1 \dots s$, $-h_1$ si $k=s+1$, h_0 si $k=s+2$. On en déduit que l'élément de $GL(s+1, O)$

qui l'envoie sur les $s+1$ lignes précédentes est de déterminant 1.

On vérifie enfin la condition de normalisation de signe.

Par hypothèse de récurrence, on peut donc affirmer que

$$\langle f \bmod J, \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \dots, \sum_{i=1}^s (-1)^s dg_i \wedge dr_{k-1}^i - dh_1 \wedge d\lambda_{k-1} + dh_0 \wedge d\mu_{k-1}, \dots \\ \left(\begin{array}{cc} \boxed{t_r} & \begin{matrix} \lambda_0 & \mu_0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_s & \mu_s \end{matrix} \end{array} \right) \end{array} \right] \rangle = \text{rg}_{\mathbb{C}} O/J. f(0)$$

La proposition 2.1 entraîne que le premier membre de cet égalité est aussi

$$\langle f \bmod K, \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} (-1)^{s+1} \sum_{k=1}^{s+1} (-1)^{s-1} f_{k-1} \left\{ \sum_{i=1}^s (-1)^s dg_i \wedge dr_{k-1}^i - dh_1 \wedge d\lambda_{k-1} + dh_0 \wedge d\mu_{k-1} \right\} \\ h_0, h_1 \end{array} \right]$$

Au total,

$$\langle f \bmod I, \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \cdot, \Sigma df_i \wedge dr_i^k, \cdot \\ (r_j^i) \end{array} \right] \rangle + \text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/\mathcal{J} \cdot f(0) =$$

$$\langle f \bmod K, \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} (-1)^s \left\{ \sum_{k=1}^s g_k \sum_{i=0}^s df_i \wedge dr_i^k + \sum_{k=0}^s f_k \sum_{i=1}^s dg_i \wedge dr_k^i \right\} + \sum_{k=0}^s f_k (-dh_1 \wedge d\lambda_k + dh_0 \wedge d\mu_k) \\ h_0 \qquad \qquad \qquad h_1 \end{array} \right] \rangle$$

La forme différentielle intervenant dans ce résidu est alors la somme des termes η_1, η_2, η_3

$$\eta_1 = (-1)^s \sum_{k=1}^s g_k \sum_{i=0}^s df_i \wedge dr_i^k = (-1)^s \sum_{i=0}^s df_i \wedge \left(\sum_{k=1}^s g_k dr_i^k \right)$$

$$\eta_2 = (-1)^s \sum_{k=0}^s f_k \sum_{i=1}^s dg_i \wedge dr_k^i = (-1)^s \sum_{k=1}^s dg_k \wedge \left(\sum_{i=0}^s f_i dr_i^k \right)$$

$$\eta_3 = \sum_{i=0}^s f_i (-dh_1 \wedge d\lambda_i + dh_0 \wedge d\mu_i) .$$

Différentiant successivement chaque relation entre $g_1, \dots, g_s, h_0, h_1$, on a

$$\sum_{k=1}^s g_k dr_i^k + \sum_{k=1}^s r_i^k dg_k + (-1)^{s+1} h_1 d\lambda_i + (-1)^{s+1} \lambda_i dh_1 + (-1)^s h_0 d\mu_i + (-1)^s \mu_i dh_0 = 0 .$$

On a aussi

$$\sum_{i=0}^s f_i dr_i^k + \sum_{i=0}^s r_i^k df_i = 0 .$$

Il vient alors

$$\eta_1 \equiv (-1)^{s+1} \sum_{i=0}^s df_i \wedge \left(\sum_{k=1}^s r_i^k dg_k \right) + \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i df_i \right) \wedge dh_1 - \left(\sum_{i=0}^s \mu_i df_i \right) \wedge dh_0 \bmod K\Omega^2$$

$$\eta_2 = (-1)^{s+1} \sum_{k=1}^s dg_k \wedge \left(\sum_{i=0}^s r_i^k df_i \right)$$

