A. KANEKO

Chapitre VI. Démonstration des théorèmes fondamentaux

Cours de l'institut Fourier, tome 13 (1977-1978), p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__13__A3_0>

CHAPITRE VI. DEMONSTRATION DES THEOREMES FONDAMENTAUX

1. Integration d'hyperfonctions à support compact.

Soit K un compact de R^n. On désignera par $B[K]$ l'espace des hyperfonctions à support dans K. En vertu du Corollaire 5.4.2 on a

$$B[K] = \Gamma_K(R^n, B) = H^n_K(V, \mathcal{O}),$$

où V est un voisinage complexe quelconque de K. Dans le cas où K est de la forme de produit $K_1 \times \ldots \times K_n$, K_j étant compact de C, on peut donner un bon recouvrement pour exprimer ce groupe de cohomologie. Soit $V_j \supset K_j$ un voisinage complexe et posons $V = V_1 \times \ldots \times V_n$. Alors

$$\mathcal{V} = \{V\} \cup \mathcal{V}', \quad \mathcal{V}' = \{V_1 \times \ldots \times V_{j-1} \times (V_j \setminus K_j) \times V_{j+1} \times \ldots \times V_n,\ j=1,\ldots,n\}$$

constituent un recouvrement de Stein relatif de $(V, V \setminus K)$. On a évidemment

$$(6.1) \qquad B[K] = \frac{\mathcal{O}((V_1 \setminus K_1) \times \ldots \times (V_n \setminus K_n))}{\sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}((V_1 \setminus K_1) \times \ldots \times (V_{j-1} \setminus K_{j-1}) \times V_j \times (V_{j+1} \setminus K_{j+1}) \times \ldots \times (V_n \setminus K_n))}.$$

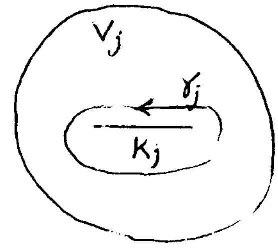
Soit en $\Omega = R^n \cap V$, $U = V$ et $U_j = V \cap \{\operatorname{Im} z_j \neq 0\}$. Rappelons l'expression de $B(\Omega)$ donnée dans l'Exemple 5.4.7 b). L'inclusion $B[K] \hookrightarrow B(\Omega)$ est alors évidemment représentée par la restriction

$$\mathcal{O}((V_1 \setminus K_1) \times \ldots \times (V_n \setminus K_n)) \longrightarrow \mathcal{O}(V \# R^n).$$

Comme là, désignons pour simplifier $(V_1 \setminus K_1) \times \ldots \times (V_n \setminus K_n)$ par $V \# K$. Soit $f(x) \in B[K]$ représentée par $F(z) \in \mathcal{O}(V \# K)$. En cohérence avec Exemple 5.4.7. b) on a alors $f(x) = \sum \sigma_1 \ldots \sigma_n F(x + i\Gamma_\sigma 0)$ et le fait que $\operatorname{supp} f \subset K$ se rend intuitivement visible. Si $L \subset K$ est encore un compact du type produit, l'inclusion canonique $B[L] \hookrightarrow B[K]$ est exprimée par la restriction $\mathcal{O}(V \# L) \to \mathcal{O}(V \# K)$: Cela découle du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B[L] \arrow[rr] \arrow[dr] & & B[K] \arrow[dl] \\ & B(\Omega) & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}(V \# L) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{O}(V \# K) \arrow[dl] \\ & \mathcal{O}(V \# R^n) & \end{tikzcd}.$$

Supposons toujours $K = K_1 \times \ldots \times K_n$. Soit $f(x) \in B[K]$ représentée par $F(z) \in \mathcal{O}(V \# K)$. Définissons l'intégrale définie par



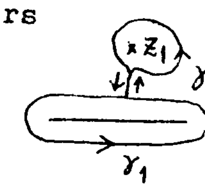
(6.2) $\int_{R^n} f(x)dx = (-1)^n \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_n} F(z)dz_1 \ldots dz_n$,
où γ_j est un chemin fermé simple dans $V_j \setminus K_j$ qui tourne autour de K_j au sens positif. En vertu du théorème de Cauchy, le résultat ne dépend pas de représentant, ni de γ_j, donc ni de V_j non plus.

Remarque Nous pourrons démontrer finamement que l'intégrale (6.2) s'accorde avec l'ancienne définition donnée dans le Chapitre III, §2, 5°. Comme nous somme en chemin de démontrer le Corollaire 3.2.2 sur lequel celle-ci était fondée, nous oublierons pour le moment notre ancienne définition.

Considérons comme un exemple l'intégrale

(6.3) $$G(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{R^n} \frac{f(x)}{(x_1-z_1)\ldots(x_n-z_n)} dx_1 \ldots dx_n$$
$$= \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \oint_{\gamma_1} \cdots \oint_{\gamma_n} \frac{F(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n,$$
où dans le dernier membre z_j est supposé en dehors de γ_j. En déformant γ_j on constate que $G(z) \in \mathcal{O}(C^n \# K)$, ou plus précisément, $G(z) \in \mathcal{O}((P^1 \setminus K_1) \times \ldots \times (P^1 \setminus K_n))$ et que $G(z)$ s'annule aux points à l'infini. Montrons qu'elle définit la même hyperfonction $f(x)$. Pour cela il suffit de montrer que $G(z)|_{V \# K} - F(z)$ est dans le dénominateur de (6.1). Etendons γ_1 à γ_1' qui enclôt z_1 dedans. En vertu du théorème de Cauchy on a alors

$$G(z) = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \oint_{\gamma_1'} \oint_{\gamma_2} \cdots \oint_{\gamma_n} \frac{F(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi i)^n} \oint_{\gamma_2} \cdots \oint_{\gamma_n} \frac{F(z_1, \zeta')}{(\zeta_2-z_2)\ldots(\zeta_n-z_n)} d\zeta_2 \ldots d\zeta_n$$



où le premier terme entre dans le dénominateur de (6.1). Continuant ce procédé on obtiendra $F(z)$ modulo le dénominateur de (6.1). Comme dans le cas d'une variable, cette fonction $G(z)$, déterminée de façon unique par les propriétés énumérées ci-dessus, sera appelée le représentant standard de $f(x)$.

Considérons maintenant un compact K de type général. Choisissons un compact $L \supset K$ du type produit, et un voisinage $V \supset L$ du type produit. Pour $f(x) \in B[K]$, on le considère comme un élément de $B[L]$, prend son représentant

$F(z) \in \mathcal{O}(V \# L)$ et définit son intégrale définie par la formule (6.2). Bien entendu, le résultat ne dépend pas du choix de L. Mais pour distinguer, désignons-la par $\int_L f(x)dx$ pour le moment. Si $L_j \subset L$, $j = 1,\dots,N$ sont des compacts du type produit et $f(x) = \sum_{j=1}^N f_j(x)$ avec $\operatorname{supp} f_j \subset L_j$, on a alors

(6.4) $\int_L f(x)dx = \sum_{j=1}^N \int_{L_j} f_j(x)dx.$

En effet, si $F_j(z) \in \mathcal{O}(V \# L_j)$ est un représentant de $f_j(x)$, $F_j|_{V \# L}$ sera un représentant de $f_j(x)$ considéré comme un élément de $B[L]$. Ainsi $\sum_{j=1}^N F_j(z)|_{V \# L}$ sera un représentant de $f(x) \in B[L]$. Alors (6.4) se réduit à la formule d'additivité pour l'intégrale ordinaire. Ainsi on a montré la dernière moitié du

Lemme 6.1.1 Soient L_j, $j = 1,\dots,n$ des compacts du type produit recouvrant K. Soit $f(x) \in B[K]$. Il existe alors une décomposition $f(x) = \sum_{j=1}^N f_j(x)$ telle que $\operatorname{supp} f_j \subset L_j$. Pour une telle décomposition on a toujours

$$f(x)dx = \sum_{j=1}^N \int f_j(x)dx.$$

Démonstration Il suffit de donner la décomposition pour la réunion de deux fermés $F \cup F'$ dont chacun est la réunion d'un nombre fini de fermés du type produit. On a la suite exacte

$$\Gamma_F(R^n,B) \longrightarrow \Gamma_{F \setminus F'}(R^n \setminus F',B) \longrightarrow H^1_{F \cap F'}(R^n,B).$$

Puisque $F \cap F'$ est encore une réunion de fermés du type produit, on a $H^1_{F \cap F'}(R^n,B) = 0$ d'après le Corollaire 5.4.2. Etant donné $f \in \Gamma_{F \cup F'}(R^n,B)$, soit donc $g \in \Gamma_F(R^n,B)$ un prolongement de $f|_{R^n \setminus F'}$. Alors $f = g + (f-g)$ sera une décomposition voulue. C.Q.F.D.

Bien entendu, après avoir démontré la flascité de B, on aura la décomposition pour n'importe quels fermés.

Lemme 6.1.2 Soit $f(x)$ une hyperfonction à support dans K. Soit $\varphi(\tau,z)$ une fonction holomorphe au voisinage d'un compact $T \times K$. Alors $\int \varphi(\tau,x)f(x)dx$ est holomorphe en τ au voisinage de T. De plus on a

$$\int_T d\tau \int \varphi(\tau,x)f(x)dx = \int \left\{\int_T \varphi(\tau,x)d\tau\right\} f(x)dx.$$

Démonstration D'après le lemme précédent, on peut décomposer supp f aux petits morceaux du type produit sur lesquels $\varphi(\tau,z)$ est toujours définie. Il suffit donc de vérifier l'assertion pour le cas où K est lui-même du type produit. Rappelons que pour un représentant $F(z)$ de $f(x) \in B[K]$, $\varphi(\tau,z)F(z)$ est un représentant de $\varphi(\tau,x)f(x) \in B[K]$. Cela se voit donc facilement par la formule (6.2). C.Q.F.D.

Nous examinons maintenant la relation entre les hyperfonctions et les fonctions ordinaires.

Lemme 6.1.3 Soit $f(x)$ une fonction sommable (ou une distribution) à support dans $K = K_1 \times \ldots \times K_n$. L'intégrale

$$(6.5) \qquad F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{R^n} \frac{f(x)}{(x_1-z_1)\ldots(x_n-z_n)} dx_1 \ldots dx_n$$

définit un élément de $\mathcal{O}(C^n \# K)$, donc un élément $\iota(f)$ de $B[K]$. On a $\operatorname{supp} \iota(f) \subset \operatorname{supp} f$.

Démonstration La première partie est claire. Soit maintenant $f(x) = g(x) + h(x)$ avec $\operatorname{supp} g \subset L = L_1 \times \ldots \times L_n$, $\operatorname{supp} h \subset M = M_1 \times \ldots \times M_n$ et soient $G(z) \in \mathcal{O}(C^n \# L)$, $H(z) \in \mathcal{O}(C^n \# M)$ les fonctions qui leur correspondent par (6.5). On a alors $F(z) = G(z) + H(z)$, d'où $\iota(f) = \iota(g) + \iota(h)$ et

$$\operatorname{supp} \iota(f) \subset \operatorname{supp} \iota(g) \cup \operatorname{supp} \iota(h) \subset L \cup M.$$

En raffinant le partage on aura finalement $\operatorname{supp} \iota(f) \subset \operatorname{supp} f$. C.Q.F.D.

Théorème 6.1.4 La correspondence donnée dans le lemme précédent peut se prolonger à une inclusion de faisceau $L_{1,loc} \hookrightarrow B$ (ou $D' \hookrightarrow B$). Elle est compatible avec l'habituelle $A \hookrightarrow L_{1,loc}$ et l'une $A \hookrightarrow B$ donnée avant.

En effet, étant donné $f(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$, on le décompose comme d'habitude en une somme localement finie de fonctions sommables à support compact: $f(x) = \sum_\lambda f_\lambda(x)$. On définit alors

$$\iota(f) = \sum_\lambda \iota(f_\lambda),$$

où $\iota(f_\lambda)$ est celui défini en Lemme 6.1.3. D'après ce lemme la somme est encore localement finie, donc définit une section $\iota(f) \in B(\Omega)$. Le fait que le résultat ne dépend pas de la décomposition, ainsi définissant un homomorphisme de faisceaux, que ι est injectif et qu'on a la compatibilité $A \hookrightarrow L_{1,loc} \hookrightarrow B$ peuvent se vérifier juste à la même manière que le Théorème 1.3.9.

