

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

A. KANEKO

Chapitre VII. Résolutions de De Rham et de Dolbeault

Cours de l'institut Fourier, tome 13 (1977-1978), p. 1-24

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__13__A4_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE VII. RESOLUTIONS DE DE RHAM ET DE DOLBEAULT

1. Cohomologie à supports compacts

Pour l'étude algébrique d'hyperfonctions, il est commode d'exprimer la définition d'intégrale en terme de cohomologie. Il faut aussi savoir quelques terminologies pour lire la littérature courante. C'est pourquoi on met ici un paragraphe qui n'est pas indispensable pour la suite. Cependant pour éviter d'être pédant, on se limitera au cas générique. commençons par

Définition 7.1.1 Soit X un espace topologique, soit $U \subset X$ un ouvert. Un ensemble \mathfrak{F} de parties fermées de U sera dit une famille de supports de U si

- a) toute partie fermée d'un élément de \mathfrak{F} est encore dans \mathfrak{F} ,
- b) \mathfrak{F} est clos par la réunion finie.

Définition 7.1.2 Soit \mathcal{F} un faisceau sur X . Soit $U \subset X$ un ouvert et soit \mathfrak{F} une famille de supports de U . On posera

$$(7.1) \quad \Gamma_{\mathfrak{F}}(U, \mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{F}(U); \text{supp } f \in \mathfrak{F}\}.$$

Soit de plus $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^{\bullet}(\mathcal{F})$ la résolution flasque canonique de \mathcal{F} . On posera

$$(7.2) \quad H_{\mathfrak{F}}^k(U, \mathcal{F}) = H^k(\Gamma_{\mathfrak{F}}(U, C^{\bullet}(\mathcal{F}))).$$

Avec l'inclusion naturelle $\Gamma_K(U, \mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma_L(U, \mathcal{F})$ pour $K \subset L$, la donnée $\mathfrak{F} \ni K \mapsto \Gamma_K(U, \mathcal{F})$ constitue un système inductif d'espaces vectoriels. Il est clair que

$$(7.3) \quad \Gamma_{\mathfrak{F}}(U, \mathcal{F}) = \varinjlim_{K \in \mathfrak{F}} \Gamma_K(U, \mathcal{F}).$$

En vertu du Lemme 4.2.5 on a donc

$$(7.4) \quad H_{\mathfrak{F}}^k(U, \mathcal{F}) = \varinjlim_{K \in \mathfrak{F}} H_K^k(U, \mathcal{F}).$$

Grâce à l'exactitude de la limite inductive, tous les résultats donnés dans le Chapitre IV concernant H_K^k peut donc se transporter sur $H_{\mathfrak{F}}^k$. En particulier on a toujours $H_{\mathfrak{F}}^0(U, \mathcal{F}) = \Gamma_{\mathfrak{F}}(U, \mathcal{F})$ et si \mathcal{F} est flasque $H_{\mathfrak{F}}^k(U, \mathcal{F}) = 0$ pour $k \geq 1$.

Soit $K \subset U$ un fermé. Si on prend comme un cas particulier $\mathfrak{F} = \{\text{tous les fermés de } U \text{ contenus dans } K\}$, on a $H_{\mathfrak{F}}^k(U, \mathcal{F}) = H_K^k(U, \mathcal{F})$. Un exemple non banal de \mathfrak{F} est celui constitué par tous les compacts contenus dans U .^(*) Le groupe de cohomologie correspondant sera alors noté $H_c^k(U, \mathcal{F})$ et appelé la cohomologie à supports compacts.

Exercice Soit $K \subset U$ un compact. Démontrer la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma_c(U \setminus K, \mathcal{F}) &\longrightarrow \Gamma_c(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(K, \mathcal{F}) \\ &\longrightarrow H_c^1(U \setminus K, \mathcal{F}) \longrightarrow H_c^1(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(K, \mathcal{F}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

(Remarquons que pour un compact K on a toujours $H^k(K, \mathcal{F}|_K) = \varinjlim_{V \supset K} H^k(V, \mathcal{F})$. Voir la démonstration de la Proposition 4.6.6. Donc la notation $H^k(K, \mathcal{F})$ ne produit pas d'ambiguïté.)

Exercice Soit E le faisceau des germes de fonctions C^∞ sur une variété différentiable M . Montrer $H_c^k(M, E) = 0$ pour $k \geq 1$. (Remarquons que pour un fermé fixe $K \neq \emptyset$, M on a $H_K^1(M, E) \neq 0$.)

Voici une application à l'image directe.

Définition 7.1.3 Soient X, Y des espaces topologiques, $f: X \rightarrow Y$ une application continue et soit \mathcal{F} un faisceau sur X . Nous désignons par $R^k f_! (\mathcal{F})$ le faisceau associé à préfaisceau

$$Y \supset U \longmapsto H_{\mathfrak{F}_U}^k(f^{-1}(U), \mathcal{F}),$$

où \mathfrak{F}_U est la famille de supports de $f^{-1}(U)$ formée des fermés sur lesquelles f est propre, i.e. l'ensemble des fermés $A \subset f^{-1}(U)$ tels que $A \cap f^{-1}(K)$ soit compact pour tout compact $K \subset U$. $R^k f_!$ est appelé la k -ième image directe à supports propres.

Exercice $f_! = R^0 f_!$ est un foncteur exact à gauche, et $R^k f_!$ est le k -ième dérivé de $f_!$ à droite. Ainsi pour $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ une suite exacte de faisceaux sur X , on a la suite exacte sur Y :

$$(7.5) \quad 0 \rightarrow f_! \mathcal{F}' \rightarrow f_! \mathcal{F} \rightarrow f_! \mathcal{F}'' \rightarrow R^1 f_! \mathcal{F}' \rightarrow R^1 f_! \mathcal{F} \rightarrow R^1 f_! \mathcal{F}'' \rightarrow \dots$$

^(*) Bien entendu, nous pouvons poser une fois pour toutes l'hypothèse que l'espace soit séparé, ce qui n'est pas du tout chère pour nous. Cela assurera qu'un compact est toujours fermé. D'ailleurs, on supposera ci-dessous essentiellement que l'espace est paracompact et localement compact.

On a aussi $R^k f_! \mathcal{F} = H^k(f_!, \mathcal{L}^\bullet)$ si $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$ est une résolution flasque.

Bien entendu, tous ceux se ramènent à $R^k f_{\#}$ si f est lui-même propre. Notons aussi que dans le cas où Y se réduit à un point, on a $R^k f_! \mathcal{F} = H_c^k(X, \mathcal{F})$. Calculons un exemple.

Proposition 7.1.4 Soit $G_{R^{n+d}}$ le faisceau constant à fibre G sur R^{n+d} . Soit $f: R^{n+d} \rightarrow R^d$ la projection. On a alors

$$(7.6) \quad R^k f_!(G_{R^{n+d}}) = \begin{cases} G_{R^n} & \text{pour } k = d, \\ 0 & \text{pour } k \neq d. \end{cases}$$

Démonstration Soit D une boule ouverte centrée à l'origine de R^n . On a alors

$$R^k f_!(G_{R^{n+d}})(D) = \varinjlim_K H_K^k(D \times R^d, G),$$

où $K \subset D \times R^d$ sont tels que $f|_K$ soit propre. Parmi eux constituent un système cofinal les K 's qui s'écrivent à la forme

$$\{(x, y) \in D \times R^d; |y| \leq \varphi(x)\},$$

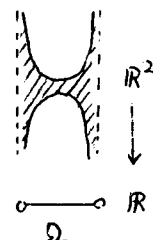
où $\varphi(x)$ est une fonction continue à valeurs positives. Pour un tel K l'inclusion naturelle $i: D \times R^d \setminus K \rightarrow D \times (R^d \setminus \{0\})$ admet une réciproque d'homotopie, i.e. une application continue $j: D \times (R^d \setminus \{0\}) \rightarrow D \times R^d \setminus K$ telle que $j \circ i \simeq \text{id}$, $i \circ j \simeq \text{id}$. (En effet il suffit de poser $j(x, y) = (x, (1 + \varphi(x))y)$.) Donc d'après le Théorème 4.7.5 et le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^{k-1}(D \times R^d \setminus K, G) & \rightarrow & H_K^k(D \times R^d, G) & \rightarrow & H^k(D \times R^d, G) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \dots & \rightarrow & H^{k-1}(D \times (R^d \setminus \{0\}), G) & \rightarrow & H_{D \times \{0\}}^k(D \times R^d, G) & \rightarrow & H^k(D \times R^d, G) \rightarrow \dots \end{array}$$

on obtient $H_K^k(D \times R^d, G) = H_{D \times \{0\}}^k(D \times R^d, G)$. En vertu du calcul de la Proposition 4.7.7, on obtient donc (7.6). C.Q.F.D.

Remarque Rappelons que le calcul ci-dessus est basé sur l'isomorphisme $H^n(S^n, G) \cong G$ donné dans la Proposition 4.7.6, ce qui dépend de l'orientation de S^n . Donc (7.6) aussi dépend de l'orientation de la fibre R^d .