Au total,

$$\begin{aligned} \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 &\equiv \left(\sum_{i=0}^s \lambda_i df_i \right) \wedge dh_1 - \left(\sum_{i=0}^s \mu_i df_i \right) \wedge dh_0 \\ &\quad + \left(\sum_{i=0}^s f_i d\lambda_i \right) \wedge dh_1 - \left(\sum_{i=0}^s f_i d\mu_i \right) \wedge dh_0 \quad \bmod K\Omega^2 \\ &\equiv dh_0 \wedge dh_1 - dh_1 \wedge dh_0 = 2dh_0 \wedge dh_1 \end{aligned}$$

et h_0, h_1 formant une suite régulière, on sait que

$$\langle f \bmod K, \begin{bmatrix} dh_0 \wedge dh_1 \\ h_0 \quad h_1 \end{bmatrix} \rangle = \operatorname{rg}_{\mathbb{C}} O/K \cdot f(0) .$$

On conclut en utilisant 2.2.

Remarquons que le cas $t=1$ lui-même est réglé par ce calcul. En effet, si I est engendré par f_0, \dots, f_s et aussi par h_0, h_1 une suite régulière, alors $K=I$, $J=O$. Mais alors, il est clair que l'hypothèse de récurrence s'applique à J . En effet, $\operatorname{rg}_{\mathbb{C}} O/J = 0$ et la forme dont on calcule le résidu est du type $\sum f_i \alpha_i$. Or, chaque f_i s'exprime en fonction de h_0 et h_1 .

§ 3. - $n=3$. CAS DES GERMES DE COURBES GAUCHES.

Soit $(C, \underline{0})$ un germe de courbe réduite, donc Cohen-Macaulay dans $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$. Soit $p: \bar{C} \rightarrow C$ la normalisation de C un représentant de $(C, \underline{0})$. On sait (cf. [2]) qu'il existe un unique isomorphisme de $\Omega_{\bar{C}}^1$ dans $\operatorname{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C)$ respectant les structures de Modules dualisants respectives sur $\Omega_{\bar{C}}^1$ et $\operatorname{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C)$ et qu'on appelle $\operatorname{Tr} p: p_* \Omega_{\bar{C}}^1 \rightarrow \omega_C$ le morphisme composé $p_* \Omega_{\bar{C}}^1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C) \rightarrow \omega_C$. Comme dans le cas des germes de courbes planes ou plus généralement intersections complètes, on peut expliciter l'application naturelle $\varpi_C: \Omega_C^1 \rightarrow p_* \Omega_{\bar{C}}^1 \rightarrow \omega_C$ qui en résulte.

3.1. PROPOSITION. - Soit (x_1, x_2, x_3) un système de coordonnées au voisinage de $\underline{0}$ dans \mathbb{C}^3 . Soit I l'idéal de $\mathbb{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ définissant $(C, \underline{0})$. Soit f_0, \dots, f_s un système de générateurs de I , r^1, \dots, r^s un système de générateurs des relations tel que $f_i = \det(r^1, \dots, r^s, e_i)$

$$\varpi_C(dx_j) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dots, dx_j \wedge \left(\sum_{i=0}^s df_i \wedge dr_i^k \right), \dots \\ (r_j^i) \end{bmatrix} \quad j=1 \dots 3 .$$

Démonstration : comme pour le théorème 2.3, nous allons utiliser le théorème de liaison locale de Peskine-Szpiro [3] th. 3.3. Ici, C étant réduit est donc génériquement intersection complète. Il existe alors des quotients de codimension 2 de O , $O/I_1, \dots, O/I_t$ tels que :

- a) pour $i < t$, O/I_i et O/I_{i+1} sont liés géométriquement ;
- b) $I = I_1$ et O/I_t est une intersection complète.

Désignons par C_2 la courbe définie par I_2 et par V la courbe intersection complète telle que $V = C \cup C_2$. Soit $p_2 : \bar{C}_2 \rightarrow C_2$ la normalisation de C_2 .