<u>Exercice</u> Soient $f(x) \in D'(\Omega)$, $\varphi(x) \in A(\Omega)$. Montrer $\varphi\iota(f) = \iota(\varphi f)$, $\partial^\alpha \iota(f) = \iota(\partial^\alpha f)$ et, si f est à support compact, $\int_{R^n} f(x)dx = \int_{R^n} \iota(f)dx$.

Le lemme suivant joue un rôle important dans les prochains paragraphes:

<u>Lemme 6.1.5</u> Soit $D_\rho = \{|x_j| \leq \rho,\ j=1,\dots,n\}$ un n-cube contenue dans un ouvert Ω. Soit $\chi_\rho(x)$ la fonction caractéristique de D_ρ. Supposons que l'hyperfonction $f(x) = F(x+i\Gamma 0) \in B(\Omega)$ est analytique réelle au voisinage de ∂D_ρ. On a alors $\chi_\rho(x)f(x) \in B[D_\rho]$ et

(6.6) $$\int_{R^n} \chi_\rho(x)f(x)dx = \int_{D_\rho} F(x+i\varepsilon(x))d(x+i\varepsilon(x)),$$

où $\varepsilon(x) = (\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_n(x))$ est une application continue et régulière par morceaux vérifiant

(6.7) $$\begin{cases} \varepsilon(x) = 0 & \text{si } x \in \partial D_\rho, \\ x+i\varepsilon(x) \in D_\rho + i\Gamma 0 & \text{si } x \in \mathrm{Int}(D_\rho). \end{cases}$$

En particulier, le représentant standard de $\chi_\rho(x)f(x)$ est donné par

(6.8) $$G(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{D_\rho} \frac{F(x+i\varepsilon(x))}{(x_1+i\varepsilon_1(x)-z_1)\dots(x_n+i\varepsilon_n(x)-z_n)} d(x+i\varepsilon(x)).$$

<u>Démonstration</u> Notons d'abord que $\chi_\rho(x)f(x)$ est bien défini: A l'intérieur de D_ρ, $\chi_\rho(x)f(x) = f(x)$, et au voisinage de ∂D_ρ, $\chi_\rho(x)f(x)$ est égal à une fonction localement sommable ayant le saut le long de ∂D_ρ, qui est encore considérée comme une hyperfonction à l'aide du Théorème 6.1.4. Grâce à la compatibilité du plongement $A \hookrightarrow L_{1,loc} \hookrightarrow B$, la définition se recolle au domaine commun. Rappelons ensuite, que, d'après le Lemme 3.1.3 qu'on a déjà démontré dans le paragraphe précédent, $F(z)$ se prolonge au voisinage de ∂D_ρ. Ainsi, tout l'énoncé de notre lemme a le sens. Maintenant la démonstration.

Commençons plutôt par (6.8). Par la déformation de chemin on voit facilement que $G(z) \in \mathcal{O}(C^n \# D_\rho)$. Montrons que $G(z)$ est un représentant de l'hyperfonction $\chi_\rho(x)f(x)$. Sans perdre la généralité on peut supposer que Γ ~~est contenu dans~~ contient le premier orthant. On peut alors choisir un chemin d'intégrale du type produit:

$$\mathcal{E}(x) = (\mathcal{E}_1(x_1), \ldots, \mathcal{E}_n(x_n)), \quad \mathcal{E}_j(\pm\rho) = 0, \quad \mathcal{E}_j(t) > 0 \quad \text{pour} \quad -\rho < t < \rho,$$

de sorte que, en posant $\gamma_j^+ = \{t + i\mathcal{E}_j(t); -\rho \le t \le \rho\}$, on aura

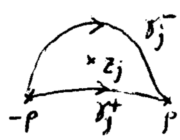
$$G(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1^+} \cdots \int_{\gamma_n^+} \frac{F(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n. \tag{6.9}$$

Remarquons que ce nouveau chemin ne satisfait pas tout à fait à la condition (6.7), car il ne touche R^n qu'à la frontière distinguée $\{x_j = \pm\rho,\ j = 1, \ldots, n\}$. Cependant cette déformation est légitime en vertu du théorème de Poincaré.*)

Grâce à cette expression, chaque composante de $G(z) \in \mathcal{O}(C^n \# D_\rho)$ se prolonge via $\mathrm{Int}(D_\rho)$ au premier orthant d'après la méthode quotidienne de Cousin. Désignons par $G_\sigma(z)$ ce prolongement à partir du σ-ième orthant. Par l'usage répété du théorème de Cauchy, on a alors $F(z) = \sum_\sigma \sigma_1 \ldots \sigma_n G_\sigma(z)$ là. En effet, on a, par exemple,

$$\sigma_2 \ldots \sigma_n \left(G_{+\sigma_2 \ldots \sigma_n}(z) - G_{-\sigma_2 \ldots \sigma_n}(z) \right) = \frac{\sigma_2 \cdots \sigma_n}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{\gamma_2^{\sigma_2}} \cdots \int_{\gamma_n^{\sigma_n}} \frac{F(z_1, \zeta') d\zeta_2 \ldots d\zeta_n}{(\zeta_2 - z_2) \ldots (\zeta_n - z_n)},$$

où $\gamma_j^\pm$ est un chemin qui relie $\pm\rho$ dans le demi-plan supérieur et qui passe au-dessous (resp. au-dessus) de z_j. Ainsi par définition on a



$$F(x + i\Gamma 0) = \sum_\sigma \sigma_1 \ldots \sigma_n G(x + i\Gamma_{+\cdots+} 0) = \sum_\sigma \sigma_1 \ldots \sigma_n G(x + i\Gamma_\sigma 0)$$

dans $\mathrm{Int}(D_\rho)$. Il reste donc à comparer celle-ci et $\chi_\rho(x) f(x)$ au voisinage de ∂D_ρ. Soit $\chi_{\rho'}(x)$ la fonction caractéristique de $D_{\rho'}$, où $\rho' < \rho$ est choisi de la manière que $f(x)$ soit analytique réel au voisinage de $D_\rho \setminus \mathrm{Int}(D_{\rho'})$. Choisissons maintenant le chemin d'intégrale de façon que $\mathcal{E}(x) = 0$ sur $D_\rho \setminus \mathrm{Int}(D_{\rho'})$. On a alors

$$G(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{D_\rho \setminus \mathrm{Int}(D_{\rho'})} \frac{F(x)}{(x_1 - z_1) \ldots (x_n - z_n)} dx$$
$$+ \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{D_{\rho'}} \frac{F(x + i\mathcal{E}(x))}{(x_1 + i\mathcal{E}_1(x) - z_1) \ldots (x_n + i\mathcal{E}_n(x) - z_n)} d(x + i\mathcal{E}(x)).$$

En vertu du Théorème 6.1.4, le premier terme redonne la fonction sommable $\chi_\rho(x)(1 - \chi_{\rho'}(x)) f(x)$ comme hyperfonction. Le second terme définit une

---

*) En effet, si $F(z)$ est holomorphe jusqu'au voisinage de D_ρ, les deux sortes d'intégrales se déforment chacune à celle sur D_ρ, d'après le théorème de Poincaré resp. le théorème de Cauchy. Dans le cas général, il suffit de les comparer pour les chemins translatés de $i\mathcal{E}(1, \ldots, 1)$ et puis de prendre la limite $\mathcal{E} \downarrow 0$. (Remarquons que les deux sortes de chemins ne sont pas directement homologues.

hyperfonction à support dans D_ρ'. Ainsi au voisinage de ∂D_ρ on a encore $\chi_\rho(x)f(x) = \sum_\sigma \sigma_1 \ldots \sigma_n G(x+i\Gamma_\sigma 0)$.

Maintenant, par la définition d'intégrale définie (6.2), on a

$$\int \chi_\rho(x)f(x)dx = (-1)^n \oint_{\gamma_1'} \ldots \oint_{\gamma_n'} G(z)dz_1 \ldots dz_n,$$

où γ_j' est un chemin fermé simple autour de $[-\rho,\rho]$. Utilisons ici (6.9) pour l'expression de $G(z)$. En remarquant que le chemin γ_j' contourne γ_j^+, on obtient d'après le théorème de Cauchy

$$(-1)^n \oint_{\gamma_1'} \ldots \oint_{\gamma_n'} G(z)dz_1 \ldots dz_n = \int_{\gamma_1^+} \ldots \int_{\gamma_n^+} F(\zeta)d\zeta_1 \ldots d\zeta_n.$$

Le retour à l'expression (6.6) est encore dû au théorème de Poincaré. C.Q.F.D.

Pour terminer ce paragraphe, généralisons un peu la situation, et considérons une hyperfonction $f(x,t)$ définie sur $\Omega \times R^m$. Soit $K \subset R^m$ un compact du type produit $K_1 \times \ldots \times K_m$ et supposons que $\operatorname{supp} f \subset \Omega \times K$. Nous définirons l'intégrale $\int f(x,t)dt$. Soit $U \supset \Omega$ un voisinage de Stein et soient U_j, $j=1,\ldots,N$ un recouvrement de Stein de $U \setminus \Omega$ (par exemple celui donné en Exemple 5.4.7). Soit $V_j \supset K_j$ un voisinage complexe et posons $V = V_1 \times \ldots \times V_m$. Alors

$$X_j = U_j \times V, \quad j = 1,\ldots,N,$$
$$Y_k = U \times V_1 \times \ldots \times V_{k-1} \times (V_k \setminus K_k) \times V_{k+1} \times \ldots \times V_m, \quad k = 1,\ldots,m$$

est un recouvrement de Stein de $U \times V \setminus \Omega \times K$. Donc $f(x,t)$ peut se représenter par un $(n+m)$-cocycle

$$(6.10) \qquad \sum_{j_1 \ldots j_n} F_{j_1 \ldots j_n}(z,\tau) U \times V \wedge X_{j_1} \wedge \ldots \wedge X_{j_n} \wedge Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_m + \ldots,$$

où $F_{j_1 \ldots j_n}(z,\tau) \in \mathcal{O}(U_{j_1} \cap \ldots \cap U_{j_n} \times V \# K)$ et les points représentent les termes contenant au plus $m-1$ facteurs parmi $Y_1,\ldots,Y_m$. Posons donc

$$(6.11) \qquad \int_{R^m} f(x,t)dt = \Big[\sum_{j_1 \ldots j_n} (-1)^m \oint_{\gamma_1} \ldots \oint_{\gamma_m} F_{j_1 \ldots j_n}(z,\tau) d\tau_1 \ldots d\tau_m U \wedge U_{j_1} \wedge \ldots \wedge U_{j_n} \Big],$$

où γ_j désigne un chemin fermé simple dans $V_j \setminus K_j$ contournant K_j au sens positif et le crochet signifie l'hyperfonction définie par le cocycle. Notons en effet que les termes abrégés dans (6.10) s'annulent après cette intégration en vertu du théorème de Cauchy. Puisque l'intégrale commute par linéarité à l'opérateur de cobord, il est donc évident que le résultat d'intégrale est encore un (n+m)-cocycle, d'où, après avoir enlevé le facteur commun $Y_1\wedge\cdots\wedge Y_m$ il devient un n-cocycle pour $\{U,U_1,\ldots,U_N\}$.

Lemme 6.1.6 L'hyperfonction $\int_{R^m} f(x,t)dt \in B(\Omega)$ donnée par (6.11) ne dépend pas du choix de représentants $F_{j_1\ldots j_n}(z,\tau)$ ni de recouvrement de $U\setminus\Omega$.

Démonstration Deux recouvrements peuvent se réduire à un raffinement commun. Donc il suffit de vérifier que le second membre de (6.11) s'annule pour un cobord:

$$\delta\Big(\sum_{j_1\ldots j_{n-1}} F_{j_1\ldots j_{n-1}}(z,\tau)U\times V\wedge X_{j_1}\wedge\cdots\wedge X_{j_{n-1}}\wedge Y_1\wedge\cdots\wedge Y_m+\cdots\Big),$$

où on a encore abrégé les termes qui s'annulent par l'intégration. L'intégrale commutant toujours au cobord, le résultat est aussi un cobord qui est, au facteur $Y_1\wedge\ldots\wedge Y_m$ près, égal à

$$\delta\Big(\sum_{j_1\ldots j_{n-1}}(-1)^m\oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_m}F_{j_1\ldots j_{n-1}}(z,\tau)d\tau_1\ldots d\tau_m U\wedge U_{j_1}\wedge\cdots\wedge U_{j_{n-1}}\Big). \quad \text{C.Q.F.D}$$

Corollaire 6.1.7 On a

$$\int_{R^m} f(x,t)dt = \int_R dt_m \int_R dt_{m-1}\cdots\int_R f(x,t)dt_1,$$

et l'ordre d'intégrale n'importe pas au résultat.