Contre le cas $f_{\#}$, pour un faisceau flasque \mathcal{F} , $f_! \mathcal{F}$ n'en est plus un. (Voir la figure qui clarifie la raison.) Tout de même il devient un faisceau cohomologiquement assez trivial. Pour le préciser, introduisons la



Définition 7.1.5 On dit que le faisceau \mathcal{F} sur X est mou si toute section $s \in \mathcal{F}(S)$ sur un fermé $S \subset X$ se prolonge à X .

Ici par définition

$$(7.7) \quad \mathcal{F}(S) = \Gamma(S, \mathcal{F}|_S).$$

Si les ouverts de X sont tous paracompacts (séparés), ceci est aussi égal à $\varinjlim_{U \supset S} \mathcal{F}(U)$ d'après la Proposition 4.6.6. Sur un tel espace X , un faisceau flasque est donc manifestement mou. Le faisceau E des germes de fonctions C^∞ sur une variété M est un exemple important de faisceaux mous. En généralisant les Exercices sur ce faisceau E (voir celui à la fin du §5, Chapitre IV et celui ci-dessus), on constate facilement le

Théorème 7.1.6 Soit \mathcal{F} un faisceau mou sur un espace paracompact et localement compact (séparé) X . On a alors $H^k(X, \mathcal{F}) = H_c^k(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $k \geq 1$.

Avec cette notion on a le

Lemme 7.1.7 Soit \mathcal{F} un faisceau mou sur un espace paracompact et localement compact (séparé) X . Alors pour tout fermé $S \subset X$, $\mathcal{F}|_S$ est encore mou. Soit en plus $f: X \rightarrow Y$ une application continue λ à un autre espace du même type. Alors $f_! \mathcal{F}$ est un faisceau mou sur Y .

La démonstration est évidente. Remarquons que grâce à ces propriétés on peut calculer pour un tel espace X $H_c^k(X, \mathcal{F})$ ou $f_! \mathcal{F}$ par une résolution $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$ avec les termes mous.

Donnons maintenant l'analogie du Théorème 4.6.7.

Théorème 7.1.8 Soient X, Y, Y' paracompacts et localement compacts. Soient $f: X \rightarrow Y, g: Y' \rightarrow Y$ des applications continues. Posons

$$(7.8) \quad X' = X \times_Y Y' = \{(x, y') \in X \times Y'; f(x) = g(y')\}$$

(produit fibré). Soient $f': X' \rightarrow Y', g': X' \rightarrow X$ les projections naturelles. On a alors

$$(7.9) \quad g^{-1} R^k f_! (\mathcal{F}) \simeq R^k f'_! (g'^{-1} \mathcal{F}).$$

En particulier, en prenant $Y' = \{y'\} \subset Y$ on a

$$(7.10) \quad R^k f_! (\mathcal{F})_y \simeq H_c^k(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}).$$

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \downarrow g' & & \downarrow g \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Démonstration Montrons d'abord

$$(7.11) \quad f_!(\mathcal{F})_y \xrightarrow{\sim} \Gamma_c(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}).$$

Le fait que c'est injectif s'ensuit de la Proposition 4.6.6. Soit réciproquement $s \in \Gamma_c(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)})$ et posons $K = \text{supp}(s)$. Par la même proposition il existe un prolongement \tilde{s} de s à un voisinage U de $f^{-1}(y)$. Soit $S \subset U$ un voisinage compact de K dont l'existence est assurée par la compacité locale de X . Alors l'application $f|_S$ est évidemment propre, donc fermée. Puisque $\text{supp } \tilde{s} \cap f^{-1}(y) = K$, il existe ainsi un voisinage V de y tel que $\tilde{s} = 0$ au voisinage de $\partial S \cap f^{-1}(V)$. Prenons donc le prolongement par zéro $\tilde{\tilde{s}}$ de $\tilde{s}|_{S \cap f^{-1}(V)}$ à $f^{-1}(V)$. Il est clair que $\tilde{\tilde{s}} \in \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F})$ est un prolongement de s tel que $f|_{\text{supp } \tilde{\tilde{s}}}$ soit propre.

Soit donc $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$ une résolution flasque. Alors $0 \rightarrow \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet|_{f^{-1}(y)}$ est encore une résolution flasque, et on a l'isomorphisme

$$R^k f_!(\mathcal{F})_y = H^k((f_! \mathcal{L}^\bullet)_y) = H^k(\Gamma_c(f^{-1}(y), \mathcal{L}^\bullet|_{f^{-1}(y)})) = H^k_c(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}),$$

d'où (7.10).

Pour établir (7.9) remarquons d'abord qu'il existe un homomorphisme de faisceaux canonique

$$(7.12) \quad g^{-1} f_! \mathcal{F} \longrightarrow f'_! g'^{-1} \mathcal{F}.$$

Soit $U \subset Y'$ un ouvert. Soit Φ resp. Φ' la famille de supports figurant dans la définition 7.1.3 par rapport à $f: f^{-1}(g(U)) \rightarrow g(U)$ resp. $f': f'^{-1}(U) \rightarrow U$. Remarquons que $f^{-1}(g(U)) = g'(f'^{-1}(U))$ et que $g'^{-1}\Phi \subset \Phi'$. On a alors un homomorphisme bien évident

$$\Gamma_{\Phi}(f^{-1}(g(U)), \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{\Phi'}(f'^{-1}(U), g'^{-1} \mathcal{F})$$

qui est compatible avec la restriction de U . Notons que les deux bouts de cette flèche sont des préfaisceaux auxquels associent les faisceaux $g^{-1} f_! \mathcal{F}$ resp. $f'_! g'^{-1} \mathcal{F}$. D'où on obtient l'homomorphisme (7.12) cherché.

Soit maintenant $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$ une résolution flasque. Notons que la définition de l'homomorphisme (7.12) est fonctorielle, i.e. il induit un morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & g^{-1}f_! \mathcal{F} & \longrightarrow & g^{-1}f_! \mathcal{L}^0 & \longrightarrow & g^{-1}f_! \mathcal{L}^1 \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & f_! g'^{-1} \mathcal{F} & \longrightarrow & f_! g'^{-1} \mathcal{L}^0 & \longrightarrow & f_! g'^{-1} \mathcal{L}^1 \longrightarrow \dots,
\end{array}$$

d'où l'homomorphisme canonique $H^k(g^{-1}f_! \mathcal{L}^\bullet) \rightarrow H^k(f_! g'^{-1} \mathcal{L}^\bullet)$. Or, g^{-1} étant exact on a $H^k(g^{-1}f_! \mathcal{L}^\bullet) = g^{-1}H^k(f_! \mathcal{L}^\bullet) = g^{-1}R^k \mathcal{F}$. Aussi $0 \rightarrow g'^{-1} \mathcal{F} \rightarrow g'^{-1} \mathcal{L}^\bullet$ étant une résolution de $g'^{-1} \mathcal{F}$, il existe un homomorphisme canonique $H^k(f_! g'^{-1} \mathcal{L}^\bullet) \rightarrow R^k f_! (g'^{-1} \mathcal{F})$. (Voir la remarque après le Théorème 4.3.3.) Ainsi on obtient un homomorphisme de faisceaux bien canonique (7.9).

Pour montrer qu'il est un isomorphisme, il suffit de comparer leur fibres. Prenons $y' \in Y'$ et posons $y = g(y')$. D'après la définition du produit fibré on a l'homéomorphisme

$$f'^{-1}(y') \xrightarrow{\cong} f^{-1}(g(y')) = \{x \in X; f(x) = g(y')\}.$$

D'où d'après (7.10) on obtient

$$\begin{aligned}
g^{-1}R^k f_! (\mathcal{F})_{y'} &= R^k f_! (\mathcal{F})_y = H_c^k(f^{-1}(y), \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}) \\
&= H_c^k(f'^{-1}(y'), g'^{-1} \mathcal{F}|_{f'^{-1}(y')}) = R^k f'_! (g'^{-1} \mathcal{F})_{y'}.
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Voici le résultat principal de ce paragraphe:

Théorème 7.1.9 Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre les espaces paracompacts et localement compacts. Soit \mathcal{F} un faisceau sur Y . Il existe alors un isomorphisme canonique

$$(7.13) \quad R^k f_! f^{-1} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{C_Y} R^k f_! C_X.$$

Démonstration Soit $0 \rightarrow C_X \rightarrow C^\bullet$ la résolution flasque canonique de C_X . Alors $0 \rightarrow f^{-1} \mathcal{F} \rightarrow f^{-1} \mathcal{F} \otimes_{C_X} C^\bullet$ est une résolution de $f^{-1} \mathcal{F}$. (En effet, $\mathcal{F} \otimes_{C_X} \mathcal{G}$ est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_C \mathcal{G}(U)$. On a $(\mathcal{F} \otimes_{C_X} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_C \mathcal{G}_x$, d'où \otimes_{C_X} est exact.) Montrons d'abord que $f^{-1} \mathcal{F} \otimes_{C_X} C^j$ sont mous. Il suffit de montrer que pour les faisceaux \mathcal{F}, \mathcal{G} , $\mathcal{F} \otimes_{C_X} C^0(\mathcal{G})$ est mou, où $C^0(\mathcal{G})$ est le premier terme de la résolution canonique de \mathcal{G} , i.e. le faisceau des germes de sections discontinues de \mathcal{G} . Soit s une section sur un fermé $S \subset X$. Elle se prolonge à une section s sur un voisinage $U \supset S$. Dans un voisinage $U_x \subset U$ de chaque point $x \in S$,