Pour conclure après un raisonnement par récurrence et un calcul identique à celui de 2.3, il suffit de se convaincre que

$$\varphi_C(dx_j|C) + \varphi_{C_2}(dx_j|C_2) = \varphi_V(dx_j|V)$$

ω_C et ω_{C_2} étant vus comme des sous-Modules de ω_V par l'inclusion naturelle. On sait en effet que h_0, h_1 étant des équations de V

$$\varphi_V(dx_j|V) = \begin{bmatrix} dx_j \wedge dh_0 \wedge dh_1 \\ h_0 \quad h_1 \end{bmatrix}$$

Or, considérons d'une part $\varphi_V : \Omega_V^1 \rightarrow \omega_V$ et d'autre part $\psi : \Omega_V^1 \rightarrow \omega_V$ tel que $\psi(\eta) = \varphi_C(\eta|C) + \varphi_{C_2}(\eta|C)$. Si $x \in V$, $x \neq \underline{0}$, le germe en x de $\varphi_V - \psi$ est nul. Mais \bar{V} étant intersection complète est de Gorenstein. Localement ω_V est isomorphe à \mathcal{O}_V et V étant réduit $\varphi_V = \psi$.

3.2. Considérons encore V une courbe intersection complète en $\underline{0}$ et D telles que C et D soient géométriquement liées par V . Soit $p : \bar{C} \rightarrow C$ la normalisation de C et x_1, \dots, x_r les points de \bar{C} au-dessus de $\underline{0}$.

Nous avons remarqué (1.4) que $\omega_C \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1}$ s'identifie à un sous-Module de \mathcal{O}_C . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 p_* \Omega_{\bar{C}}^1 \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1} \simeq \text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C) \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1} & \longrightarrow & \text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \mathcal{O}_C) \\
 \text{Trp} \otimes \text{Id} \downarrow & & \downarrow \\
 \omega_C \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C
 \end{array}$$

(où tous les morphismes sont injectifs).

3.2.1. DEFINITION. - $\text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \mathcal{O}_C)$ s'identifie à un Idéal de \mathcal{O}_C qu'on appelle le conducteur de p et que nous désignerons par \mathfrak{C} . $\text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C) \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1}$ s'identifie à un Idéal de \mathcal{O}_C que nous appellerons conducteur d'adjonction de p relativement à V et que nous désignerons par \mathfrak{a}_V . Evidemment $\mathfrak{a}_V \subset \mathfrak{C}$.

3.2.2. Notation : identifiant $\mathcal{O}_{\bar{C}, x_i}$ à $\mathbb{C}\{t_i\}$, nous désignerons par c_i (resp. a_i) l'entier positif tel que $\mathfrak{C} \cdot \mathcal{O}_{\bar{C}, x_i} = t_i^{c_i} \mathbb{C}\{t_i\}$ (resp. $\mathfrak{a}_V \cdot \mathcal{O}_{\bar{C}, x_i} = t_i^{a_i} \mathbb{C}\{t_i\}$). $c = \sum_{i=1}^r c_i$ (resp. $a = \sum_{i=1}^r a_i$) est la multiplicité de $\mathfrak{C}_{\underline{0}}$ (resp. $\mathfrak{a}_{V, \underline{0}}$) vu comme un idéal de $\mathcal{O}_{C, \underline{0}}$.

3.3. PROPOSITION. - Les notations sont celles de 3.1 et 3.2. De plus v_i désigne la valuation canonique sur $\mathbb{C}\{t_i\}$ et $h_0 = \sum_{j=0}^s \lambda_j f_j$, $h_1 = \sum \mu_j f_j$ sont les équations de V
 $a_i = v_i \left(\det \frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ p \right) - v_i(x_1 \circ p) + 1$.

Démonstration : considérons le diagramme commutatif de 3.2.