En effet, si on emploie le recouvrement de $U\times V\setminus\Omega\times K$ comme ci-dessus, les différentes façons d'intégrale aboutissent toujours au même résultat.注)

Si supp f(x,t) est contenu dans $\Omega\times K$ avec un compact K de type général, on peut préciser l'argument à l'aide de recouvrements de K par petites cubes. Ainsi on aura des énoncés pareils au cas d'intégrale définie. Le détail sera laissé à titre d'exercice.

2. Décomposition spectrale

Examinons maintenant le support singulier et le spectre singulier des hyperfonctions. Fabriquons pour ce but un ouvert de Stein remarquable.

注) Rappelons qu'on utilise pour simplifier $\underline{H}^n_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O})$ au lieu de $B=\underline{H}^n_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O})\otimes\underline{H}^n_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{C})$. Quand on fait un tel calcul, il faut se rappeler ce facteur accessoire pour ne pas produire le faux signe. C'est la même sorte de remarque que lorsqu'on utilise la forme différentielle $dt_1\wedge\ldots\wedge dt_m$ au lieu de l'élément de volume $dt_1\ldots dt_m$.

Considérons le changement de coordonnées global $C^n \to C^n$ défini par

$$(6.12)\qquad \begin{cases} w_1 = z_1 + i\cancel{\alpha}(z_2^2+\dots+z_n^2), \\ w_2 = z_2, \dots, w_n = z_n, \end{cases}$$

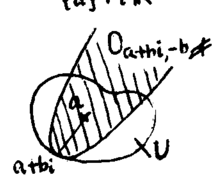
~~où $\alpha > 0$ est une constante~~. Partons par l'ouvert dans l'espace des w défini par $\operatorname{Im} w_1 > -\cancel{\alpha}(\operatorname{Re} w_1)^2$. Il est de Stein puisqu'il est du type produit. L'image de cet ouvert par (6.12) s'écrit, avec la notation habituelle $z = x+iy$,

$$y_1 - \cancel{\alpha}(y_2^2+\dots+y_n^2) + \cancel{\alpha}(x_2^2+\dots+x_n^2) + \cancel{\alpha}\{x_1 - 2\cancel{\alpha}(x_2y_2+\dots+x_ny_n)\}^2 > 0.$$

Il est donc un ouvert de Stein contenant $R^n \setminus \{0\}$ et le coin infinitésimal $y_1 > \cancel{\alpha}(y_2^2+\dots+y_n^2)$ du type $R^n + i\{y_1 > 0\}0$. Désignons par $0_{a,\omega,\cancel{\alpha}}$ l'ouvert ainsi obtenu mais avec la co-direction $(1,0,\dots,0)$ remplacée par $\omega \in S^{*n-1}$ et l'origine translatée à $a \in C^n$. En utilisant ceci donnons d'abord une démonstration directe et simple du

<u>Théorème de Grauert</u> Tout ouvert $\Omega \subset R^n$ admet un système de voisinages complexes fondamentaux formé d'ouverts de Stein.

dessin dans $\{a\}+iR^n$



<u>Démonstration</u>[*)] Soit $U \supset \Omega$ un voisinage quelconque. Posons

$$V = \begin{array}{l} \text{La composante connexe contenant } \Omega \text{ de} \\ \operatorname{Int}\Big[\bigcap_{a+bi \in (\partial U \setminus R^n)} 0_{a+bi,-b\cancel{\alpha}} \cap \bigcap_{a \in \partial U \cap R^n}\ \bigcap_{\omega \in S^{*n-1}} 0_{a,\omega,\cancel{\alpha}}\Big]. \end{array}$$

D'après la Proposition 2.3.7 a), V est bien un ouvert de Stein. On a $V \subset U$. En effet, il est d'abord clair que $V \subset \Omega + iR^n$, car $V \cap (\partial\Omega + iR^n) = \emptyset$. Soit donc $z = x+iy \in U$ avec $x \in \Omega$. Il existe alors $0 < t < 1$ tel que $a+bi = x+tyi \in \partial U$, d'où z ne sera pas contenu dans $0_{a+bi,-b\cancel{\alpha}}$. Montrons enfin $V \supset \Omega$. Pour cela il suffit de voir, en remplaçant ∂U par l'extérieur de $\{|x| < \varepsilon\ ,\ |y| < \varepsilon\}$, que

$$\bigcap_{|a| \leq \varepsilon, |b| \geq \varepsilon} 0_{a+bi,-b\cancel{\alpha}} \cap \bigcap_{|a| \geq \varepsilon,\, b \neq 0} 0_{a+bi,-b\cancel{\alpha}} \cap \bigcap_{|a| \geq \varepsilon,\, a \in R^n}\ \bigcap_{\omega \in S^{*n-1}} 0_{a,\omega,\cancel{\alpha}}$$

contient un voisinage de l'origine. Ceci découle du calcul suivant: Pour $|y'| \leq 1/4$ on a

$$\begin{aligned} y_1 - y'^2 + x'^2 + \{x_1 - 2x'y'\}^2 &\geq y_1 - y'^2 + x'^2 - 4|x_1|\,|x'|\,|y'| - 4|x'|^2|y'|^2 \\ &\geq y_1 - y'^2 + \tfrac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

ce qui est positif pour $|x| \geq \varepsilon$, $|y'| < \varepsilon/4$, $y_1 > -3\varepsilon/16$, ou pour $y_1 \geq \varepsilon$,

[*)] Une démonstration, peu élémentaire, a été déjà achevée à l'aide des Théorèmes 2.4.7 et 5.2.3.

$|y'| < \sqrt{\varepsilon}$. C.Q.F.D.

Jusqu'au paragraphe précédent, nous n'avons utilisé que l'existence d'un voisinage de Stein pour $\Omega \subset R^n$. Maintenant nous utilisons le théorème de Grauert de façon essentielle.

<u>Théorème 6.2.1</u> (Malgrange) Soit $\Omega \subset R^n$ un ouvert quelconque. On a $H^k(\Omega, A) = 0$ pour $k \geq 1$.

<u>Démonstration</u> Notons que $A = \mathcal{O}|_{R^n}$. D'après la Proposition 4.6.6 on a donc

$$H^k(\Omega, A) = \varinjlim_{U \supset \Omega} H^k(U, \mathcal{O}).$$

Grâce au théorème de Grauert, on peut limiter $U \supset \Omega$ aux voisinages de Stein. Ainsi d'après le théorème d'Oka-Cartan on obtient la conclusion. C.Q.F.D.

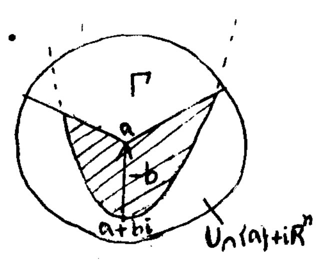
<u>Lemme 6.2.2</u> Soient $\Omega \subset R^n$ un ouvert et Γ un cône convexe ouvert. Soit $U \supset \Omega$ un voisinage et soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans le coin infinitésimal $(R^n + i\Gamma) \cap U$. Il existe alors une fonction $G(z)$ holomorphe dans un coin infinitésimal $R^n + i\Gamma 0$ ainsi qu'au voisinage de $R^n \setminus \bar{\Omega}$, et une fonction $H(x) \in A(\Omega)$, telles que l'on ait $F(z) = G(z) + H(z)$ sur le domaine commun.

<u>Démonstration</u> Sans perdre la généralité on peut supposer que $-\Gamma^\circ \subset \Gamma$. Soit U_1 l'intérieur de l'ensemble des points $a+bi \in U$ tels que, si $b \neq 0$ et $b \in \Gamma^\circ$,

$$(O_{a+bi,-b} \cap \{a\} + iR^n) \setminus \{a\} + i\Gamma \subset\subset U \cap \{a\} + iR^n.$$

Il est clair que U_1 est encore un voisinage de Ω contenu dans $U \cap (\Omega + iR^n)$. Prenons un autre voisinage U_2 de Ω tel que $\overline{U}_2 \setminus \partial\Omega \subset U_1$ et posons

$$W = \mathrm{Int}\Big[\bigcap_{a+bi \in \partial U_2 \setminus R^n,\ b \in \Gamma^\circ} O_{a+bi,-b} \cap \bigcap_{a \in \partial\Omega} \bigcap_{\omega \in \Gamma^\circ} O_{a,-\omega}\Big].$$



Par la même raison que la page précédente W devient un voisinage de Stein de $R^n \setminus \partial\Omega$. Posons encore

$$V = [W \cap \{(R^n \setminus \Omega) + iR^n\}] \cup [W \cap (\Omega + i\Gamma)].$$

V est un ouvert (non nécessairement de Stein) contenant un coin infinitésimal $R^n + i\Gamma 0$ et aussi $R^n \setminus \bar{\Omega}$. Notons que $W \setminus V \subset U$. En effet, d'après la définition de U_1 on peut vérifier cette inclusion sur chaque section avec $\{a\} + iR^n$ pour $a \in \Omega$.

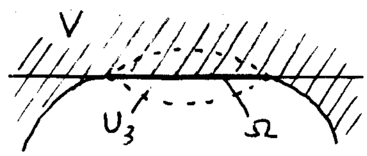
---

*) Rappelons qu'on a défini Γ° par $\{\xi \in R^n;\ \langle y, \xi\rangle \leq 0 \text{ pour } \forall y \in \Gamma\}$.

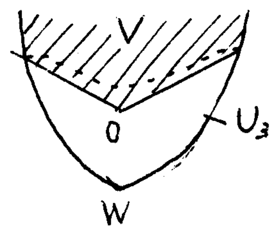
Soit donc $U_3 \subset U$ un ouvert tel que $W = V \cup U_3$. (On peut en fabriquer en ajoutant à $W \setminus V$ un petit voisinage de $W \cap \partial V$.) Puisque $W = V \cup U_3$ est de Stein, on obtient de la suite exacte de Mayer-Vietoris (Théorème 4.3.8)

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{O}(V) \oplus \mathcal{O}(U_3) \longrightarrow \mathcal{O}(V \cap U_3) \longrightarrow H^1(V \cup U_3, \mathcal{O}) = 0.$$

En appliquant ceci à $F(z)|_{V \cap U_3}$, on obtient une décomposition voulue avec $G(z) \in \mathcal{O}(V)$ et $H(z) \in \mathcal{O}(U_3)$. C.Q.F.D.



section avec $y = Cte$



Section avec $x = Cte$

Théorème 6.2.3 B/A est un faisceau flasque. Pour un ouvert $\Omega \subset R^n$, on a $B/A(\Omega) = B(\Omega)/A(\Omega)$.

Démonstration Regardons la suite exacte d'espaces de sections associée à celle de faisceaux $0 \to A \to B \to B/A \to 0$. D'après le Théorème 6.2.1 on a

$$0 \longrightarrow A(\Omega) \longrightarrow B(\Omega) \longrightarrow B/A(\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega, A) = 0,$$

d'où la deuxième assertion. Pour démontrer la première assertion, il suffit donc de montrer ceci: Etant donné $f \in B(\Omega)$, il existe $g \in B(R^n)$, $h \in A(\Omega)$ tels que $f = g|_\Omega + h$. Soit $U \supset \Omega$ un voisinage de Stein. On a alors une expression $f(x) = \sum_\sigma F_\sigma(x + i\Gamma_\sigma 0)$ avec $F_\sigma(z) \in \mathcal{O}((R^n + i\Gamma_\sigma) \cap U)$. Donc l'assertion découle du Lemme 6.2.2. C.Q.F.D.

Dans la littérature courante on démontre la flascité de B/A en utilisant la flascité de B (Exercice!). Ici le rôle de celle-ci a été remplacé par le Lemme 6.2.2. Nous laissons la démonstration de la flascité de B encore à l'ultérieur, car elle n'est pas nécessaire pour l'étude de spectre singulier. Par contre, la flascité de B/A y jouera un rôle important.

Notons que la flascité de B/A implique la possibilité de décomposition libre de supp sing f. Ainsi l'énoncé du Théorème 3.2.1 concernant le support singulier est établi.