\tilde{s} peut se représenter à la forme de somme finie:

$$\sum_j f_{x,j} \otimes g_{x,j},$$

où $f_{x,j} \in \mathcal{F}(U_x)$ et $g_{x,j} \in C^0(\mathcal{O}_y)(U_x)$, i.e. une fonction discontinue $g_{x,j}: U_x \rightarrow \coprod_{y \in U_x} \mathcal{O}_y$. Soit $\{U_\lambda\}$ un raffinement localement fini de $\{U_x\}$ qui recouvre un voisinage de S . Soit $\{\varphi_\lambda(x)\}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_\lambda\}$. (On n'a pas besoin de la continuité de $\varphi_\lambda(x)$!) Soit

$$(7.14) \quad \sum_j f_{\lambda,j} \otimes g_{\lambda,j}$$

l'expression de \tilde{s} sur U_λ induite de celle ci-dessus. Soit enfin $\psi(x)$ une fonction qui vaut 1 au voisinage de S recouvert par $\{U_\lambda\}$, et 0 ailleurs. Posons

$$\tilde{\tilde{s}} = \sum_\lambda \sum_j f_{\lambda,j} \otimes \psi(x) \varphi_\lambda(x) g_{\lambda,j}.$$

On a manifestement $\tilde{\tilde{s}} \in \mathcal{F} \otimes C^0(\mathcal{O}_y)(X)$. Grâce à la compatibilité de (7.14), on peut réécrire au voisinage de chaque point de S les termes dans $\tilde{\tilde{s}}$ à un seul λ . D'où $\tilde{\tilde{s}}|_S = s$.

le Théorème 7.1.8

Ainsi d'après le Théorème 7.1.6, le Lemme 7.1.7 et la remarque là, on peut calculer $R^k f_! f^{-1} \mathcal{F}$ fibre à fibre utilisant cette résolution molle: $0 \rightarrow f^{-1} \mathcal{F} \rightarrow f^{-1} \mathcal{F} \otimes C^\bullet$. On a

$$(7.15) \quad \begin{aligned} (R^k f_! f^{-1} \mathcal{F})_y &= H_c^k(f^{-1}(y), f^{-1} \mathcal{F}|_{f^{-1}(y)}) = H^k(\Gamma_c(f^{-1}(y), f^{-1} \mathcal{F} \otimes C^\bullet|_{f^{-1}(y)})) \\ &= H^k(\mathcal{F}_y \otimes \Gamma_c(f^{-1}(y), C^\bullet|_{f^{-1}(y)})) = \mathcal{F}_y \otimes H_c^k(f^{-1}(y), C) \\ &= \mathcal{F}_y \otimes R^k f_! C_X. \end{aligned}$$

Il reste donc à donner la définition de l'homomorphisme canonique qui induit cet isomorphisme sur chaque fibre. Soit $U \subset Y$ un ouvert. Soit \mathfrak{I} la famille de supports pour U figurant dans la définition de $f_!$. On a une suite d'homomorphismes canoniques:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) \otimes H^k(\Gamma_{\mathfrak{I}}(f^{-1}(U), C^\bullet)) &\xrightarrow{\sim} H^k(\mathcal{F}(U) \otimes \Gamma_{\mathfrak{I}}(f^{-1}(U), C^\bullet)) \\ &\longrightarrow H^k(\Gamma_{\mathfrak{I}}(f^{-1}(U), f^{-1} \mathcal{F} \otimes C^\bullet)) \\ &\xrightarrow{\sim} H_{\mathfrak{I}}^k(f^{-1}(U), f^{-1} \mathcal{F}), \end{aligned}$$

qui donne pour limite un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{F} \otimes R^k f_! C_X \rightarrow R^k f_! f^{-1} \mathcal{F}$.

Il est clair qu'il induit l'isomorphisme (7.15) sur la fibre. Donc il est

inversible et la réciproque est l'isomorphisme voulu (7.13). C.Q.F.D.

Remarque Le produit tensoriel de deux faisceaux flasques n'est plus flasque en général, car une section du produit tensoriel doit avoir localement une expression en termes finis. La propriété qu'on a utilisé pour $C^*(\mathcal{F})$ n'est donc pas la flasquité de $C^j(\mathcal{F})$. C'est ce qu'on appelle un faisceau fin. Nous n'entrons pas dans le détail de la généralité, mais simplement remarquons que lorsque X est une variété différentiable, on peut utiliser au lieu de la résolution canonique $0 \rightarrow C_X \rightarrow C^*$, la résolution de de Rham $0 \rightarrow C_X \rightarrow E_X^{(\cdot)}$ (Voir Exemple 4.1.10). On pourra alors utiliser une partition de l'unité de classe C^∞ de la même manière pour constater que $\mathcal{F} \otimes E_X^{(j)}$ est mou. En considérant comme toujours la résolution flasque canonique de la suite $0 \rightarrow C_X \rightarrow E_X^{(\cdot)}$, et appliquant le lemme de Weil, on peut vérifier qu'on obtient ainsi le même isomorphisme.

Pour terminer ce paragraphe, introduisons la notion de faisceau d'anneaux \mathcal{A} et de faisceau de \mathcal{A} -modules. On dit qu'un faisceau \mathcal{A} est un faisceau d'anneaux si chaque $\mathcal{A}(U)$ est muni d'une structure d'anneau de façon que la restriction $\rho_{VU}: \mathcal{A}(U) \rightarrow \mathcal{A}(V)$ soit un homomorphisme d'anneaux. (Dans la suite nous ne considérons que le cas où $\mathcal{A}(U)$ sont des \mathbb{C} -algèbres, donc \mathcal{A} est déjà un faisceau de \mathbb{C} -espaces vectoriels.) Ensuite, on dit qu'un faisceau \mathcal{M} est un faisceau de \mathcal{A} -modules (à gauche) si chaque $\mathcal{M}(U)$ est un $\mathcal{A}(U)$ -module (à gauche) et que $\rho_{VU}: \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V)$ commute à l'opération de $\mathcal{A}(U)$ - resp. $\mathcal{A}(V)$ -module. Il est alors clair que la fibre \mathcal{A}_x de \mathcal{A} est un anneau, et la fibre \mathcal{M}_x de \mathcal{M} est un \mathcal{A}_x -module (à gauche). Toutes ces terminologies seront transférées au cas de préfaisceaux de façon évidente.

Etant donnés deux \mathcal{A} -modules, \mathcal{M} à droite, \mathcal{N} à gauche, on définit le faisceau $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$ comme celui associé au préfaisceau $U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{A}(U)} \mathcal{N}(U)$. On a évidemment $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N})_x = \mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{A}_x} \mathcal{N}_x$. Différemment du cas \otimes_{C_X} , le foncteur $\otimes_{\mathcal{A}}$ n'est pas nécessairement exact.

La notion de sous \mathcal{A} -module et de quotient sont pareilles au cas $\mathcal{A} = C_X$

i.e. au cas de faisceaux de \mathbb{C} -espaces vectoriels. Un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ entre les deux \mathcal{A} -modules sera dit un homomorphisme de \mathcal{A} -modules (ou un \mathcal{A} -homomorphisme) s'il commute aux opérations de \mathcal{A} -modules. D'où la notion de l'image, le noyau, le conoyau etc.

Pour un \mathcal{A} -module \mathcal{M} , la résolution canonique $\mathcal{C}^0(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} sera encore un \mathcal{A} -module de façon évidente, et l'injection $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{M})$ sera un \mathcal{A} -homomorphisme. D'où on constate que pour un \mathcal{A} -module \mathcal{M} , $H_{\mathbb{Q}}^k(X, \mathcal{M})$ devient un $\mathcal{A}(X)$ -module de façon canonique, et $H_{\mathbb{S}}^k(\mathcal{M})$ un $\mathcal{A}|_{\mathbb{S}}$ -module. Nous laissons aux lecteurs le soin de vérifier que la structure de $\mathcal{A}(\Omega)$ -module $B(\Omega)$ est juste celle qui est ainsi obtenue à partir du \mathcal{O} -module \mathcal{O} . (On pourra en plus parler de la structure de \mathcal{P} -module pour B , où \mathcal{P} est le faisceau d'anneaux (non commutatifs) des germes d'opérateurs aux dérivées partielles linéaires à coefficients holomorphes.)

2. Résolutions de de Rham et de Dolbeault

Nous fabriquons maintenant les résolutions de C et de \mathcal{O} en termes d'hyperfonctions. Considérons tout de suite le cas relatif pour la généralité. Soient M, N des variétés analytiques réelles de dimension respectivement m, n et soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse (i.e. une application C^∞) telle que la dérivée $df(x): T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ soit surjective en chaque $x \in M$. On désignera en général par A_M resp. B_M le faisceau des germes de fonctions analytiques réelles resp. d'hyperfonctions sur M . Soit $p \geq 0$ un entier. On désignera alors par $A_M^{(p)}$ resp. $B_M^{(p)}$ le faisceau des germes de p -formes différentielles à coefficients dans A_M resp. dans B_M : Une section de $B_M^{(p)}$ s'écrit en coordonnées locales

$$\sum \varphi_{j_1 \dots j_p}(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p},$$

où $\varphi_{j_1 \dots j_p}(x)$ sont des hyperfonctions. Puisque la règle de changement de coordonnées pour les coefficients d'une section de $A_M^{(p)}$ s'écrit par une matrice à coefficients analytiques réels, elle a un sens bien déterminé pour les coefficients de $B_M^{(p)}$, d'où la définition globale du faisceau $B_M^{(p)}$. Ainsi $A_M^{(p)}, B_M^{(p)}$ sont des A_M -modules. Par la même raison, la dérivation extérieure $d: A_M^{(p)} \rightarrow A_M^{(p+1)}$ s'étend à un homomorphisme de faisceaux $d: B_M^{(p)} \rightarrow B_M^{(p+1)}$, ce qui n'est bien entendu pas un A_M -homomorphisme.