D'après 3.1 :

$$\varphi_C(dx_1) = \text{Trp}(dx_1 \circ p) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dots, dx_1 \wedge \left(\sum_{i=0}^s df_i \wedge dr_i^k \right), \dots \\ (r_j^i) \end{bmatrix}$$

Nous identifions localement au voisinage de $\underline{0} \in \mathcal{O}_V$ à ω_V par l'iso-

morphisme $h \rightsquigarrow \begin{bmatrix} hdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ h_0 & h_1 \end{bmatrix}$. Alors g_1, \dots, g_s étant définis

comme dans 1.2, l'image dans \mathcal{O}_C de $\text{Tr}(dx_1 \circ p) \otimes 1$ est dans la forme :

$$\frac{1}{2} \cdot (-1)^s \cdot \sum_{k=1}^s g_k \left(dx_1 \wedge \left(\sum_{i=0}^s df_i \wedge dr_i^k \right) \right) | C$$

l'élément de \mathcal{O}_C figurant devant $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 | C$. Or, le calcul effectué en 2.3 montre qu'il s'agit en fait de la forme

$$dx_1 \wedge dh_0 \wedge dh_1 | C = \det \frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 | C.$$

Or $(p_* \Omega_C^1 \otimes_{\mathcal{O}_V} \omega_V^{-1}) \cdot \mathcal{O}_{\bar{C}, x_i}$ est engendré en tant que $\mathcal{O}_{\bar{C}, x_i}$ -module par $dt_i \otimes 1$. a_i est donc la valuation dans $\mathbb{C}\{t_i\}$ de l'image de $\text{Tr}(dt_i) \otimes 1$ et le calcul ci-dessus donne le résultat annoncé.

3.4. COROLLAIRE. - Dans la situation de 3.2, désignant par n la multiplicité de C en $\underline{0}$, par Δ_V la multiplicité de l'idéal restriction à C de l'idéal jacobien de V (le 2e idéal de Fitting de Ω_V^1), par r le nombre de composantes irréductibles de C , on a

$$\Delta_V = a + n - r.$$

Démonstration : choisissons un système de coordonnées tel que x_1 soit un paramètre transversal à V . Alors $n = \sum_{i=1}^r v_i(x_1 \circ p)$.

On sait que $J = F^2(\Omega_V^1)$ est la restriction à V de l'idéal engendré par les 2-mineurs de la matrice jacobienne $\frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$. Soit

$\pi : \bar{V} \rightarrow V$ la normalisation de V ; $\bar{V} = \bar{C} \amalg \bar{D}$. Soit x_i , $i=r+1 \dots t$, les points de \bar{V} qui s'envoient sur $\underline{0}$ et n'appartiennent pas à \bar{C} .

Soit v_i la valuation naturelle sur $\mathbb{C}\{t_i\} \simeq \mathcal{O}_{\bar{V}, x_i}$ $i=1 \dots t$. x_1 étant un paramètre transversal, on a :

$$v_i \frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ \pi = \inf v_i \frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(x_{i_1}, x_{i_2})} \circ \pi \quad i=1 \dots t.$$

Le corollaire est alors une conséquence immédiate de 3.3 et du corollaire 1 théorème 24 [5].

3.5. PROPOSITION. - Soit $(C, \underline{0})$ un germe de courbe réduite dans $(\mathbb{C}^3, \underline{0})$, $(V, \underline{0})$ un germe d'intersection complète contenant C et $(D, \underline{0})$ un germe de courbe tel que C et D soient géométriquement liés par V . Soit $p : \bar{C} \rightarrow C$ la normalisation de C , x_1, \dots, x_r les points de \bar{C} au-dessus de $\underline{0}$. Les notations étant celles de 3.1, l'application

$$(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}})_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{C, \underline{0}} \times \omega_{C, \underline{0}} / (p_* \Omega_{\bar{C}}^1)_{\underline{0}} \rightarrow \mathbb{C}$$

qui à f germe de section de $\mathcal{O}_{\bar{C}}$ au voisinage de $p^{-1}(\underline{0})$