Remarquons que le Lemme 6.2.2 suggère une assertion plus forte que cela, à savoir le prolongement conservant le S.S. Pour étudier ce phénomène en détail, introduisons la fonction suivante:

$$(6.13) \qquad W(z,\zeta) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{(1-iz\zeta/\sqrt{\zeta^2})^{n-1} - (1-iz\zeta/\sqrt{\zeta^2})^{n-2}(z^2-(z\zeta)^2/\zeta^2)}{\{z\zeta+i(z^2\sqrt{\zeta^2}-(z\zeta)^2/\sqrt{\zeta^2})\}^n},$$

où on a abrégé comme toujours

$$z\zeta = z_1\zeta_1+\dots+z_n\zeta_n, \qquad z^2 = z_1^2+\dots+z_n^2, \qquad \zeta^2 = \zeta_1^2+\dots+\zeta_n^2.$$

<u>Exercice</u> Posons $\Phi(z,\zeta) = z\zeta + i(z^2\sqrt{\zeta^2}-(z\zeta)^2/\sqrt{\zeta^2}) = \langle z, \Psi(z,\zeta)\rangle$. Alors ~~dans~~ le numérateur de (6.13) s'écrit

$$\det\left(\frac{\partial \Psi_j(z,\zeta)}{\partial \zeta_k}\right).$$

<u>Lemme 6.2.4</u> Soit $z = x+iy$, $\zeta = \xi+i\eta$. Soit Γ un cône convexe ouvert. Lorsque ξ est limité dans $\mathrm{Int}(-\Gamma^\circ)$, $W(z,\zeta)$ est holomorphe dans un coin infinitésimal $R^n \times \mathrm{Int}(-\Gamma^\circ) + i\Delta 0$ tel que $\Delta \cap \{\eta = 0\} \supset \Gamma$. Elle se prolonge aussi sur $(R^n \setminus \{0\}) \times \mathrm{Int}(-\Gamma^\circ)$. Ainsi elle définit une hyperfonction $W(x,\xi) = W(x+i\xi 0, \xi)$ sur $R^n \times (R^n \setminus \{0\})$ analytique sur $(R^n\setminus\{0\}) \times (R^n \setminus \{0\})$ et contenant ξ partout comme paramètres analytiques réels. Pour chaque ξ fixé, on a

$$\mathrm{S.S.}_x\, W(x+i\xi 0,\xi) = \{(0, -\tfrac{1}{i}\xi\, dx\infty)\}.$$

<u>Démonstration</u> Posons

$$\tilde{E}_\xi = \{y \in R^n;\ y\xi - (y^2-(y\xi)^2) > 0\}.$$

Il est un ensemble approchant le demi-espace E_ξ.
Pour $\eta = 0$, la partie imaginaire du facteur dans le dénominateur de (6.13) est égale à $|\xi|\{y\xi-(y^2-(y\xi)^2)\}$. $W(z,\zeta)$ est donc holomorphe au voisinage de

$$\Big[R^n + i \bigcap_{\xi \in -\Gamma^\circ} \tilde{E}_\xi\Big] \times \{\eta = 0\}.$$

Donc d'après le théorème de Kashiwara (voir les Corollaires 2.2.5 et 2.2.7), il existe un cône convexe ouvert $\Delta \subset R^{2n}$ tel que $\Delta \cap \{\eta = 0\} \supset \Gamma$ et que $W(z,\zeta)$ soit holomorphe dans $R^n \times \mathrm{Int}(-\Gamma^\circ) + i\Delta 0$. (Remarquons qu'on peut choisir Δ uniformément sur $R^n \times \mathrm{Int}(-\Gamma^\circ)$. En effet, ceci est vrai pour $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ si on ~~En effet, quand on applique le Corollaire~~ applique le Corollaire 2.2.5 à $\{|x|<1\} \times \mathrm{Int}(-\Gamma^\circ) \cap \{\frac{1}{2} < |\xi| < 2\} \subset R^n \times \mathrm{Int}(-\Gamma'^\circ)$. Soit

Δ' le cône ainsi obtenu. D'après le Corollaire 2.2.7 $W(z,\zeta)$ se prolonge au coin infinitésimal avec le cône l'enveloppe convexe de $\bigcup_{\Gamma'\subset\subset\Gamma}\Delta'$. La restriction pour $|\xi|$ resp. $|x|$ peuvent s'omettre grâce à la homogénéité resp. l'analyticité.)

Vérifions enfin l'analyticité de $W(z,\zeta)$ sur $(R^n\setminus\{0\})\times(R^n\setminus\{0\})$. Sans perdre la généralité on peut choisir $\xi = (|\xi|,0,\dots,0)$. Alors le facteur $\Phi(x,\xi)$ dans le dénominateur de (6.13) s'écrit

$$|\xi|(x_1+i(x_2^2+\dots+x_n^2)),$$

d'où aussitôt la conclusion. C.Q.F.D.

Puisque $\xi\in R^n\setminus\{0\}$ sont des paramètres analytiques réels de $W(x+i\xi 0,\xi)$, leur spécialisation peut se faire sans limitation. Nous allons souvent en utiliser la spécialisation sur la sphère unité $S^{n-1}\subset R^n\setminus\{0\}$. Les paramètres seront alors notés par $\omega\in S^{n-1}$. (6.13) se réduit à la forme suivante:

$$(6.14)\qquad W(x,\omega) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{(1-ix\omega)^{n-1}-(1-ix\omega)^{n-2}(x^2-(x\omega)^2)}{\{x\omega+i(x^2-(x\omega)^2)+i0\}^n}.$$

Soit $K\subset R^n$ un compact. Etant donné $f(x)\in B[K]$, posons maintenant

$$(6.15)\qquad (W*f)(z,\zeta) = \int_{R^n}W(z-t,\zeta)f(t)dt,$$

où l'intégrale est faite au sens du paragraphe précédent. En vertu du Lemme 6.1.2, le résultat est une fonction holomorphe en (z,ζ) dans le même coin infinitésimal que le Lemme 6.2.4, et aussi au voisinage de $(R^n\setminus K)\times S^{n-1}$. Donc elle définit une hyperfonction $(W*f)(x+i\omega 0,\omega)$ sur $R^n\times S^{n-1}$ contenant ω comme des paramètres analytiques réels.

<u>Lemme 6.2.5</u> La correspondence $f(x)\longmapsto(W*f)(x+i\omega 0,\omega)$ s'étend à un homomorphisme de faisceaux

$$sp:\ B_{R^n}\longrightarrow\pi_*(B/A)_{R^n\times S^{n-1}}$$

où π est la projection naturelle de $R^n\times S^{n-1}$ sur R^n.

<u>Démonstration</u> Prenons $f(x)\in B(\Omega)$. Soit $f=\sum_\lambda f_\lambda$ une décomposition à la somme localement finie d'éléments à support compact (ce qui existe d'après le Corollaire 5.4.3 et la remarque qui suit). On définit

$$sp(f) = \sum_\lambda(W*f_\lambda)(x+i\omega 0,\omega).$$

Puisque $\operatorname{supp}\operatorname{sing}_{x,\omega}(W*f_\lambda)(x+i\omega 0,\omega)\subset\operatorname{supp}f_\lambda\times S^{n-1}$, la somme est encore localement finie dans $B/A(\Omega\times S^{n-1})$, ainsi définit un élément dedans. Par la même raison, le résultat ne dépend pas de la décomposition. C.Q.F.D.

<u>Lemme 6.2.6</u> L'homomorphisme sp induit un homomorphisme de faisceaux $[sp] : (B/A)_{R^n} \longrightarrow \pi_*(B/A)_{R^n \times S^{n-1}}$.

<u>Démonstration</u> Il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $f(x)$ une fonction analytique réelle au voisinage de n-cube D_ρ. Alors $W*(\chi_\rho f)$ est analytique dans $\mathrm{Int}(D_\rho) \times S^{n-1}$, où $\chi_\rho(x)$ désigne la fonction caractéristique de D_ρ. D'après ~~la démonstration~~ le Lemme 6.1.5, on a la formule suivante:

$$(W*(\chi_\rho f))(z,\zeta) = \int_{D_\rho} W(z-t,\zeta)f(t)dt \underset{t\mapsto}{=} \int_{D_\rho} W(z-t-i\varepsilon(t))f(t+i\varepsilon(t))d(t+i\varepsilon(t))$$

(voir (6.6)), où $t+i\varepsilon(t)$ est un chemin ~~reliant~~ à bord ∂D_ρ dans le domaine d'analyticité de f. Notre assertion s'ensuit immédiatement de cela. C.Q.F.D.

<u>Théorème 6.2.7</u> sp induit un homomorphisme de faisceaux $[[sp]] : C \longrightarrow (B/A)^a_{R^n \times S^{n-1}}$, où $a: R^n \times S^{n-1} \longrightarrow R^n \times S^{n-1}$ est l'application antipodale et $(B/A)^a_{R^n \times S^{n-1}}$ désigne l'image réciproque (directe) de $(B/A)_{R^n \times S^{n-1}}$ par cet homéomorphisme a.

<u>Démonstration</u> Soit $\Omega \subset R^n$ et $\Delta \subset S^{n-1}$ des ouverts connexes. On a alors par définition $\pi^{-1}B(\Omega \times \frac{1}{i}\Delta\, dx\infty) = B(\Omega)$, et $A^*(\Omega \times \frac{1}{i}\Delta\, dx\infty)$ = le sous espace de $B(\Omega)$ des éléments f vérifiant $S.S.f \cap \Omega \times \frac{1}{i}\Delta\, dx\infty = \emptyset$. On va montrer que sp envoie un élément $f \in A^*(\Omega \times \frac{1}{i}\Delta\, dx\infty)$ à un élément de $(B/A)_{R^n \times S^{n-1}}(\Omega \times S^{n-1})$ qui est analytique réel sur $\Omega \times (-\Delta)$. Ainsi on obtiendra un homomorphisme bien défini

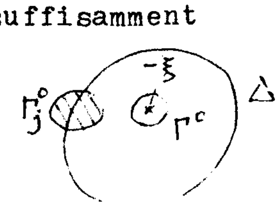
$$\pi^{-1}B(\Omega \times \tfrac{1}{i}\Delta dx\infty)/A^*(\Omega \times \tfrac{1}{i}\Delta dx\infty) \longrightarrow (B/A)_{R^n \times S^{n-1}}(\Omega \times (-\Delta)),$$

d'où un homomorphisme de faisceaux $C \longrightarrow (B/A)^a_{R^n \times S^{n-1}}$.

Considérons un point quelconque de $\Omega \times (-\Delta)$. Sans perdre la généralité, on peut le supposer $(0,\xi)$. Soit D_ρ le n-cube de centre 0 et de côté 2ρ, et soit Γ un cône convexe ouvert tel que $\xi \in \mathrm{Int}(-\Gamma^c)$ et que $(-\Gamma^o) \cap S^{n-1} \subset -\Delta$. L'hypothèse $(0, -\frac{1}{i}\xi\, dx\infty) \notin S.S.f$ signifie qu'il existe une expression de f au voisinage de l'origine

$$f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0),$$

telle que $\Gamma_j^o \not\ni -\xi$ pour tout j. En choisissant D_ρ et Γ^o suffisamment



petits, on peut supposer que cette expression est valable au voisinage de D_ρ et que $\Gamma_j^\circ \cap \Gamma^\circ \cap S^{n-1} = \emptyset$ pour tout j. Il suffit de montrer que l'image d'un terme $F_j(x+i\Gamma_j 0)$ par sp est analytique réelle dans $\mathrm{Int}(D_\rho \times ((-\Gamma^\circ) \cap S^{n-1}))$. Appliquons le Lemme 6.2.2 à $F_j(z)$. On obtient une fonction $G(z)$ holomorphe dans un coin infinitésimal $R^n + i\Gamma_j' 0$ et au voisinage de $R^n \setminus D_\rho$, une fonction $H(z)$ holomorphe au voisinage de $\mathrm{Int}(D_\rho)$, telles que $F_j(z) = G(z) + H(z)$. Ici Γ_j' est un cône éventuellement un peu plus petit que Γ_j, pourtant toujours vérifiant $\Gamma_j'^\circ \cap \Gamma^\circ \cap S^{n-1} = \emptyset$.*) Soit $\chi_{2\rho}(x)$ la fonction caractéristique de $D_{2\rho}$. D'après les Lemmes 6.2.5 et 6.2.6, on a alors

$$\mathrm{sp}\, F_j(x+i\Gamma_j 0) = \mathrm{sp}(\chi_{2\rho}(x) G(x+i\Gamma_j' 0)) \qquad \text{sur } \mathrm{Int}(D_\rho) \times S^{n-1}.$$

D'autre part, d'après le Lemme 6.1.5 et la définition (6.15) on a

$$\mathrm{sp}(\chi_{2\rho}(x) G(x+i\Gamma_j' 0)) = \Big[\int_{D_{2\rho}} W(z-t-i\varepsilon(t), \zeta) G(t+i\varepsilon(t))\, d(t+i\varepsilon(t))\Big]_{\substack{z \mapsto x+i\omega 0 \\ \zeta \mapsto \omega}}$$

où $t \mapsto t+i\varepsilon(t)$ est un chemin d'intégrale à bord $\partial D_{2\rho}$ déformé dans le coin $D_{2\rho} + i\Gamma_j' 0$. Notons que $\Gamma_j \cap (-\Gamma) \neq \emptyset$. En effet, si $\Gamma_j \cap (-\Gamma) = \emptyset$ il existerait un vecteur unité η tel que $E_\eta \supset \Gamma_j$, $E_{-\eta} \supset -\Gamma$, car Γ_j et Γ sont des cônes convexes. Alors $-\eta$ serait dans $\Gamma_j^\circ \cap \Gamma^\circ \cap S^{n-1}$ qui était vide.