Définition 7.2.1 On pose $A_f^{(1)} = A_M^{(1)} / f^{-1} A_N^{(1)} \otimes_{f^{-1} A_N} A_M$, et $A_f^{(p)} = \bigwedge^p A_f^{(1)}$ pour $p \geq 0$ général. On pose aussi $B_f^{(p)} = A_f^{(p)} \otimes_{A_M} B_M$. $A_f^{(p)}$ (resp. $B_f^{(p)}$) est un A_M -module et appelé le faisceau des germes de p -formes à coefficients dans A_M (resp. dans B_M) relatives par rapport à l'application f . La dérivation extérieure d sur M induit canoniquement un homomorphisme de faisceaux $d_f: A_f^{(p)} \rightarrow A_f^{(p+1)}$ resp. $d_f: B_f^{(p)} \rightarrow B_f^{(p+1)}$ (de $f^{-1} A_N$ -modules).

Notons que pour $p \geq 1$ on a

$$A_f^{(p)} = A_M^{(p)} / f^{-1} A_N^{(1)} \wedge A_M^{(p-1)},$$

où le produit extérieur dans le dénominateur se fait sur l'anneau $f^{-1} A_N$.

Si N se réduit à un point, tous ces objets se ramènent au cas absolu:

$A_f^{(p)} = A_M^{(p)}$, $B_f^{(p)} = B_M^{(p)}$ et $d_f = d$. Dans le cas général, d'après l'hypothèse que f soit lisse, on peut prendre les coordonnées locales de M resp. N au voisinage de chaque point $x \in M$ resp. $f(x) \in N$ de façon que $M = \mathbb{R}^m$ avec les coordonnées (x, t) , $N = \mathbb{R}^n$ avec les coordonnées x et que f soit la projection $(x, t) \mapsto x$. Dans ce cas la section de $A_f^{(p)}$ (resp. $B_f^{(p)}$) est représentée de façon unique par une p -forme absolue du type

$$\sum \varphi_{j_1 \dots j_p}(x, t) dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_p},$$

où $\varphi_{j_1 \dots j_p}(x, t)$ sont des fonctions analytiques réelles (resp. hyperfonctions). La dérivation extérieure d_f est alors représentée par celle pour les variables t (avec les x considérés comme paramètres).

Théorème 7.2.2 (Résolution de de Rham relative) On a la suite exacte de faisceaux (de $f^{-1}A_N$ -modules) sur M :

$$(7.16) \quad 0 \longrightarrow f^{-1}B_N \longrightarrow B_M \xrightarrow{d_f} B_f^{(1)} \xrightarrow{d_f} \dots \xrightarrow{d_f} B_f^{(m-n)} \longrightarrow 0.$$

Démonstration Il suffit de démontrer l'exactitude localement. Posons donc $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ comme ci-dessus et soit $f: M \rightarrow N$ la projection naturelle $(x, t) \mapsto x$. Posons $d = m-n$. $B_f^{(p)}$ s'identifie avec $B_M^{(p)}$. Soient encore $X = \mathbb{C}^m$ et $Y = \mathbb{C}^n$ le complexifié de M resp. N . Distinguons la projection naturelle $X \rightarrow Y$ par F . On partira par la suite exacte suivante qu'on suppose connue:

$$(7.17) \quad 0 \longrightarrow F^{-1}\sigma_Y \longrightarrow \sigma_X \xrightarrow{d_F} \sigma_F^{(1)} \xrightarrow{d_F} \dots \xrightarrow{d_F} \sigma_F^{(d)} \longrightarrow 0,$$

où $\sigma_F^{(p)}$ s'identifie avec $\sigma_X^{(p)}$. Le problème est donc de passer de (7.17) à

$$(7.16) \text{ par le foncteur } \underline{H}_M^m(\cdot).$$

1^{ère} étape Notons que M est pur de codimension m par rapport à $\sigma_F^{(p)} = \sigma_X^{(p)}$; on a (au facteur d'orientation près)

$$(7.18) \quad \underline{H}_M^m(\sigma_F^{(p)}) = B_f^{(p)}, \quad \underline{H}_M^k(\sigma_F^{(p)}) = 0 \text{ pour } k \neq m.$$

En prenant la résolution canonique de la suite (7.17) et en appliquant le foncteur $\underline{\Gamma}_M$, on obtient donc un diagramme commutatif comme suit

*) Les analystes qui ne veulent pas lire la démonstration ci-dessous pourront tout de suite passer à la remarque ci-après.

$$(7.19) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma_M(C^0(F^{-1}\sigma_Y)) & \longrightarrow & \Gamma_M(C^0(\sigma_X)) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \Gamma_M(C^0(\sigma_F^{(d)})) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_M(C^m(F^{-1}\sigma_Y)) & \longrightarrow & \Gamma_M(C^m(\sigma_X)) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \Gamma_M(C^m(\sigma_F^{(d)})) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Ici les lignes sont exactes; les colonnes autre que la première sont exactes sauf en m-ième terme d'après (7.18). En vertu du lemme de Weil (Lemme 4.2.4), on obtient donc

$$(7.20) \quad \underline{H}_M^k(F^{-1}\sigma_Y) = 0 \quad \text{pour } 0 \leq k \leq m-1.$$

Coupons maintenant le diagramme (7.19) en m-ième ligne. On obtient de la moitié en haut, encore par un argument du type "lemme de Weil", que

$$(7.21) \quad 0 \longrightarrow \delta \Gamma_M(C^{m-1}(F^{-1}\sigma_Y)) \longrightarrow \delta \Gamma_M(C^{m-1}(\sigma_X)) \longrightarrow \dots \longrightarrow \delta \Gamma_M(C^{m-1}(\sigma_F^{(d)})) \longrightarrow 0$$

est exact. Regardons alors l'autre moitié en bas de (7.19). En modifiant les premières lignes de façon évidente on obtient

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \longrightarrow & \underline{H}_M^m(\sigma_X) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \underline{H}_M^m(\sigma_F^{(d)}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \frac{\Gamma_M(C^m(F^{-1}\sigma_Y))}{\delta \Gamma_M(C^{m-1}(F^{-1}\sigma_Y))} & \longrightarrow & \frac{\Gamma_M(C^m(\sigma_X))}{\delta \Gamma_M(C^{m-1}(\sigma_X))} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \frac{\Gamma_M(C^m(\sigma_F^{(d)}))}{\delta \Gamma_M(C^{m-1}(\sigma_F^{(d)}))} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_M(C^{m+1}(F^{-1}\sigma_Y)) & \longrightarrow & \Gamma_M(C^{m+1}(\sigma_X)) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow \Gamma_M(C^{m+1}(\sigma_F^{(d)})) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Ici la deuxième ligne est aussi exacte grâce à l'exactitude de (7.21). Les colonnes sauf la première sont exactes par (7.18) et par la façon de construction. D'où, encore d'après le lemme de Weil, on obtient

$$(7.22) \quad \underline{H}_M^k(F^{-1}\sigma_Y) = H^{k-m}(\underline{H}_M^m(\sigma_F^{(\cdot)})).$$

Notons aussi que le complexe $\underline{H}_M^m(\sigma_F^{(\cdot)})$ obtenu ici est juste égal à (7.16)

(sauf le premier terme $f^{-1}B_N$). Ceci découle via le cas absolu de la remarque

générale qui prétend la même chose pour l'opération d'un opérateur aux dérivées partielles linéaires. (Voir la fin du Chapitre V.)

2^e étape Montrons maintenant

$$(7.23) \quad F^{-1} \underline{H}_N^k(\mathcal{O}_Y) = \underline{H}_{N \times C^d}^k(F^{-1} \mathcal{O}_Y).$$

On pourra le démontrer directement en imitant la démonstration du Théorème 7.1.8. Ici utilisons plutôt le résultat. Préparons pour cela un lemme qui relie les deux foncteurs $R^k f_{\#}$ et \underline{H}_S^k .

Lemme 7.2.3 Soit $S \subset X$ un fermé. Soit $j: X \setminus S \rightarrow X$ l'inclusion naturelle.