et $\left[\begin{array}{c} \dots, u_k dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \dots \\ (r_j^i) \end{array} \right]$ germe de section de ω_C au voisinage de $\underline{0}$

fait correspondre :

$$\sum_{i=1}^r \text{res}_{x_i} \frac{(-1)^s f \left(\sum_{k=1}^s g_k u_k \right) \circ p \, dx_1 \circ p}{\frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ p}$$

où (h_0, h_1) est un système d'équations de V et $(h_0, h_1, g_1, \dots, g_s)$ le système d'équations de D déterminé en 1.2, est un accouplement parfait.

Démonstration : C étant Cohen-Macaulay, il existe un isomorphisme canonique entre $(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}})_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{C, \underline{0}}^*$ et $\text{Ext}^1 \left((p_* \mathcal{O}_{\bar{C}})_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{C, \underline{0}}, \omega_{C, \underline{0}} \right)$ et le calcul effectué ([2] lemme 6.1) montre que ce dernier est isomorphe à $\omega_{C, \underline{0}} / (p_* \Omega_{\bar{C}}^1)_{\underline{0}}$. Il suffit donc de montrer que cet isomorphisme est défini comme indiqué par la formule ci-dessus.

Or, désignant par $\pi : \bar{V} \rightarrow V$ la normalisation de V , l'inclusion de C dans V induit un morphisme : $\pi_* \mathcal{O}_{\bar{V}} / \mathcal{O}_V \rightarrow p_* \mathcal{O}_{\bar{C}} / \mathcal{O}_C$.

Elle induit également un morphisme $\omega_C / \text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C) \rightarrow \omega_V / \text{Hom}(\pi_* \mathcal{O}_{\bar{V}}, \omega_V)$.

On sait maintenant que l'isomorphisme entre $(\pi_* \mathcal{O}_{\bar{V}})_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{V, \underline{0}}^*$ et $\text{Ext}^1 \left((\pi_* \mathcal{O}_{\bar{V}})_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{V, \underline{0}}, \omega_{V, \underline{0}} \right)$ est induit par l'accouplement qui à f germe de section de $\mathcal{O}_{\bar{V}}$ au voisinage de $\pi^{-1}(\underline{0})$ et $\begin{bmatrix} u & dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ h_0 & h_1 \end{bmatrix}$ germe de section de ω_V au voisinage de $\underline{0}$ fait correspondre

$$\sum_{i=1}^t \text{res}_{x_i} \frac{f u \circ \pi d(x_1 \circ \pi)}{\frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ \pi}$$

où $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_t$ sont les points de \bar{V} au-dessus de $\underline{0}$. Il suffit alors de se rappeler la forme explicite (1.1) de l'injection de ω_C dans ω_V .

3.6. COROLLAIRE. - Dans la situation de 3.5

$$a_i - c_i = \inf_{k=1 \dots s} v_i(g_k \circ p) .$$

Démonstration : nous allons d'abord montrer que

$a_i - c_i \leq \inf v_i(g_k \circ p)$. En effet, soit

$$\eta_k = \left[\begin{array}{c} \dots, 0, \dots, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \dots, 0, \dots \\ (r_j^i) \end{array} \right] \in \omega_{C, \underline{0}}$$

où $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ figure à la k-ième place. Soit $f \in \mathbb{C}_{\underline{0}}$. $f \eta_k$ définit un élément de $\text{Hom} \left(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C \right)_{\underline{0}}$. Donc $f g_k \in \mathcal{O}_{V, \underline{0}}$ et $v_i(f \circ p g_k \circ p) \geq a_i$ $i=1 \dots r$ par définition. Or, il existe $f \in \mathbb{C}_{\underline{0}}$ tel que $v_i(f \circ p) = c_i$.

Identifions maintenant $(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}})_{\underline{0}}$ à $\mathbb{C}\{t_1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_r\}$.