Prenons donc le chemin dans le coin $D_{2\rho} + i\Gamma_j' \cap (-\Gamma) 0$. On a alors $\mathrm{Im}(z-t-i\varepsilon(t)) = y - \varepsilon(t) \in y + \Gamma$. Donc d'après le Lemme 6.2.4 pour $(x,\xi) \in \mathrm{Int}(D_\rho \times (-\Gamma^\circ))$ y pourra atteindre 0 le long de Γ conservant l'analyticité de $W(z-t-i\varepsilon(t), \zeta)$. C.Q.F.D.

Maintenant nous explicitons le rôle de l'hyperfonction $W(x,\omega)$.

Théorème 6.2.8 On a

$$\delta(x) = \int_{S^{n-1}} W(x,\omega)\, d\omega = \sum_j \Big[\int_{S^{n-1} \cap (-\Gamma_j^\circ)} W(z,\omega)\, d\omega\Big]_{z \mapsto x+i\Gamma_j 0},$$

où Γ_j sont des cônes convexes ouverts tels que $\{S^{n-1} \cap \Gamma_j^\circ\}$ soit une décomposition de S^{n-1} disjointe à mesure 0 près. $d\omega$ est l'élément de volume standard de S^{n-1} (voir Exemple 3.3.3).

*) ~~En diminuant ρ si nécessaire,~~ Par cette diminution on peut supposer que $F_j(z)$ est holomorphe dans le coin $(D_\rho + i\Gamma_j') \cap U$, où U est un voisinage de D_ρ. ~~remarquable pour le cône Γ_j' au sens du Lemme 6.2.2~~.

Remarque L'intégrale au terme milieu est au sens de celle par rapport aux paramètres ω (Chapitre III, §2, 7°). Cependant, on peut considérer pour le moment que le dernier terme est la définition de cette intégrale.

Démonstration Notons d'abord que le résultat ne dépend pas de la décomposition de la sphère. Cela se voit facilement au moyen de la décomposition commune. ~~Notons, ensuite, que l'intégrale converge comme une fonction analytique en dehors de l'origine. En vertu du principe du prolongement analytique il suffit donc de vérifier la formule au voisinage de l'origine~~.

Rappelons $(-\Gamma_\sigma^\circ = \bar{\Gamma}_\sigma)$

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_\sigma \sigma_1\cdots\sigma_n\left[\frac{1}{z_1\cdots z_n}\right]_{z\mapsto x+i\Gamma_\sigma 0}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_\sigma\left[\int_{\bar{\Gamma}_\sigma} e^{iz\xi}d\xi\right]_{z\mapsto x+i\Gamma_\sigma 0}.\end{aligned}$$

Soit $z\in R^n+i\Gamma_\sigma 0$. Plus précisément, fixons $z=x+iy$ tel que

$$\operatorname{Im}\Phi(z,\omega)\geq y\omega-(y^2-(y\omega)^2)>0 \quad \text{pour tout} \quad \omega\in\bar{\Gamma}_\sigma\cap S^{n-1},$$

où $\Phi(z,\zeta)$ est le facteur dans le dénominateur de $W(z,\zeta)$. Remplaçons le chemin d'intégrale $\bar{\Gamma}_\sigma$ par

$$\bar{\Gamma}_\sigma^z=\{\xi+iz|\xi|-i\xi(z\xi)/|\xi|\ ;\ \xi\in\bar{\Gamma}_\sigma\}.$$

Notons que cette fonction n'est que $\Psi(z,\xi)_\Lambda$ donnée dans l'Exercice devans le Lemme 6.2.4. Notons aussi l'homogénéité $\Phi(z,\xi)=r\Phi(z,\omega)$, où $\xi=r\omega$, $r=|\xi|$. En se rappelant l'Exercice on obtient donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\bar{\Gamma}_\sigma^z} e^{iz\zeta}d\zeta &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\bar{\Gamma}_\sigma} e^{i\Phi(z,\xi)}\det\left(\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi_k}\right)d\xi\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{(+\bar{\Gamma}_\sigma)\cap S^{n-1}}\det\left(\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi_k}\right)\Big|_{\xi=\omega}d\omega\int_0^\infty e^{ir\Phi(z,\omega)}r^{n-1}dr\\ &= \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\int_{(+\bar{\Gamma}_\sigma)\cap S^{n-1}}\det\left(\frac{\partial\Psi_j}{\partial\xi_k}\right)\Big|_{\xi=\omega}\Big/\Phi(z,\omega)^n d\omega\\ &= \int_{(+\bar{\Gamma}_\sigma)\cap S^{n-1}}W(z,\omega)d\omega.\end{aligned}$$

Le résultat ainsi obtenu diffère de l'intégrale originale par une certaine intégrale sur le bord $\partial\bar{\Gamma}_\sigma$, car les deux chemins $\bar{\Gamma}_\sigma$ et $\bar{\Gamma}_\sigma^z$ ne bordent pas une (n+1)-chaîne.注) Cette différence s'écrit

注) La différence à l'infini disparaît grâce a la convergence absolue.

$$\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell}\sigma_\ell\int_0^1 dt\int_{(+\overline{\Gamma}_\sigma)\cap\{\xi_\ell=0\}} e^{i\langle z,\Psi(tz,\xi)\rangle} iz_\ell|\xi|\det\left(\frac{\partial\Psi_j(tz,\xi)}{\partial\xi_k}\right)_{j,k\neq\ell}\prod_{j\neq\ell}d\xi_j.$$

(Calculer le bord de la (n+1)-chaîne $\{\xi+t(iz|\xi|-i\xi(z\xi)/|\xi|);\xi\in-\overline{\Gamma}_\sigma,\ 0\le t\le 1\}$.) Notons que dans le ℓ-ième terme on a $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{\ell-1},0,\xi_{\ell+1},\ldots,\xi_n)$, $|\xi|=\sum_{j\neq\ell}\xi_j^2$, de sorte que le signe de $\operatorname{Im} z_\ell$ ne concerne pas la convergence de cette intégrale. Ainsi il devient holomorphe entier en z_ℓ. Il s'annule même avec le terme correspondant provenant du $(\sigma_1,\ldots,\sigma_{\ell-1},-\sigma_\ell,\sigma_{\ell+1},\ldots,\sigma_n)$-ième orthant à côté. Donc au total ils ne changent pas la classe de cohomologie, i.e. l'hyperfonction définie comme la somme des valeurs au bord. C.Q.F.D.

Corollaire 6.2.9 Soit $f(x)$ une hyperfonction à support compact. On a

$$(6.16)\qquad \int_{S^{n-1}}(W*f)(x+i\omega 0,\omega)d\omega = f(x).$$

En particulier, les homomorphismes de faisceaux dans le Lemme 6.2.6 et le Théorème 6.2.7 sont injectifs.

Démonstration On a par définition

$$\int_{S^{n-1}}(W*f)(x+i\omega 0,\omega)d\omega = \sum_\sigma\int_{(+\overline{\Gamma}_\sigma)\cap S^{n-1}}(W*f)(x+i\omega 0,\omega)d\omega$$
$$= \sum_\sigma\Big[\int_{(+\overline{\Gamma}_\sigma)\cap S^{n-1}}d\omega\int W(z-t,\omega)f(t)dt\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_\sigma 0}.$$

Pour $z\in R^n+i\Gamma_\sigma 0$, l'intégrale en ω est celle de fonction holomorphe. Donc d'après le Lemme 6.1.2 ceci est égal à

$$(6.17)\qquad \sum_\sigma\Big[\int\Big(\int_{(+\overline{\Gamma}_\sigma)\cap S^{n-1}}W(z-t,\omega)d\omega\Big)f(t)dt\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_\sigma 0}.$$

La démonstration dans le théorème précédent du fait que la famille de fonctions holomorphes $\Big\{\int_{(+\overline{\Gamma}_\sigma)\cap S^{n-1}}W(z,\omega)d\omega\Big\}_\sigma$ définit la même hyperfonction que $\Big\{\frac{\sigma_1\cdots\sigma_n}{(-2\pi i)^n}\frac{1}{z_1\ldots z_n}\Big\}_\sigma$ montre aussitôt que (6.17) définit la même hyperfonction que

$$\sum_\sigma\Big[\frac{\sigma_1\cdots\sigma_n}{(-2\pi i)^n}\int\frac{f(t)}{(z_1-t_1)\ldots(z_n-t_n)}dt\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_\sigma 0}.$$

Or ce n'est que l'expression de $f(x)$ par le représentant standard. D'où (6.16).

Soit maintenant $f(x)\in B(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné vérifiant la condition du Corollaire 5.4.3. Soit $\tilde{f}\in B[\overline{\Omega}]$

un prolongement de f. On a la formule (6.16) pour $\tilde{f}$. Donc en restreignant sur Ω, on obtient

(6.18) $\quad f(x) = \int_{S^{n-1}} (W*\tilde{f})(x+i\omega 0,\omega)d\omega\big|_{\Omega}.$

Puisque l'intégrale d'une fonction analytique est analytique par rapport aux variables qui restent, on voit immédiatement de là l'injectivité de $[sp]$: $(B/A)_{R^n} \longrightarrow \pi_*(B/A)_{R^n\times S^{n-1}}$. Notons en plus que pour un cône convexe ouvert Γ, le S.S. de l'intégrale $\int_{(-\Gamma^\circ)\cap S^{n-1}} (W*\tilde{f})(x+i\omega 0,\omega)d\omega$ est contenu dans $R^n\times \{\frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\,\infty\}$. Cela découle du fait que l'intégrale pour la fonction holomorphe $\int_{(-\Gamma^\circ)\cap S^{n-1}} (W*\tilde{f})(z,\omega)d\omega$ converge localement uniformément dans $R^n+i\Gamma 0$. D'où on obtient l'injectivité de $[[sp]]$: $C \rightarrow (B/A)^a_{R^n\times S^{n-1}}$. C.Q.F.D.

La formule du Théorème 6.2.8 est une belle amélioration de (3.14) dans Exemple 3.3.3. Elle nous donne la décomposition complète du spectre singulier de δ, simultanément en coordonnées et en directions. C'est pourquoi on peut le localiser pour obtenir la décomposition (6.18) libérée de l'influence de la frontière. Puisque la formule (6.18) contient tout renseignement de S.S.f, elle sera légitimement appelée la décomposition spectrale de $f(x)$.

En somme, on a une suite d'homomorphismes de faisceaux

$$B/A \longrightarrow \pi_* C \longrightarrow \pi_*(B/A)_{R^n\times S^{n-1}} \longrightarrow B/A$$

décomposition spectrale $\qquad$ intégration en ω

tels que leur composition est l'identité sur B/A. D'où on conclut que $B/A \to \pi_* C$ est injectif, i.e. le Théorème 3.1.8 ou équivalemment le cas $\Gamma = R^n$ du Théorème 3.1.7. Mais comme on ne connaît pas bien l'image de C dans $(B/A)^a_{R^n\times S^{n-1}}$, on n'est pas encore bien équippé à l'étude du faisceau C même. Terminons cependant dans le paragraphe suivant les démonstrations de quelques théorèmes fondamentaux qui sont déjà dans notre main.