Pour un faisceau \mathcal{F} sur X , on a alors

$$(7.24) \quad \underline{H}_S^k(\mathcal{F}) = R^{k-1} j_{\#} j^{-1} \mathcal{F} \quad \text{pour } k \geq 2.$$

On a aussi la suite exacte suivante

$$(7.25) \quad 0 \rightarrow \underline{H}_S^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_{\#} j^{-1} \mathcal{F} \rightarrow \underline{H}_S^1(\mathcal{F}) \rightarrow 0.$$

Démonstration Soit $x \in S$ et soit $U \ni x$ un voisinage dans X . On a la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(U, \mathcal{F}) \rightarrow H^{k-1}(U \setminus S, \mathcal{F}) \rightarrow H_{S \cap U}^k(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^k(U, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Il est évident que $H^k(U \setminus S, \mathcal{F}) = H^k(j^{-1}(U), j^{-1} \mathcal{F})$, d'où $\varinjlim_{U \ni x} H^k(U \setminus S, \mathcal{F}) = (R^k j_{\#} j^{-1} \mathcal{F})_x$. Notons aussi que $\varinjlim_{U \ni x} H_{S \cap U}^k(X, \mathcal{F}) = \underline{H}_S^k(\mathcal{F})_x$ et que $\varinjlim_{U \ni x} H^k(U, \mathcal{F}) = 0$ pour $k \geq 1$. Ainsi en passant à la limite la suite se coupe en morceaux (7.24), (7.25). C.Q.F.D.

Regardons donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \setminus N \times C^d & \xrightarrow{j'} & X \\ \downarrow F' & & \downarrow F \\ j^{-1} \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{j} & Y \setminus N \end{array}$$

Il est clair que $X \setminus N \times C^d = X \times_Y (Y \setminus N)$. Puisque j est propre, on a $j_! = j_{\#}$.

Il en est de même de j' . En appliquant donc le Théorème 7.1.8, on obtient

$$(7.26) \quad F^{-1} R^k j_{\#} (j^{-1} \mathcal{O}_Y) = R^k j'_{\#} F'^{-1} (j^{-1} \mathcal{O}_Y).$$

En remarquant que $F'^{-1} j^{-1} \mathcal{O}_Y = j'^{-1} F^{-1} \mathcal{O}_Y$, et en appliquant (7.24), on obtient ainsi (7.23) pour $k \geq 2$. D'autre part, d'après (7.25) on a la suite exacte

$$0 \rightarrow F^{-1} \underline{H}_N^0(\mathcal{O}_Y) \rightarrow F^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow F^{-1} j_{\#} j^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow F^{-1} \underline{H}_N^1(\mathcal{O}_Y) \rightarrow 0.$$

En vertu de (7.26) pour $k = 0$, on a ici $F^{-1}j_*j^{-1}\mathcal{O}_Y = j'_*F'^{-1}j'^{-1}\mathcal{O}_Y = j'_*j'^{-1}F'^{-1}\mathcal{O}_Y$. Donc en la comparant avec l'autre suite provenant de (7.25):

$$0 \rightarrow \underline{H}_{N \times C^d}^0(F^{-1}\mathcal{O}_Y) \rightarrow F^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow j'_*j'^{-1}F'^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \underline{H}_{N \times C^d}^1(F^{-1}\mathcal{O}_Y) \rightarrow 0,$$

on conclut (7.23) aussi pour $k = 0, 1$.

(7.23) montre que $N \times C^d \subset X$ est pur de codimension n par rapport à $F^{-1}\mathcal{O}_Y$, et que $\underline{H}_{N \times C^d}^n(F^{-1}\mathcal{O}_Y) = F^{-1}B_N$ (au facteur d'orientation près).

3^e étape Considérons ensuite l'inclusion $\iota: M = N \times R^d \hookrightarrow N \times C^d$, et montrons que M est pur de codimension d par rapport à $F^{-1}B_N$, et que 注)

$$(7.27) \quad \underline{H}_M^d(F^{-1}B_N) = f^{-1}B_N.$$

Ceci découle du lemme suivant:

Lemme 7.2.4 Soit \mathcal{F} un faisceau sur R^p . Soit $F: R^{p+q+r} \rightarrow R^p$ la projection naturelle. Alors $R^{p+q} \times \{0\} \subset R^{p+q+r}$ est pur de codimension r par rapport à $F^{-1}\mathcal{F}$. Soit en plus $f = F|_{R^{p+q} \times \{0\}}$. On a alors 注)

$$\underline{H}_{R^{p+q} \times \{0\}}^r(F^{-1}\mathcal{F}) = f^{-1}\mathcal{F}.$$

Démonstration Profitons la préparation de §1. Soit $j: R^{p+q} \times (R^r \setminus \{0\}) \hookrightarrow R^{p+q+r}$ l'inclusion naturelle. D'après le Théorème 7.1.9 on a un isomorphisme canonique

$$R^k j_* j^{-1}(F^{-1}\mathcal{F}) \simeq F^{-1}\mathcal{F} \otimes R^k j_* j^{-1}C_{R^{p+q+r}}.$$

En vertu du Lemme 7.2.3, on obtient donc

$$\underline{H}_{R^{p+q} \times \{0\}}^k(F^{-1}\mathcal{F}) \simeq F^{-1}\mathcal{F} \otimes \underline{H}_{R^{p+q} \times \{0\}}^k(C_{R^{p+q+r}}), \quad \text{pour } k \geq 2.$$

D'après la Proposition 4.7.7 le dernier membre s'annule sauf $k = r$, et il reste $\underline{H}_{R^{p+q} \times \{0\}}^r(C_{R^{p+q+r}}) = C_{R^{p+q} \times \{0\}}$ (un isomorphisme qui dépend de l'orientation de R^r). Vu que $F^{-1}\mathcal{F} \otimes C_{R^{p+q} \times \{0\}} \simeq f^{-1}\mathcal{F}$, on a constaté l'assertion pour $k \geq 2$. On laissera aux lecteurs la modification pour le cas $k = 0, 1$ à titre d'exercice. C.Q.F.D.

4^e étape Rangeons la situation. On a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} & & X \quad F^{-1}\mathcal{O}_Y \\ & \nearrow \kappa & \uparrow j \text{ codim } n \\ M & \xrightarrow{\iota} & N \times C^d \quad F^{-1}B_N \\ & \searrow \text{codim } d & \end{array}$$

où l'inclusion j est pure de codimension n par rapport à $F^{-1}\mathcal{O}_Y$, laissant

注) Cet isomorphisme dépend de l'orientation.

un seul terme $F^{-1}B_N = \underline{H}_{N \times C^d}^n(F^{-1}\mathcal{O}_Y)$; l'inclusion ι est pure de codimension d par rapport à $F^{-1}B_N$, laissant un seul terme $f^{-1}B_N = \underline{H}_N^d(N \times C^d, F^{-1}B_N)$.

Donc on peut appliquer le Théorème 4.4.4 et on conclut que la composée $\kappa = j \circ \iota$ est pure de codimension $m = n+d$, et que

$$\underline{H}_M^m(F^{-1}\mathcal{O}_Y) = \underline{H}_M^d(\underline{H}_{N \times C^d}^n(F^{-1}\mathcal{O}_Y)) = \underline{H}_M^d(F^{-1}B_N) = f^{-1}B_N.$$

En combinant avec le résultat de la 1^{ère} étape, on conclut donc

$$H^{k-m}(\underline{H}_N^m(\mathcal{O}_F^{(\cdot)})) = 0 \quad \text{pour } k > m,$$

$$f^{-1}B_N = \underline{H}_M^m(F^{-1}\mathcal{O}_Y) = H^0(\underline{H}_N^m(\mathcal{O}_F^{(\cdot)})).$$

D'où l'exactitude de la suite (7.16). C.Q.F.D.

Remarque Précisément dit, ce qu'on a obtenu, c'est la suite exacte

$$(7.28) \quad 0 \rightarrow \underline{H}_M^m(F^{-1}\mathcal{O}_Y) \rightarrow \underline{H}_M^m(\mathcal{O}_X) \rightarrow \dots \rightarrow \underline{H}_M^m(\mathcal{O}_F^{(d)}) \rightarrow 0.$$

La vraie suite (7.16) s'obtiendra en y tensorisant $\underline{H}_M^m(C_X)$. En effet,

désignons le faisceau d'orientation par $\omega_M = \underline{H}_M^m(C_X)$, resp. $\omega_N = \underline{H}_N^n(C_Y)$.

Posons encore

(7.29) $\omega_{M/N} = \omega_M \otimes_{C_M} f^{-1}\omega_N$. $\sqrt{\quad}$ On l'appelle le faisceau d'orientation pour la fibre de f . (Remarquons que l'on a en général $\omega_M \otimes \omega_M = C_M$. Donc cette définition se réécrit de façon plus plausible $\omega_M \otimes_{C_M} f^{-1}\omega_N^{-1}$.) Ce faisceau apparaît aussi de la manière suivante: En utilisant la Proposition 4.7.7, on constate que j est pur de codimension n par rapport à C_X , laissant $F^{-1}\omega_N$, et que ι est pur de codimension d par rapport à $F^{-1}\omega_N$, laissant $F^{-1}\omega_N \otimes \underline{H}_M^d(C_{F^{-1}(N)})$. (Voir la démonstration du Lemme 7.2.4.) D'après le Théorème 4.4.4, on obtient donc

$$(7.30) \quad \omega_M = F^{-1}\omega_N \otimes \underline{H}_M^d(C_{F^{-1}(N)}),$$

ou équivalamment, $\omega_{M/N} = \underline{H}_M^d(C_{F^{-1}(N)})$. Tensorisons maintenant ω_M à (7.28).