$t_i^{c_i-1}$ ne provient pas d'un élément de $\mathcal{O}_{C, \underline{0}}$. Il existe alors d'après

3.5, u_1, \dots, u_s dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, \underline{0}}$ tels que

$$\text{res}_{x_i} \frac{t_i^{c_i-1} \left(\sum_{k=1}^s g_k u_k \circ p \right) d(x_1 \circ p)}{\frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ p} \neq 0 .$$

$$\text{Or, } a_i = v_i \left(\frac{\partial(h_o, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ p \right) - v_i(x_1 \circ p) + 1 .$$

Nous avons donc à calculer le résidu d'une 1-forme qui s'écrit

$$\left(\sum_{k=1}^s g_k u_k \circ p \right) t_i^{c_i - a_i - 1} dt_i \text{ et nous venons de constater que } v_i \left(\sum_{k=1}^s g_k u_k \circ p \right) \geq a_i - c_i .$$

Le résidu de cette forme ne peut être non nul que si il existe u_1, \dots, u_s tels que $v_i \left(\sum_{k=1}^s g_k u_k \circ p \right) = a_i - c_i$, ce qui entraîne immédiatement qu'il existe k tel que $v_i(g_k \circ p) = a_i - c_i$.

3.7. COROLLAIRE. - Dans la situation de 3.5, soit Q l'idéal de $\mathcal{O}_{C, \underline{0}}$ définissant $C \cap D$ dans C en $\underline{0}$
 $a - c = \text{mult } Q$.

Démonstration : Q est engendré par $g_1, \dots, g_s, h_o, h_1$. C'est encore une conséquence de corollaire 1, théorème 24 [5].

3.8. COROLLAIRE. - Toujours dans la situation de 3.5, supposons de plus C analytiquement irréductible en $\underline{0}$. Soit Γ le semi-groupe des valeurs de $\mathcal{O}_{C, \underline{0}} = \{v(f \circ p) \mid f \in \mathcal{O}_{C, \underline{0}}\}$. g_1, \dots, g_s étant définis comme en 1.2, soit $S_V = \{v \left(\sum_{k=1}^s g_k \ell_k \circ p \right) \mid \ell_k \in \mathcal{O}_{C, \underline{0}}\}$.
Alors $\tau + a - c \in S_V \Leftrightarrow c - 1 - \tau \notin \Gamma \quad 0 \leq \tau \leq c - 1$.

Démonstration : supposons $\tau + a - c \in S_V$. Il existe $\ell_1, \dots, \ell_s \in \mathcal{O}_{C, \underline{0}}$ tels que $v(\sum g_k \ell_k \circ p) = \tau + a - c$. Montrons que $c - 1 - \tau \in \Gamma$ est impossible. En effet, il existerait $f \in \mathcal{O}_{C, \underline{0}}$ tel que $v(f) = c - 1 - \tau$ et on aurait

$$\text{res } \frac{f(\sum g_k \ell_k \circ p) d(x_1 \circ p)}{\frac{\partial(h_o, h_1)}{\partial(x_2, x_3)} \circ p} = 0 .$$

Or, la valuation de cette forme est $v(f) + v(\sum g_k \ell_k \circ p) - a$ d'après 3.3

et donc $c-1-\tau+\tau+a-c-a = -1$ à cause des hypothèses. Cette forme n'aurait donc pas un résidu nul.

Il suffit maintenant de constater que le nombre des $\mu \in S_V$ tels que $a-c \leq \mu \leq a-1$ est égal au nombre des $\tau \notin \Gamma$ tels que $0 \leq \tau \leq c-1$. Or, ce dernier est égal à $\delta = \ell g(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}})_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{C, \underline{0}}$. Quant au premier, c'est $\ell g \omega_{C, \underline{0}} / p_* \Omega_{\bar{C}, \underline{0}}^1 = \delta$.