3. Démonstration de quelques théorèmes fondamentaux.

Démonstration du Théorème 3.1.7 Prenons $f(x) \in B(\Omega)$ tel que $S.S.f(x) \subset$

(On exclut le cas $\Gamma = R^n$ qui est déjà démontré à la fin du paragraphe précédent.)
$\Omega \times \frac{1}{i}\Gamma^{\circ} dx\infty$, où Γ est un cône convexe ouvert. Nous allons chercher une fonction holomorphe $F(z)$ dans le coin infinitésimal $\Omega + i\Gamma 0$ telle que $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$. D'après le Lemme 3.1.3, on a l'unicité locale pour telle fonction $F(z)$. On peut donc supposer que Ω est borné et vérifie la condition du Corollaire 5.4.3. Soit $\tilde{f} \in B[\overline{\Omega}]$ un prolongement de f. Le Théorème 6.2.7 implique que $(W * \tilde{f})(x+i\omega 0, \omega)$ est analytique en (x, ω) en dehors de $(S.S.f)^a$, i.e. dans $\Omega \times (S^{n-1} \setminus \Gamma^{\circ})^a = \Omega \times (S^{n-1} \setminus (-\Gamma^{\circ}))$. D'autre part, d'après le Lemme 6.2.4 pour $\xi \in \mathrm{Int}(-\Gamma^{\circ})$ $(W * \tilde{f})(z, \zeta)$ est holomorphe en z, ζ dans un coin infinitésimal dont l'intersection avec $\zeta = \omega \in \mathrm{Int}(-\Gamma^{\circ}) \cap S^{n-1}$ contient un coin infinitésimal $R^n + i\Gamma 0$ indépendant de ω. Prenons donc $\Omega' \subset\subset \Omega$ et $\Gamma' \subset\subset \Gamma$. Alors $W(z, \omega)$ pour $(x, \omega) \in \Omega' \times (S^{n-1} \setminus (-\Gamma'^{\circ}))$ se prolonge au voisinage de $\overline{\Omega'} \times \overline{(S^{n-1} \setminus (-\Gamma'^{\circ}))}$, donc a fortiori à $(\Omega' + i\Gamma' 0) \times \overline{(S^{n-1} \setminus (-\Gamma'^{\circ}))}$. Ainsi l'intégrale

$$\int_{S^{n-1}} (W * \tilde{f})(z, \omega) d\omega = \int_{S^{n-1} \cap (-\Gamma'^{\circ})} (W * \tilde{f})(z, \omega) d\omega + \int_{\overline{S^{n-1} \setminus (-\Gamma'^{\circ})}} (W * \tilde{f})(z, \omega) d\omega$$

converge absolument et localement uniformément dans le coin $\Omega' + i\Gamma' 0$. Or d'après la définition et le Corollaire 6.2.9 la fonction holomorphe ainsi obtenue définit l'hyperfonction

$$\int_{S^{n-1} \cap (-\Gamma'^{\circ})} (W * \tilde{f})(x+i\omega 0, \omega) d\omega + \int_{\overline{S^{n-1} \setminus (-\Gamma'^{\circ})}} (W * \tilde{f})(x+i\omega 0, \omega) d\omega$$

$$= \int_{S^{n-1}} (W * \tilde{f})(x+i\omega 0, \omega) d\omega = \check{f}(x).$$

Cela signifie que $f(x)$ est la limite d'une fonction holomorphe dans un coin $\Omega' + i\Gamma' 0$. Puisque Ω' et Γ' sont séparément arbitraire, compte tenue encore de l'unicité cela démontre notre assertion. C.Q.F.D.

Démonstration du Corollaire 3.2.2 [*)] Considérons d'abord le cas où Ω est borné et vérifie la condition du Corollaire 5.4.3. Soit $\tilde{f} \in B[\overline{\Omega}]$ un prolongement de f. En vertu du Théorème 6.2.7, il suffit de poser

$$F_j(z) = \int_{S^{n-1} \cap (-\Gamma_j^{\circ})} (W * \tilde{f})(z, \omega) d\omega, \quad \text{pour } z \in \Omega + i\Gamma_j 0.$$

Pour Ω général, prenons une suite croissante d'ouverts $\Omega_k \nearrow \Omega$ telle que

*) Il s'agit de la décomposition de $f(x) \in B(\Omega)$ à la forme $\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ avec la condition $S.S.F_j(x+i\Gamma_j 0) \subset S.S.f \cap \Omega \times \frac{1}{i}\Gamma_j^{\circ} dx\infty$.

chaque Ω_k vérifie les conditions ci-dessus. Soit $\tilde{f}_k \in B[\overline{\Omega}_k]$ un prolongement de $f|_{\Omega_k} \in B(\Omega_k)$. Posons

$$F_{j,k}(z) = \int_{S^{n-1}\cap(-\Gamma_j^\circ)} (W*\tilde{f}_k)(z,\omega)d\omega.$$

D'après le Lemme 6.2.5 la différence $W*\tilde{f}_{k+1} - W*\tilde{f}_k$ devient analytique en (x,ω) sur $\Omega_k \times S^{n-1}$. Donc il en est de même de $F_{j,k+1} - F_{j,k}$. Ainsi la suite $F_{j,k}(x+i\Gamma_j 0)$, $k = 1,2,\ldots$ définit un élément bien déterminé de $B/A(\Omega)$.

Prenons un représentant $f_j \in B(\Omega)$ de cet élément selon le Théorème 6.2.3. Pour chaque k la différence $F_{j,k}(x+i\Gamma_j 0) - f_j(x)|_{\Omega_k}$ est analytique réelle. On a donc

$$S.S.f_j \subset \bigcup_k S.S.F_{j,k}(x+i\Gamma_j 0) \subset S.S.f \cap \Omega \times \tfrac{1}{i}\Gamma_j^\circ dx\infty.$$

Le Théorème 3.1.7 alors fournit une fonction holomorphe $G_j(z) \in \mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_j 0)$ telle que $f_j(x) = G_j(x+i\Gamma_j 0)$. Puisque la différence $f - \sum f_j$ est analytique réelle partout dans Ω, on peut finalement la supprimer en modifiant l'un des $G_j(z)$. Le fait que $G_j(z)$ se prolonge au point x tel que $S.S.f \cap \{x\}\times\frac{1}{i}\Gamma_j^\circ dx\infty = \emptyset$ découle du Théorème 3.1.8 et du Lemme 3.1.3. C.Q.F.D.

Examinons maintenant la relation entre deux définitions d'intégrale.

Proposition 6.3.1 L'intégrale (6.2) s'accorde avec celle par l'ancienne définition donnée dans le Chapitre III, §2, 5°. De plus, soit $f(x) \in B(\Omega)$ analytique réel au voisinage de la frontière ∂K d'un compact $K \subset \Omega$. On a alors

$$\int_{R^n} \chi_K(x)f(x)dx = \int_K f(x)dx,$$

où χ_K est la fonction caractéristique de K. En particulier, l'ancienne définition de l'intégrale définie ne dépend pas du choix de l'expression valeur au bord.

Démonstration Distinguons pour le moment les deux définitions d'intégrale, ancienne et nouvelle, par $\int^A$ et $\int^N$ respectivement. Généralisons d'abord le Lemme 6.1.5 pour un compact K quelconque. Supposons donc que $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$ dans Ω, et qu'il est analytique réel au voisinage de ∂K. Alors f mod A définit au voisinage de K une section de B/A à support contenu dans l'intérieur de K. Prolongeons-la sur R^n et prenons son représentant $g(x) \in B(R^n)$ selon Théorème 6.2.3. Alors $g(x)$ est analytique réel au voisinage de $R^n \setminus \mathrm{Int}\, K$, et $h(x) = f(x) - g(x)$ est analytique réel au voisinage de K. Puisque $S.S.g \subset S.S.f$, d'après le Théorème 3.1.7 $g(x)$ a une expression du type $G(x+i\Gamma 0)$ dans R^n. Choisissons une n-cube D_ρ contenant K. En vertu du ~~Lemme~~ Théorème 6.1.4 on a alors $\chi_K f = \chi_K g + \chi_K h$, $\chi_K g = \chi_{D_\rho} g - \chi_{D_\rho \setminus K} g$, d'où

$$(6.19)\quad \int^N \chi_K f(x)dx = \int^N \chi_K g(x)dx + \int^N \chi_K h(x)dx$$
$$= \int^N \chi_{D_\rho} g(x)dx - \int^N \chi_{D_\rho\setminus K} g(x)dx + \int^N \chi_K h(x)dx.$$

En vertu de l'Exercice après le Théorème 6.1.4, les deux derniers termes sont des intégrales au sens ordinaire. D'après le Lemme 6.1.5 on a

$$\int^N \chi_{D_\rho} g(x)dx = \int_{D_\rho} G(x+i\varepsilon(x))d(x+i\varepsilon(x))$$

avec un choix du chemin indiqué là. Choisissons-le en particulier de façon à ce que $\varepsilon(x) = 0$ pour x au voisinage de $D_\rho \setminus \mathrm{Int}\, K$. Alors l'intégrale sur $D_\rho \setminus K$ se tue avec le deuxième terme de (6.19) et on obtient

$$\int^N \chi_K f(x)dx = \int_K G(x+i\varepsilon(x))d(x+i\varepsilon(x)) + \int_K h(x)dx$$
$$= \int_K G(x+i\varepsilon(x))d(x+i\varepsilon(x)) + \int_K h(x+i\varepsilon(x))d(x+i\varepsilon(x))$$
$$= \int_K F(x+i\varepsilon(x))d(x+i\varepsilon(x)).$$

Ici, bien entendu on a utilisé la relation $F(z) = G(z) + h(z)$ sur $K+i\Gamma 0$ qui découle du Lemme 3.1.3.

Soit maintenant $f(x) \in B[K]$, et soit $D \supset K$ un voisinage borné et soit $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ une expression valeur au bord au voisinage de $\bar{D}$ telle que $F_j(z)$ soient holomorphes au voisinage de ∂D. Notons l'égalité $f(x) = \sum \chi_D(x)F_j(x+i\Gamma_j 0)$ qui se vérifie facilement de façon locale. On a alors

$$\int^N f(x)dx = \sum \int^N \chi_D(x)F_j(x+i\Gamma_j 0)dx$$
$$= \sum \int_D F_j(x+i\varepsilon_j(x))d(x+i\varepsilon_j(x)) = \int_D^A f(x)dx = \int^A f(x)dx.$$

Ceci montre en même temps que l'ancienne définition de l'intégrale ne dépend pas de l'expression utilisée.

Soit enfin $f(x) \in B(\Omega)$, analytique réel au voisinage de ∂K. Soit $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ une expression telle que $F_j(z)$ se prolongent au voisinage de ∂K. On a encore $\chi_K f = \sum \chi_K F_j(x+i\Gamma_j 0)$, d'où

$$\int_K^A f(x)dx = \sum \int_K F_j(x+i\Gamma_j(x))d(x+i\varepsilon_j(x)) = \sum \int^N \chi_K F_j(x+i\Gamma_j 0)dx$$
$$= \int^N \chi_K f(x)dx = \int^A \chi_K f(x)dx,$$

où dans la dernière étape on a utilisé l'énoncé déjà démontré pour $\chi_K f(x) \in B[K]$. C.Q.F.D.

Pour examiner le cas d'intégrale par rapport aux paramètres, préparons nous un lemme qui correspond au Lemme 6.1.5.

<u>Lemme 6.3.2</u> Soit $F(z,\tau)$ une fonction holomorphe dans un coin infinitésimal $\Omega \times T + i\Delta 0 \subset C^{n+m}$. Soit $D_\rho \subset T$ un m-cube et soit $\Gamma = p_x(\Delta)$ la projection de Δ sur R^n. Supposons que F se prolonge à un ensemble du type $(\Omega + i\Gamma 0) \times$ (voisinage réel de ∂D_ρ). On a alors

$$\int_{D_\rho}^A F((x,t)+i\Delta 0)dt = \int^N \chi_\rho(t)F((x,t)+i\Delta 0)dt$$
$$= \left[\int_{D_\rho} F(z,t+i\varepsilon(t))d(t+i\varepsilon(t))\right]_{z\mapsto x+i\Gamma 0}.$$

Ici χ_ρ est la fonction caractéristique de D_ρ. Le produit $\chi_\rho(t)F((x,t)+i\Delta 0)$ est celui défini dans le Chapitre III, §2, 4° (dont on peut déjà disposer!). Le chemin $t+i\varepsilon(t)$ est choisi de façon qu'il est dans le domaine où $F(z,\tau)$ est holomorphe, et que $\varepsilon(t) = 0$ pour $t \in \partial D_\rho$.