On a $\underline{H}_M^m(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_M = B_M$, et, en veillant à la canonicité d'isomorphismes, on a aussi

$$\begin{aligned} \underline{H}_M^m(F^{-1}\mathcal{O}_Y) \otimes \omega_M &= \underline{H}_M^d(F^{-1}(N), \underline{H}_{F^{-1}(N)}^n(F^{-1}\mathcal{O}_Y)) \otimes \omega_M \\ &= \underline{H}_M^d(F^{-1}(N), F^{-1}\underline{H}_N^n(\mathcal{O}_Y)) \otimes \omega_M \\ &= \underline{H}_M^d(F^{-1}(N), F^{-1}B_N \otimes F^{-1}\omega_N) \otimes \omega_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F^{-1}B_N \otimes F^{-1}\omega_N \otimes H_M^d(C_{F^{-1}(N)}) \otimes \omega_M \\
&= f^{-1}B_N \otimes \omega_M \otimes \omega_M = f^{-1}B_N.
\end{aligned}$$

Ainsi on a démontré en particulier de façon vachement pédante que la solution du système d'équations (de de Rham partiel) $\partial u / \partial x_1 = 0, \dots, \partial u / \partial x_n = 0$ est juste l'hyperfonction indépendante de x_1, \dots, x_n .

Remarque (pour les analystes) Soit $U \subset \mathbb{C}^m$ un ouvert convexe. Moyennant l'analyse harmonique complexe, on peut démontrer la suite exacte

$$(7.31) \quad 0 \longrightarrow F^{-1}\sigma_Y(U) \longrightarrow \sigma_X(U) \xrightarrow{d_F} \sigma_F^{(1)} \xrightarrow{d_F} \dots \xrightarrow{d_F} \sigma_F^{(d)}(U) \longrightarrow 0,$$

ce qui est une version globale de la suite (7.17). Soit donc $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert convexe et soit $U \supset \Omega$ un voisinage convexe. Soit $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ le recouvrement de Stein relatif de $(U, U \setminus \Omega)$ donné dans l'Exemple 5.4.7 b). Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & C^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', F^{-1}\sigma_Y) & \rightarrow & C^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \sigma_X) & \rightarrow & \dots \rightarrow C^0(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \sigma_F^{(d)}) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & C^1(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', F^{-1}\sigma_Y) & \rightarrow & C^1(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \sigma_X) & \rightarrow & \dots \rightarrow C^1(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \sigma_F^{(d)}) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & C^m(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', F^{-1}\sigma_Y) & \rightarrow & C^m(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \sigma_X) & \rightarrow & \dots \rightarrow C^m(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \sigma_F^{(d)}) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \rightarrow & H^m(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', F^{-1}\sigma_Y) & \rightarrow & H^m(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \sigma_X) & \rightarrow & \dots \rightarrow H^m(\mathcal{U} \bmod \mathcal{U}', \sigma_F^{(d)}) \rightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Les colonnes sauf la première sont évidemment exactes. Les lignes sauf la première sont exactes d'après la suite (7.31) appliquée à chaque composante connexe. Donc en vertu du lemme de Weil on constate d'abord que la première colonne est exacte (jusqu'au terme C^m ; mais son exactitude en terme H^m est banale). Appliquons ensuite le lemme de Weil avec les flèches renversées. On constate ainsi l'exactitude de la dernière ligne, i.e. celle de la suite

$$(7.32) \quad 0 \longrightarrow f^{-1}B_N(\Omega) \longrightarrow B_M(\Omega) \xrightarrow{d_f} B_f^{(1)}(\Omega) \xrightarrow{d_f} \dots \xrightarrow{d_f} B_f^{(d)}(\Omega) \longrightarrow 0.$$

ce qui est une version globale de (7.16). La même remarque aura lieu pour le Théorème 7.2.6 ci-dessous.

Considérons maintenant la résolution de Dolbeault. Pour simplifier, utilisons tout de suite les coordonnées locales. Considérons cette fois-ci $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^d$ comme une variété analytique réelle. Posons $X = \mathbb{C}^{n+2d}$, $N = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{C}^n$. Soient $f: M \rightarrow N$ et $F: X \rightarrow Y$ la projection naturelle. Soit x le système de coordonnées de N , et soit w le système de coordonnées complexes de \mathbb{C}^d . Désignons par $A_f^{(0,p)}$ resp. $B_f^{(0,p)}$ le faisceau de $(0,p)$ -formes sur M relatives par rapport à f et à coefficients dans A_M resp. B_M . Une section s'écrit donc

$$\varphi_{j_1 \dots j_p}(x,w) dw_{j_1} \dots dw_{j_p},$$

où $\varphi_{j_1 \dots j_p}(x,w)$ sont dans A_M resp. B_M . La dérivation extérieure anti-holomorphe $\bar{\partial}$ sera définie comme d'habitude. (Voir Exemple 4.1.10 c)).

Rappelons que $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^d$ était pur de codimension n par rapport au faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d}$ (Théorème 5.3.7bis).

Définition 7.2.5 On désignera par $B\mathcal{O} (= B_n \mathcal{O}_d)$ le faisceau $H_M^n(\mathcal{O}'_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d})$ (plus précisément, celui tensorisé par ω_M), et l'appellera le faisceau d'hyperfonctions sur M contenant w comme paramètres holomorphes.

Il est juste la solution du système de Cauchy-Riemann partiel

$$\partial u / \partial \bar{w}_1 = 0, \dots, \partial u / \partial \bar{w}_d = 0.$$

On a en effet le

Théorème 7.2.6 (Résolution de Dolbeault relative) On a la suite exacte

$$(7.33) \quad 0 \rightarrow B\mathcal{O} \rightarrow B_f^{(0,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}_f} B_f^{(0,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}_f} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_f} B_f^{(0,d)} \rightarrow 0.$$

Démonstration Dans cette démonstration désignons les coordonnées réelles de $\mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}$ par u, ξ et pour le complexifié \mathbb{C}^{2d} utilisons les coordonnées w, ζ , où $w = u + iv$ et $\zeta = \xi + i\eta$. Alors la dérivation anti-holomorphe $\partial / \partial (u_j - i\xi_j)$ aura la complexifiée $\partial / \partial (w_j - i\zeta_j)$. Désignons par G l'application $\mathbb{C}^{n+2d} \rightarrow \mathbb{C}^{n+d}$ définie par $G(z, w, \zeta) = (z, w + i\zeta)$. Par un changement de coordonnées complexe on obtient à partir de la résolution de de Rham complexe la résolution de Dolbeault complexe:

$$(7.34) \quad 0 \rightarrow G^{-1}\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_F^{(0,0)} \rightarrow \mathcal{O}_F^{(0,1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_F^{(0,d)} \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{O}_F^{(0,p)}$ est l'espace de p-formes holomorphes du type

$$\sum \varphi_{j_1 \dots j_p}(z, w, \zeta) d(w_{j_1} - i\zeta_{j_1}) \wedge \dots \wedge d(w_{j_p} - i\zeta_{j_p}),$$

avec $\varphi_{j_1 \dots j_p}(z, w, \zeta) \in \mathcal{O}_X$, et $\bar{\partial}$ est la dérivation extérieure holomorphe par rapport aux variables $w - i\zeta$.

Imitons la démonstration du Théorème 7.2.2. La 1^{ère} étape marche sans modification, de sorte qu'on obtient un complexe

$$0 \longrightarrow B_f^{(0,0)} \longrightarrow B_f^{(0,1)} \longrightarrow \dots \longrightarrow B_f^{(0,d)} \longrightarrow 0,$$

avec les groupes de cohomologie

$$H^{k-(n+2d)}(B_f^{(0,\cdot)}) = \underline{H}_M^k(G^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}}).$$

Il reste donc à démontrer que M est pur de codimension $n+2d$ par rapport à $G^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}}$ et à calculer ce qui reste. Notons que $G|_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2d}}$ est l'identité.

Posons donc

$$\bar{\mathbb{R}}^{2d} = \{w = -i\zeta\} = \{u = \eta, v = -\xi\}.$$

Il est clair que $\mathbb{C}^{2d} = \mathbb{R}^{2d} \oplus \bar{\mathbb{R}}^{2d}$ comme \mathbb{R} -espaces vectoriels et que G est constant le long de $\bar{\mathbb{R}}^{2d}$. On a donc un diagramme comme suit:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+2d} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2d} \times \bar{\mathbb{R}}^{2d} & & \\ G \downarrow & \swarrow \text{projection sur les} & \\ \mathbb{C}^{n+d} & \text{premiers deux facteurs} & \end{array}$$

Donc d'après la 3^e étape (Lemme 7.2.4) on constate que $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2d}$ est pur de codimension $2d$ par rapport à $G^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}}$ et que

$$\underline{H}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2d}}^{2d}(G^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}}) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}},$$

d'où le cas $n = 0$. Dans le cas $n > 0$, on sait que M est pur de codimension n par rapport à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}}$. Donc en appliquant le Théorème 4.4.4 au triplet $M \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{2d} \subset \mathbb{C}^{n+2d}$ comme dans la 4^e étape, on constate que M est pur de codimension $n+2d$ par rapport à $G^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}}$ et que

$$\underline{H}_M^{n+2d}(G^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}}) = \underline{H}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^d}^n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+d}}) = B\mathcal{O}. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Recapitulons le cas absolu $n = 0$. Le théorème alors prétend la chose suivante: Une hyperfonction $u(x,y)$ sur $\mathbb{R}^{2d} = \mathbb{C}^d$ qui vérifie le système de Cauchy-Riemann $\partial u / \partial \bar{z}_1 = 0, \dots, \partial u / \partial \bar{z}_d = 0$, est en effet une fonction holomorphe au sens ordinaire. Quel progrès par rapport à la définition en Chapitre II!