3.9. PROPOSITION. - Dans la situation de 3.5 et 3.7, si μ désigne le nombre de Milnor de C en $\underline{0}$

$$\mu = c + \text{mult } Q - \text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C, \underline{0}} / Q - r + 1$$

où Q est l'idéal de $\mathcal{O}_{C, \underline{0}}$ définissant $C \cap D$ dans C en $\underline{0}$, D étant n'importe quelle courbe liée géométriquement à C dans une intersection complète.

Démonstration : par définition $\mu = 2\delta - r + 1$ où r désigne le nombre de branches de C (voir [1]).

D'après 3.5,

$$\begin{aligned} \delta &= \ell g(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}})_{\underline{0}} / \mathcal{O}_{C, \underline{0}} = \ell g \omega_{C, \underline{0}} / \text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C)_{\underline{0}} \\ &= \ell g(\omega_C \otimes \omega_V^{-1})_{\underline{0}} / [\text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C) \otimes \omega_V^{-1}]_{\underline{0}} \\ &= -2g \mathcal{O}_{C, \underline{0}} / [\omega_C \otimes \omega_V^{-1}]_{\underline{0}} + \ell g \mathcal{O}_{C, \underline{0}} / [\text{Hom}(p_* \mathcal{O}_{\bar{C}}, \omega_C) \otimes \omega_V^{-1}]_{\underline{0}} \\ &= -\text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C, \underline{0}} / Q - \delta + a . \end{aligned}$$

On en déduit $2\delta = a - \text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C, \underline{0}} / Q = c + \text{mult } Q - \text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C, \underline{0}} / Q$

$$\mu = c - r + 1 + \text{mult } Q - \text{rg}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{C, \underline{0}} / Q .$$

3.7. Un exemple : soit $(C, \underline{0})$ la courbe définie par $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$. Son idéal est engendré par 3 générateurs $f_0 = y^2 - xz$,

$f_1 = x^3 - yz$, $f_2 = z^2 - x^2y$ lié par 2 relations $r^1 = (z, y, x)$,
 $r^2 = (x^2, z, y)$. Soit V la courbe intersection complète définie par
 $h_0 = \sum \lambda_i f_i$, $h_1 = \sum \mu_i f_i$, $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$. La courbe D liée à V a
alors pour équations

$$g_1 = -x^2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) + z(\lambda_0\mu_2 - \lambda_2\mu_0) - y(\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1)$$

$$g_2 = z(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2) - y(\lambda_0\mu_2 - \lambda_2\mu_0) + x(\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1)$$

$$\det \frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(y, z)} = (\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1)(xz - 2y^2)$$

$$+ (\lambda_0\mu_2 - \lambda_2\mu_0)(4yz - x^3) - (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(yx^2 + 2z^2)$$

On a donc,

si $\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1 \neq 0$ $a_V = 8 - 3 + 1 = 6$

si $\lambda_0\mu_1 - \mu_0\lambda_1 = 0$ $a_V = 9 - 3 + 1 = 7$.

Dans le premier cas, $a_V - c = 3$, dans le second cas $a_V - c = 4$.
On a évidemment $c = 3$ et $\mu = 4 = \mathcal{O}_V - \text{rg } \mathcal{O}_{C \cap D, 0} = 6 - 2 = 7 - 3$.
Le premier cas est le cas général où la tangente à C est distincte de la
tangente à D . Dans le second cas C et D ont même tangente .

REFERENCES.

[1] R.O. BUCHWEITZ et G.M. GREUEL : Le nombre de Milnor, équisingularité et déformations de singularités de courbes réduites, CRAS 288 - (35-38) 1979.

[2] M. LEJEUNE-JALABERT : Le théorème "AF + BG" de Max-Noether (à paraître).

[3] C. PESKINE - L. SZPIRO : Liaison des variétés algébriques I . Inventiones math. 26, 271-302 (1974).

[4] J.P. SERRE : Sur les modules projectifs, séminaire Dubreil-Pisot, 60-61, n° 2.

[5] O. ZARISKI, P. SAMUEL : Commutative algebra, Van Nostrand.