<u>Démonstration</u> Notons d'abord que d'après l'hypothèse, pour $z \in \Omega + i\Gamma 0$ fixé suffisamment près du tranchant, $F(z,\tau)$ devient holomorphe en τ au voisinage de ∂D_ρ. Ainsi on peut choisir un chemin comme ci-dessus. Posons $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t),\ldots,\varepsilon_n(t))$. Pour $z \in \Omega + i\Gamma 0$ fixé, posons

$$G(z,\tau) = \frac{1}{(2\pi i)^m}\int_{D_\rho} \frac{F(z,t+i\varepsilon(t))}{(t_1+i\varepsilon_1(t)-\tau_1)\ldots(t_m+i\varepsilon_m(t)-\tau_m)}\, d(t+i\varepsilon(t)). \tag{6.20}$$

Par la déformation du chemin on constate que $G(z,\tau)$ est holomorphe en (z,τ) dans un domaine du type produit $(\Omega + i\Gamma 0) \times (C^m \# D_\rho)$. Donc elle définit une hyperfonction $g(x,t) \in B(\Omega \times R^m)$ telle que $\operatorname{supp} g \subset \Omega \times D_\rho$. Montrons d'abord $g(x,t) = \chi_\rho(t)F((x,t)+i\Delta 0)$.

Notons que l'on peut modifier le chemin à un du type produit $\mathcal{E}(t) = (\mathcal{E}_1(t_1),\ldots,\mathcal{E}_m(t_m))$. Cela se fait juste comme dans la démonstration du Lemme 6.1.5. Ainsi de la même manière que là on peut démontrer que dans $\Omega \times \mathrm{Int}\, D_\rho$ $G(z,\tau)$ et $F(z,\tau)$ définissent la même hyperfonction. Pour les comparer au voisinage de $\Omega \times \partial D_\rho$, prenons un~~e~~ autre cube $D_\rho' \subset D_\rho$ ~~et $\Omega' \subset\subset \Omega$~~ tel~~s~~ que $F(z,\tau)$ soit holomorphe au voisinage de $(\Omega + i\Gamma 0)\times(\overline{D_\rho \setminus D_\rho'})$. En partageant $\overline{D_\rho \setminus D_\rho'}$ en un nombre fini de n-cubes, on peut donc déduire le problème à ceci: Soit $F(z,\tau)$ holomorphe dans un coin infinitésimal $\Omega \times T + i\Delta 0$ contenant $(\Omega + i\Gamma 0)\times D_\rho$, où $\Gamma = \Delta \cap \{\mathrm{Im}\,\tau \neq 0\} \neq \emptyset$. On a alors

(6.21) $$\chi_\rho(t)F((x,t)+i\Delta 0) = \left[\sum_\sigma \frac{\sigma_1\cdots\sigma_m}{(2\pi i)^m}\int_{D_\rho}\frac{F(z,t)}{(t_1-\tau_1)\ldots(t_m-\tau_m)}\,dt\right]_{\substack{z\mapsto x+i\Gamma 0\\ \tau\mapsto t+i\Gamma_\sigma 0}}.$$

Or on a par la définition du produit

(6.22) $$\chi_\rho(t)F((x,t)+i\Delta 0) = \left[\sum_\sigma \frac{\sigma_1\cdots\sigma_m}{(2\pi i)^m}\log\frac{\tau_1-\rho}{\tau_1+\rho}\cdots\log\frac{\tau_m-\rho}{\tau_m+\rho}\,F(z,\tau)\right]_{\substack{(z,\tau)\mapsto\\ (x,t)+i(\Delta\cap \mathbb{R}^n\times\Gamma_\sigma)0}}.$$

où le premier facteur est le représentant standard de $\chi_\rho(t)$ calculé d'après (6.5). La différence du contenu de (6.21) et de (6.22) s'écrit

$$\frac{\sigma_1\cdots\sigma_m}{(2\pi i)^m}\int_{D_\rho}\frac{F(z,t)-F(z,\tau)}{(t_1-\tau_1)\ldots(t_m-\tau_m)}\,dt$$

où

$$\begin{aligned} F(z,t) - F(z,\tau) &= F(z,t_1,\ldots,t_m) - F(z,\tau_1,t_2,\ldots,t_m)\\ &\quad + F(z,\tau_1,t_2,\ldots,t_m) - F(z,\tau_1,\tau_2,t_3,\ldots,t_m)\\ &\quad + \ldots\\ &\quad + F(z,\tau_1,\ldots,\tau_{m-1},t_m) - F(z,\tau_1,\ldots,\tau_m). \end{aligned}$$

Ainsi le premier terme, par exemple, après l'intégrale en t devient holomorphe dans $(\Omega + i\Gamma 0)\times \mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus]-\rho,\rho[)\times\ldots\times(\mathbb{C}\setminus]-\rho,\rho[)$ etc. Après la sommation en σ, elle s'annule donc comme hyperfonction (i.e. elle devient un cobord pour un recouvrement convenable).

(6.20) établi, par la nouvelle définition de l'intégrale par rapport aux paramètres on a donc

$$\int^N \chi_\rho(t)F((x,t)+i\Delta 0)\,dt = \left[(-1)^m \oint_{\gamma_1}\cdots\oint_{\gamma_m} G(z,\tau)\,d\tau\right]_{z\mapsto x+i\Gamma 0}$$

$$= \left[\int_{D_\rho} F(z,t+i\varepsilon(t))d(t+i\varepsilon(t)) \right]_{z\mapsto x+i\Gamma 0}$$
$$= \int_{D_\rho}^{A} F((x,t)+i\Delta 0)dt. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Lemme 6.3.3</u> Le lemme précédent a lieu avec D_ρ remplacé par un compact K quelconque.

<u>Démonstration</u> Par la même raison que le lemme précédent, l'intégrale

$$\int_K F(z,t+i\varepsilon(t))d(t+i\varepsilon(t))$$

définit un élément de $\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma 0)$. Donc il suffit de montrer l'égalité en tant que l'hyperfonction de x pour tout $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ et tout $\Omega' \subset\subset \Omega$. Nous allons donc faire ci-dessous un tel rétrécissement chaque fois au besoin.

Par hypothèse il existe un compact $L \subset \mathrm{Int}\, K$, un ouvert $D \supset K$, et un cône ouvert convexe $\Gamma_\varepsilon \subset R^{n+m}$ contenant $\Gamma\times\{0\}$ tels que $F(z,\tau)$ se prolonge dans $\Omega\times(D\setminus L) + i\widehat{\Gamma_\varepsilon \cup \Delta}0$. Essayons d'abord de décomposer $F(z,\tau)$ à une somme avec des termes favorables. Quitte à rétrécir $\Omega\times T$ on peut prendre un prolongement $\tilde{f}(x,t) \in B(\Omega\times R^m)$ de $F((x,t)+i\Delta 0)$. On a

$$\mathrm{S.S.}\tilde{f} \subset \Omega\times\overline{(D\setminus L)}\times\frac{1}{i}\Gamma_\varepsilon^\circ\cap\Delta^\circ(dx,dt)\infty \cup \Omega\times\overline{T\setminus(D\setminus L)}\times\frac{1}{i}\Delta^\circ(dx,dt)\infty$$
$$\cup\ \Omega\times(R^m\setminus T)\times\frac{1}{i}S^{*n+m-1}_\infty .$$

Décomposons donc $\Delta^\circ = (\Gamma_\varepsilon'^\circ \cap \Delta^\circ)\cup(\overline{\Delta^\circ \setminus \Gamma_\varepsilon^\circ})$, où $\Gamma'_\varepsilon \subset\subset \Gamma_\varepsilon$. D'après le Corollaire 3.2.2 il existe une fonction $G(z,\tau)$ holomorphe dans $\Omega\times R^m+i\widehat{\Gamma_\varepsilon'\cup\Delta}\,0$, une fonction $H(z,\tau)$ holomorphe dans $\Omega\times R^m+i\Delta 0$ qui se prolonge à $\Omega\times(D\setminus L)$, telles que la différence $f(x,t) - G((x,t)+i\widehat{\Gamma_\varepsilon'\cup\Delta}0) - H((x,t)+i\Delta 0)$ soit analytique réelle dans $\Omega\times T$. D'autre part, en vertu du Théorème 6.2.3 appliqué comme dans la démonstration de la Proposition 6.3.1, on peut trouver une fonction $H'(z,\tau)$ holomorphe dans $\Omega\times R^m + i\Delta 0$ qui se prolonge à $\Omega\times(R^m\setminus L)$ telle que la différence $H((x,t)+i\Delta 0) - H'((x,t)+i\Delta 0)$ soit analytique réelle dans $\Omega\times D$. Ecrivons Γ_ε au lieu de Γ'_ε. (Cela correspond au rétrécissement de Γ.) Ainsi on a obtenu la décomposition voulue

$$F((x,t)+i\Delta 0) = G((x,t)+i\widehat{\Gamma_\varepsilon\cup\Delta}0)+H'((x,t)+i\Delta 0)+ k(x,t) \quad \text{dans } \Omega\times D,$$

où $k(x,t) \in A(\Omega\times D)$.

Soit donc $D_\rho \supset K$ un m-cube. On a alors

$$\int^N \chi_K(t)F((x,t)+i\Delta 0)dt$$
$$= \int^N \chi_K(t)G((x,t)+i\widehat{\Gamma_\varepsilon \cup \Delta}0)dt + \int^N \chi_K(t)H'((x,t)+i\Delta 0)dt + \int^N \chi_K(t)k(x,t)dt$$
$$= \int^N \chi_\rho(t)G((x,t)+i\widehat{\Gamma_\varepsilon \cup \Delta}0)dt + \int^N \chi_\rho(t)H'((x,t)+i\Delta 0)dt$$
$$+\int^N \chi_{D_\rho \setminus K}(t)G((x,t)+i\widehat{\Gamma_\varepsilon \cup \Delta}0)dt + \int^N \chi_{D_\rho \setminus K}(t)H'((x,t)+i\Delta 0)dt + \int^N \chi_K(t)k(x,t)dt$$

Pour la première ligne du dernier membre, on peut remplacer $\int^N \chi_\rho(t)$ par $\int^A_{D_\rho}$ d'après le lemme précédent. Pour faire la même chose pour la deuxième ligne, il suffit donc de vérifier l'assertion suivante: Soit $F(z,\tau)$ holomorphe dans un coin infinitésimal $\Omega \times T + i\Delta 0$ contenant $(\Omega + i\Gamma 0)\times D_\rho$, où $\Gamma = \Delta \cap \{\mathrm{Im}\,\tau \neq 0\} \neq \emptyset$. On a alors pour $K \subset D_\rho$ compact

$$\int^N \chi_K(t)F((x,t)+i\Delta 0)dt = \int^A_K F((x,t)+i\Delta 0)dt = \Big[\int_K F(z,t)dt\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma 0}.$$

Soit $\Phi(\tau)$ le représentant standard de $\chi_K(t)$ calculé par (6.5). Pour $z \in \Omega + i\Gamma 0$ fixé, choisissons les chemins γ_j contenant $[-\rho,\rho]$ dans le j-ième exemplaire de C de façon que $F(z,\tau)$ soit holomorphe en τ dans le polycylindre bordé par $\gamma_1 \times \dots \times \gamma_m$. On a alors, en changeant l'ordre d'intégrale d'après le Lemme 6.1.2,

$$\int^N \chi_K(t)F((x,t)+i\Delta 0)dt = \Big[(-1)^m \oint_{\gamma_1}\dots\oint_{\gamma_n} \Phi(\tau)F(z,\tau)d\tau\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma 0}$$
$$= \Big[\int_K F(z,t)dt\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma 0}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Proposition 6.3.4</u> Soit $f(x,t) \in B(\Omega \times T)$ tel que $\mathrm{supp}\, f \subset \Omega \times K$, où $K \subset T$ est un compact. Alors les deux définitions de l'intégrale par rapport aux paramètres $\int f(x,t)dt$ s'accordent. De plus soit $f(x,t) \in B(\Omega \times T)$ tel qu'il contienne t comme paramètres analytiques réels au voisinage de $\Omega \times \partial K$. On a alors

$$\int_K f(x,t)dt = \int \chi_K(t)f(x,t)dt.$$

En particulier, l'ancienne définition d'intégrale ne dépend pas de l'expression valeurs au bord utilisée pour le calcul.

<u>Démonstration</u> est la même que la Proposition 6.3.1 grâce au Lemme 6.3.3.

Ainsi en même temps toutes les règles de calculs introduites dans le Chapitre III ont été justifiées.

4. Flascité du faisceau de microfonctions

Nous avons déjà vu qu'il existe un homomorphisme $C \hookrightarrow (B/A)^{a}_{R^n \times S^{n-1}}$ induit par la décomposition spectrale qui nous admettait beaucoup de calculs concernant le S.S. Mais notons que cet homomorphisme n'est jamais surjectif puisque l'image est micro-analytique en ω. Donc on ne peut pas dire de cela que C soit flasque même si B/A l'est. Introduisons donc un autre truc. Posons

$$K_{\lambda,\alpha}(z,\omega) = \frac{1}{(z\omega + i\alpha(z^2-(z\omega)^2))^{\lambda}},$$

où $\alpha > 0$ et $\lambda \in C$. Cette fonction est holomorphe dans un coin infinitésimal pareil à celui pour $W(z,\omega)$.