3. Théorème de Malgrange

Dans le paragraphe précédent, nous avons donné une résolution concrète du faisceau \mathcal{C} resp. \mathcal{O} en termes d'hyperfonctions. Profitons donc de cette occasion pour démontrer la flasquité de B , et l'appliquons à quelques problèmes globaux. Notons que jusqu'ici nous n'avons pas utilisé la "flasquité" de B . C'est dans l'étude globale que la flasquité de B pleinement joue son rôle. La démonstration est basée plus ou moins sur l'analyse fonctionnelle. Profitons donc aussi \wedge de cette occasion à introduire la topologie pour les espaces $B[K]$, $A(K)$ et la dualité qu'il y a lieu entre eux.

Rappelons d'abord que pour un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$, $\mathcal{O}(U)$ devient un espace de Fréchet avec les semi-normes habituelles:

$$\|F(z)\|_K = \sup_{z \in K} |F(z)|,$$

où K parcourt les compacts dans U . Soit ensuite $K = K_1 \times \dots \times K_n$ un compact réel du type produit et soit $V = V_1 \times \dots \times V_n$ un voisinage. Rappelons la représentation (6.1) pour $B[K]$:

$$B[K] = \mathcal{O}(V \# K) / \sum_j \mathcal{O}(V \#_j K),$$

avec l'abréviation évidente pour le dénominateur.

Lemme 7.3.1 Le dénominateur est un sous espace fermé du numérateur. D'où $B[K]$ est muni d'une structure d'espace de Fréchet.

Démonstration Considérons l'application donnant le représentant standard

$$\begin{array}{ccc} \text{st: } \mathcal{O}(V \# K) & \longrightarrow & \mathcal{O}_0((P^1 \setminus K_1) \times \dots \times (P^1 \setminus K_n)) \\ \downarrow & & \\ F(z) & & G(z) = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_n} \frac{F(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n. \end{array}$$

Elle est évidemment continue et elle a comme noyau juste le dénominateur de (6.1). D'où la première assertion.

Ainsi on peut munir $B[K]$ de la topologie quotient et le rendre un espace de Fréchet. Cette topologie ne dépend pas de voisinage V . En effet, si $V \supset W$ sont ~~des~~ deux voisinages, on a un diagramme commutatif d'applications \wedge continues:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(V \# K) / \sum_j \mathcal{O}(V \#_j K) & \xrightarrow{\text{restr.}} & \mathcal{O}(W \# K) / \sum_j \mathcal{O}(W \#_j K) \\ \text{restr.} \swarrow & & \swarrow \text{st} \\ & \mathcal{O}_0((P^1 \setminus K_1) \times \dots \times (P^1 \setminus K_n)) & \text{C.Q.F.D.} \end{array}$$

Lemme 7.3.2 Le dual de $B[K]$, i.e. l'espace $B[K]'$ des formes linéaires continues $B[K] \rightarrow \mathbb{C}$, est égal à $A(K)$, l'espace des fonctions analytiques réelles définies au voisinage de K . Le produit scalaire est donné par l'intégrale: pour $u \in B[K]$, $\varphi \in A(K)$,

$$(7.35) \quad \langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \varphi(x) dx.$$

Démonstration Le produit scalaire (7.35) fournit une application $A(K) \rightarrow B[K]'$. Vu que $\langle \delta(x-a), \varphi(x) \rangle = \varphi(a)$, cette application est injective. En réciproque, soit $\bar{\varphi} \in B[K]'$. Par la définition de la topologie de $B[K]$, $\bar{\varphi}$ se prolonge à une forme continue $\bar{\varphi}: \mathcal{O}(V \# K) \rightarrow \mathbb{C}$. Cette forme $\bar{\varphi}$ est en effet continue pour la norme maximum (i.e. la convergence uniforme) sur un compact dans $V \# K$. Posons alors

$$\varphi(z) = \bar{\varphi}_{\zeta} \left[\frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)} \right].$$

$\varphi(z)$ devient holomorphe en z dans un voisinage $U = U_1 \times \dots \times U_n$ de K .

Calculons $\langle u, \varphi \rangle$. Soit $F(z) \in \mathcal{O}(U \# K)$ un représentant de u . Choisissons γ_j contournant K_j dans U_j . Par la continuité de $\bar{\varphi}$, on a alors

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= (-1)^n \oint_{\gamma_1} \dots \oint_{\gamma_n} F(z) \varphi(z) dz_1 \dots dz_n \\ &= \bar{\varphi}_{\zeta} \left[\frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \oint_{\gamma_1} \dots \oint_{\gamma_n} \frac{F(z) dz_1 \dots dz_n}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)} \right] = \bar{\varphi}[u], \end{aligned}$$

car $\frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \oint_{\gamma_1} \dots \oint_{\gamma_n} \frac{F(z) dz_1 \dots dz_n}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)} \in \mathcal{O}(V \# K)$ est un représentant de u .

Ainsi on a démontré l'isomorphisme algébrique $A(K) \xrightarrow{\sim} B[K]'$. C.Q.F.D.

Soit $K \subset L$ deux compacts du type produit. Alors l'inclusion canonique $B[K] \hookrightarrow B[L]$ est évidemment continue, et l'application duale s'accorde avec la restriction $A(L) \rightarrow A(K)$.

Passons maintenant à la réunion finie de compacts du type produit. Soient d'abord K, L deux compacts du type produit. Alors $K \cap L$ l'est aussi, et on a la suite exacte (voir Corollaire 5.4.2)

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow B[K \cap L] \longrightarrow B[K] \oplus B[L] \longrightarrow B[K \cup L] \longrightarrow 0. \\ f \longmapsto (f, f) \\ (f, g) \longmapsto f - g \end{aligned}$$

Notons que $B[K \cap L]$ est un sous espace fermé de $B[K] \oplus B[L]$. Soit en effet

$f_k \rightarrow f$ dans $B[K]$ et $f_k \rightarrow g$ dans $B[L]$. Choisissons un compact du type produit M contenant $K \cup L$. On a alors $f_k \rightarrow f$ et $f_k \rightarrow g$ dans $B[M]$. D'où $f = g$ et son support est dans $K \cap L$. Ainsi on peut munir $B[K \cup L]$ de la topologie quotient pour le rendre un espace de Fréchet. En appliquant cette argument pour chaque étape de la récurrence pour le nombre de composantes de la réunion, on a constaté la première partie du

Théorème 7.3.3 Soit K la réunion finie de compacts du type produit. Alors $B[K]$ est un espace de Fréchet et son dual est égal à $A(K)$ avec le produit scalaire (7.35). Pour deux compacts $K \subset L$ de ce type, l'inclusion $B[K] \hookrightarrow B[L]$ est continue avec l'image dense, et sa duale est égale à la restriction $A(L) \rightarrow A(K)$.

Démonstration Utilisons la récurrence. Soit K une réunion à N éléments de compacts du type produit et soit L un compact du type produit. Alors $K \cap L$ est aussi une réunion à N éléments. La suite exacte d'applications continues

$$0 \rightarrow B[K \cap L] \rightarrow B[K] \oplus B[L] \rightarrow B[K \cup L] \rightarrow 0$$

donne le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leftarrow & B[K \cap L]' & \leftarrow & B[K]' \oplus B[L]' & \leftarrow & B[K \cup L]' \leftarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \uparrow \\ 0 & \leftarrow & A(K \cap L) & \leftarrow & A(K) \oplus A(L) & \leftarrow & A(K \cup L) \leftarrow 0 \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

Ici on a utilisé l'hypothèse de la récurrence pour les deux premiers termes. La deuxième ligne est exacte grâce au Théorème 6.2.1. L'injectivité de $A(K \cup L) \rightarrow B[K \cup L]'$ se démontre juste comme dans le Lemme 7.3.2. Ainsi on obtient l'isomorphisme algébrique $A(K \cup L) \xrightarrow{\sim} B[K \cup L]'$. Soit enfin $K \subset L$. De la même façon on peut constater par récurrence que $B[K] \hookrightarrow B[L]$ est continue et sa duale est égale à la restriction $A(K) \leftarrow A(L)$. Donc la densité de l'image découle de l'injectivité de cette restriction et du théorème de Hahn-Banach. C.Q.F.D.

Remarque Pour un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ général, on peut le munir de la

topologie par

$$B[K] = \varinjlim_{L \supset K} B[L],$$

où L parcourt les compacts réunions finies de cubes. Puisqu'on peut réduire ce système à une suite dénombrable, $B[K]$ devient encore un espace de Fréchet. Rappelons que d'autre part $A(K) = \varinjlim_{U \supset K} \mathcal{O}(U)$ est muni de la topologie naturelle par cette limite inductive. Avec un peu de connaissance pour la théorie des espaces vectoriels topologiques, on pourra facilement établir le fait que $B[K]$ et $A(K)$ sont en bonne dualité avec le produit scalaire (7.35). Ils sont comme on dit un espace (FS) resp. (DFS) et acceptent beaucoup de théorèmes abstraits de la théorie des espaces vectoriels topologiques, entre autres le théorème de l'applications ouvertes, le théorème du graphe fermé et le théorème des images fermées.

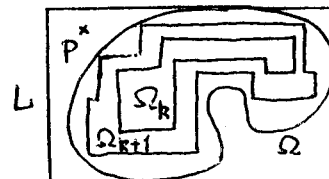
De toute façon notre préparation ci-dessus suffit pour démontrer le
Théorème 7.3.4 B est flasque.

Démonstration Comme on l'a remarqué dans la démonstration du Lemme 3.3.2, il suffit de démontrer la flasquité de $B|_{\Omega_\lambda}$ pour un recouvrement $\{\Omega_\lambda\}$ de \mathbb{R}^n . Il suffit donc de démontrer la surjectivité de $B[L] \rightarrow B(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné quelconque et L est un cube fermé contenant $\bar{\Omega}$. Choisissons $\Omega_k \subset \Omega$, $k = 1, 2, \dots$ une suite d'ouverts réunions finies de cunes ouverts telle que $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$, $\bigcup \Omega_k = \Omega$. Soit $f \in B(\Omega)$. D'après le Corollaire 5.4.3, chaque $f|_{\Omega_k}$ admet un prolongement $g_k \in B[\bar{\Omega}_k]$, a fortiori $g_k \in B[L]$. Considérons la suite

$$0 \rightarrow B[L \setminus \Omega_k] \rightarrow B[L] \rightarrow B(\Omega_k) \rightarrow 0.$$

Notons que $g_{k+1} - g_k \in B[L \setminus \Omega_k]$. Choisissons le système de semi-normes $\|\cdot\|_{k,\ell}$, $\ell = 1, 2, \dots$ de $B[L \setminus \Omega_k]$ de façon que $\|f\|_{k,\ell} \leq \|f\|_{k,\ell+1}$ pour $f \in B[L \setminus \Omega_k]$ et que $\|f\|_{k,\ell} \leq \|f\|_{k+1,\ell}$ pour $f \in B[L \setminus \Omega_{k+1}]$. Choisissons un point $P \in L \setminus \Omega$. L'inclusion $B[P] \hookrightarrow B[L \setminus \Omega_k]$ étant dense, il existe alors un élément $h_k \in B[P]$ tel que

$$\|g_{k+1} - g_k - h_k\|_{k,k} \leq \frac{1}{2^k}.$$



Posons

$$(7.36) \quad \tilde{f} = g_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1} - g_k - h_k).$$

La déformation habituelle

$$(7.37) \quad \tilde{f} = g_N + \sum_{k=N}^{\infty} (g_{k+1} - g_k - h_k) + \sum_{k=1}^{N-1} h_k$$

montre que la somme (7.36) converge dans $B[L]$ et même que le deuxième terme de (7.37) converge dans $B[L \setminus \Omega_N]$. On conclut donc que $\tilde{f} \in B[L]$ et que

$$\tilde{f} \in (g_N + B[L \setminus \Omega_N]) + B[P].$$

D'où $\tilde{f}|_{\Omega_k} = f|_{\Omega_k}$. k étant arbitraire, f est un prolongement voulu de $f \in B(\Omega)$. C.Q.F.D.

Corollaire 7.3.5 Le faisceau constant C sur R^n resp. le faisceau de fonctions holomorphes \mathcal{O} sur C^n sont de dimension flasque juste égale à n .

Une résolution flasque de longueur minimum est donnée resp. par

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C \longrightarrow B^{(0)} \xrightarrow{d} B^{(1)} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} B^{(n)} \longrightarrow 0 & \text{ (résolution de de Rham),} \\ 0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow B^{(0,0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} B^{(0,1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} B^{(0,n)} \longrightarrow 0 & \text{ (résolution de Dolbeault).} \end{aligned}$$

Exercice Pourquoi la minoration par n ?

Donnons maintenant une application.

Théorème 7.3.6 (Malgrange) Soit $U \subset C^n$ un ouvert quelconque. On a $H^k(U, \mathcal{O}) = 0$ pour $k \geq n$.

Démonstration On a $H^k(U, \mathcal{O}) = H^k(\Gamma(U, B^{(0, \cdot)}))$, ce qui s'annule manifestement pour $k > n$. On a en plus

$$H^n(U, \mathcal{O}) = B^{(0,n)}(U) / \bar{\partial} B^{(0,n-1)}(U) = B(U) / \bar{\partial}_1 B(U) + \dots + \bar{\partial}_n B(U),$$

où $\bar{\partial}_j = \partial / \partial \bar{z}_j$. Or, B étant flasque un élément $u \in B(U)$ se prolonge à un élément \tilde{u} sur C^n où l'on a

$$B(C^n) / \bar{\partial}_1 B(C^n) + \dots + \bar{\partial}_n B(C^n) = H^n(C^n, \mathcal{O}) = 0.$$

D'où $u = \bar{\partial}_1 v_1 + \dots + \bar{\partial}_n v_n$ avec $v_j \in B(C^n)$, donc a fortiori $u = \bar{\partial}_1 (v_1|_U) + \dots + \bar{\partial}_n (v_n|_U)$. C.Q.F.D.

Cette démonstration est manifestement valable pour un ouvert d'une variété analytique complexe X vérifiant $H^n(X, \mathcal{O}) = 0$.

Exercice Montrer en réciproque que le théorème de Malgrange implique la flasclité de B .

Exercice Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Démontrer $H^k(\Omega, \mathbb{C}) = 0$ pour $k \geq n$.

Exercice Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert homéomorphe à \mathbb{R}^n . Démontrer que $\Gamma_c(\Omega, B^{(n)})/d\Gamma_c(\Omega, B^{(n-1)}) = H_c^n(\Omega, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Le dernier isomorphisme dépend de l'orientation et est induit par $u(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \mapsto \pm \int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx$, où le signe est celui de $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ par rapport à l'orientation de Ω . [Proposition 7.1.4. Pour la deuxième assertion, comparer l'image de $\delta(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.]

Exercice Soit M une variété analytique réelle de dimension n , connexe (et dénombrable à l'infini). Soit ω_M le faisceau d'orientation de M . Démontrer l'isomorphisme canonique $H_c^n(M, \omega_M) = \mathbb{C}$. [Recouvrir M par des cartes de coordonnées homéomorphes à \mathbb{R}^n et réduire à l'Exercice précédent en décomposant le support par la flasclité de $B^{(n)} \otimes \omega_M$. La valeur d'intégrale avec signe ne dépend pas de carte choisie grâce au facteur ω_M .]

Remarque Soient M, N des variétés analytiques réelles de dimension resp. $m = n+d$ et n . Soit $f: M \rightarrow N$ une application lisse. Considérons la résolution de de Rham relative tensorisée par $\omega_{M/N}$:

$$0 \rightarrow f^{-1}B_N \otimes \omega_{M/N} \rightarrow B_M \otimes \omega_{M/N} \xrightarrow{df} \dots \rightarrow B_f^{(d)} \otimes \omega_{M/N} \rightarrow 0.$$

Soit $U \subset N$ un ouvert et soit \mathfrak{U} la famille de supports de $f^{-1}(U)$ figurant dans la Définition 7.1.3. En vertu du Théorème 4.3.3, on a $H^d(\Gamma_{\mathfrak{U}}(f^{-1}(U), B_f^{(d)} \otimes \omega_{M/N})) = H_{\mathfrak{U}}^d(f^{-1}(U), f^{-1}B_N \otimes \omega_{M/N})$, d'où un homomorphisme de faisceaux ~~isomorphisme~~ canonique

$$(7.38) \quad \int^{an}: f_!(B_f^{(d)} \otimes \omega_{M/N}) \rightarrow R^d f_!(f^{-1}B_N \otimes \omega_{M/N}).$$

D'autre part, la démonstration du Théorème 7.1.9 montre qu'il existe un isomorphisme canonique $R^d f_!(f^{-1}B_N \otimes \omega_{M/N}) \rightarrow B_N \otimes R^d f_! \omega_{M/N}$. Or on a $\int^{al} R^d f_! \omega_{M/N} = \mathbb{C}_N$. D'où on obtient un homomorphisme canonique

$$(7.39) \quad \int^{alg}: R^d f_!(f^{-1}B_N \otimes \omega_{M/N}) \rightarrow B_N.$$

En composant (7.38), (7.39) on obtient un homomorphisme de faisceaux $\int^{alg} \circ \int^{an}$ tout-à-fait pédante $f_!(B_f^{(d)} \otimes \omega_{M/N}) \rightarrow B_N$, une définition \int^{al} de l'intégrale le long de la fibre de f .

⚡ La démonstration se réduit via un recouvrement approprié au cas où $f: M = N \times \mathbb{R}^d \rightarrow N$ est la projection. Voir l'Exercice précédent. Au fond, c'est le même truc que celui utilisé dans Chapitre III, §3 pour définir l'intégrale sur une variété