<u>Lemme 6.4.1</u> Pour $\mathrm{Re}(\lambda + \mu) > n$, on a

$$(6.23)\quad \int_{R^n+i\omega 0} K_{\lambda,\alpha}(z-\zeta,\omega)K_{\mu,\beta}(\zeta,\omega)d\zeta$$
$$= 2\pi^{(n+1)/2}\, i^{-(n+1)/2}\,\frac{\Gamma(\lambda+\mu-(n+1)/2)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}(\alpha+\beta)^{-(n-1)/2} K_{\lambda+\mu-\frac{n+1}{2},\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}(z,\omega),$$

où $R^n+i\omega 0$ désigne un chemin déformé de R^n dans le coin infinitésimal $R^n+i\{y\omega > 0\}0$.

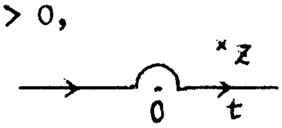
<u>Démonstration</u> Notons d'abord que l'intégrale ne dépend pas du choix de chemin grâce à la convergence absolue à l'infini. Ensuite, par la rotation des axes on peut supposer que $\omega = (1,0,\dots,0)$. (6.23) alors s'écrit

$$(6.24)\quad \int_{(R+i0)\times R^{n-1}} \frac{1}{(z_1-\zeta_1+i\alpha(z'-\xi')^2)^{\lambda}}\,\frac{1}{(\zeta_1+i\beta\xi'^2)^{\mu}}\,d\zeta_1 d\xi',$$

où on a choisi le chemin de façon que $\zeta' = \xi' \in R^{n-1}$ et que ζ_1 parcoure un chemin du type $\zeta_1 = \xi_1 + i\varepsilon(\xi_1)$.

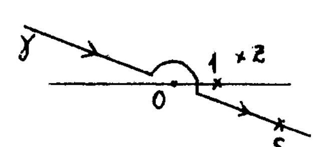
Considérons d'abord le cas $n = 1$. Calculons pour $\mathrm{Im}\, z > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-t-i0)^{\lambda}}\,\frac{1}{(t+i0)^{\mu}}dt$$



Supposons d'abord que $\mathrm{Im}\, z > 0$, $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\mathrm{Re}\,\lambda > 1$, $0 < \mathrm{Re}\,\mu < 1$. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-t-i0)^{\lambda}}\,\frac{1}{(t+i0)^{\mu}}dt$$
$$= \frac{1}{z^{\lambda+\mu-1}}\int_{\gamma} \frac{1}{(1-s)^{\lambda}}\,\frac{1}{s^{\mu}}ds$$



où on a transformé l'intégrale par $t = zs$ (voir la figure ci-dessus). En déformant le chemin γ encore de façon à ce qu'il contourne le demi-axe négatif, on obtient

$$\int_{\gamma}\frac{1}{(1-s)^{\lambda}}\,\frac{1}{s^{\mu}}\,ds$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{-\mu\pi i}}{(1-s)^{\lambda}\,|s|^{\mu}}\,ds+\int_{-\varepsilon}^{-\infty}\frac{e^{\mu\pi i}}{(1-s)^{\lambda}\,|s|^{\mu}}\,ds-\varepsilon^{1-\mu}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-\mu i\theta}}{(1-\varepsilon e^{i\theta})^{\lambda}}\,d\theta\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{e^{-\mu\pi i}-e^{\mu\pi i}}{(1-s)^{\lambda}\,|s|^{\mu}}\,ds=-2i\sin\mu\pi\int_{0}^{\infty}\frac{dr}{(r+1)^{\lambda}\,r^{\mu}}$$

$$=-2i\sin\mu\pi\int_{0}^{1}(1-\rho)^{\lambda+\mu-2}\rho^{-\mu}d\rho\qquad\left(\rho=\frac{r}{r+1}\right)$$

$$=-2i\sin\mu\pi\,\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\lambda)}=-2\pi i\,\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)},$$

où l'on a utilisé les formules $\int_0^1(1-\rho)^{p-1}\rho^{q-1}d\rho=B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ et $\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu)=\pi/\sin\mu\pi$. Ainsi on obtient

$$(6.25)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-t-i0)^{\lambda}}\,\frac{1}{(t+i0)^{\mu}}\,dt=-\frac{2\pi i}{z^{\lambda+\mu-1}}\,\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}.$$

Notons que les deux membres de (6.25) sont holomorphes en z, λ, μ pour $\operatorname{Im} z>0$, $\operatorname{Re}(\lambda+\mu)>1$. Par le principe du prolongement analytique (6.25) donc y reste valable.

De (6.25) par la déformation du chemin $t+i0\mapsto t+i\varepsilon+i0$ on obtient immédiatement

$$(6.26)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-t-i0)^{\lambda}}\,\frac{1}{(t+i\varepsilon+i0)^{\mu}}\,dt=-\frac{2\pi i}{(z+i\varepsilon)^{\lambda+\mu-1}}\,\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)},\qquad\text{pour } \varepsilon\ge 0.$$

Appliquons-le à l'intégrale en ζ_1 dans (6.24). On a

$$-2\pi i\,\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_{R^{n-1}}\frac{d\xi'}{(z_1+i\alpha(z'-\xi')^2+i\beta\xi'^2)^{\lambda+\mu-1}}$$

$$=-2\pi i\,\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_{R^{n-1}}\frac{d\xi'}{(z_1+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z'^2+i(\alpha+\beta)(\xi'-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}z')^2)^{\lambda+\mu-1}}$$

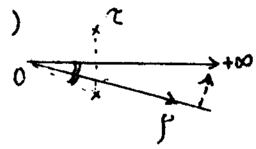
$$=-2\pi i\,\frac{\Gamma(\lambda+\mu-1)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}\int_{R^{n-1}}\frac{d\xi'}{(z_1+i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z'^2+i(\alpha+\beta)\xi'^2)^{\lambda+\mu-1}},$$

où l'on a translaté le chemin dans le domaine complexe pourvu que z soit dans le coin infinitésimal du type $R^n+i\{y_1>0\}0$ correspondant au domaine d'holomorphie de $K_{\lambda+\mu-\frac{n+1}{2},\,\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}(z;1,0,\dots,0)$. Notons que l'intégrale toujours converge absolument au sens ordinaire. Posons donc $\xi'=r\omega'$. On a en général pour $\operatorname{Re}\tau>0$,

$$\int_{R^{n-1}}\frac{d\xi'}{(\tau+\xi'^2)^{\lambda+\mu-1}}$$

$$=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)}\int_0^{\infty}\frac{r^{n-2}dr}{(\tau+r^2)^{\lambda+\mu-1}}\qquad(\text{l'aire de } S^{n-2})$$

$$= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \frac{1}{\tau^{\lambda+\mu-(n+1)/2}} \int_0^{\infty} \frac{\rho^{(n-3)/2}}{(1+\rho)^{\lambda+\mu-1}}\, d\rho \qquad (\rho = r^2/\tau)$$



$$= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \frac{1}{\tau^{\lambda+\mu-(n+1)/2}} \frac{\Gamma(\lambda+\mu-(n+1)/2)\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(\lambda+\mu-1)},$$

où on a executé la déformation du chemin $[0,\tau^{-1/2}\infty] \longmapsto [0,+\infty]$ et après utilisé le calcul précédent. Ainsi (6.24) est égal à

$$-2\pi^{(n+1)/2} i \frac{\Gamma(\lambda+\mu-(n+1)/2)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} (i(\alpha+\beta))^{-\lambda-\mu+1} \left(\frac{z_1+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}z'^2}{i(\alpha+\beta)}\right)^{-\lambda-\mu+(n+1)/2}$$

$$= 2\pi^{(n+1)/2} i^{-(n+1)/2} \frac{\Gamma(\lambda+\mu-(n+1)/2)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} (\alpha+\beta)^{-(n-1)/2} \left(z_1+i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} z'^2\right)^{-\lambda-\mu+(n+1)/2},$$

i.e. le second membre de (6.23) pour $\omega = (1,0,\ldots,0)$. C.Q.F.D.

Désignons par $K_{\lambda,\alpha}(x,\omega)$ l'hyperfonction sur $R^n \times S^{n-1}$ définie par $K_{\lambda,\alpha}(z,\omega)$ comme $W(x,\omega)$ dans (6.14). Il jouit donc de mêmes propriétés que $W(x,\omega)$ données dans le Lemme 6.2.4.[注)] Nous avons besoin de la formule (6.23) pour les exposants λ, μ un peu plus petits. Précisons-le:

<u>Corollaire 6.4.2</u> Soit D un voisinage borné de l'origine de R^n. Pour $\mathrm{Re}(\lambda+\mu) > \frac{n+1}{2}$, on a, en tant que l'hyperfonction de x, ω, α, β,

(6.27) $$\int_D K_{\lambda,\alpha}(x-\xi,\omega)K_{\mu,\beta}(\xi,\omega)\,d\xi \Big|_{D\times S^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\}}$$
$$\equiv 2\pi^{(n+1)/2} i^{-(n+1)/2} \frac{\Gamma(\lambda+\mu-(n+1)/2)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} (\alpha+\beta)^{-(n-1)/2} K_{\lambda+\mu-\frac{n+1}{2},\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}(x,\omega)$$
$$\mathrm{mod}\ A(D\times S^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\})$$

<u>Démonstration</u> Il suffit de comparer les germes de deux membres aux points de $\{0\}\times S^{n-1}$. Remarquons que le résultat de l'intégrale au sens du germe modulo A ne dépend pas de D. De plus il est évident que pour $\mathrm{Re}(\lambda+\mu) > n$ on peut même prendre $D = R^n$. Ainsi dans ce cas (6.27) découle du lemme précédent.

Soit donc $\frac{n+1}{2} < \mathrm{Re}(\lambda+\mu) \leq n$. Puisque $\frac{n+1}{2} \geq 1$, on peut prendre dans ce cas sans modifier le résultat mod A le domaine d'intégrale du type $R\times D'$, où D' est un voisinage borné quelconque de $0 \in R^{n-1}$. Le calcul de l'intégrale en ζ_1 dans la démonstration du lemme est alors valable. Pour continuer le calcul fait là-bas, il reste donc à vérifier que la différence

$$\int_{D'} \frac{d\xi'}{(\tau+\xi'^2)^{\lambda+\mu-1}} - \pi^{(n-1)/2} \frac{1}{\tau^{\lambda+\mu-(n+1)/2}} \frac{\Gamma(\lambda+\mu-(n+1)/2)}{\Gamma(\lambda+\mu-1)}$$

注) En plus $K_{\lambda,\alpha}(x,\omega)$ peut être considéré comme une hyperfonction de x, ω, α contenant $\alpha > 0$ aussi comme un paramètre analytique réel. (Voir le raisonnement pour ω dans le Lemme 6.2.4.)

donne un germe de fonction holomorphe en $\tau = 0$. Prenons donc $D' = \{|\xi'| < 1\}$ et considérons la fonction holomorphe de deux variables τ, ν comme suit:

$$I(\tau,\nu) = \int_{|\xi'| \geq 1} \frac{d\xi'}{(\tau + \xi'^2)^{\nu-1}} \qquad \text{pour } |\tau| < 1, \quad \mathrm{Re}\,\nu > n.$$

On a pour $\mathrm{Re}\,\tau > 0$

$$I(\tau,\nu) = \pi^{(n-1)/2} \frac{1}{\tau^{\nu-(n+1)/2}} \frac{\Gamma(\nu-(n+1)/2)}{\Gamma(\nu-1)} - \int_{|\xi'| \leq 1} \frac{d\xi'}{(\tau + \xi'^2)^{\nu-1}}.$$

Cela signifie que $I(\tau,\nu)$ se prolonge à $\{0<|\tau|<1\} \times \{\mathrm{Re}\,\nu > \frac{n+1}{2}\}$ mais de façon multiforme en τ. Considérons donc $J(\tau,\nu) = I(e^{\tau},\nu)$. C'est une fonction holomorphe et uniforme dans $\{\mathrm{Re}\,\tau < 0\} \times \{\mathrm{Re}\,\nu > \frac{n+1}{2}\}$. Puisque $I(\tau,\nu)$ est uniforme dans $\mathrm{Re}\,\nu > n$, $J(\tau,\nu)$ y satisfait à l'équation fonctionnelle

$$J(\tau+2\pi i,\nu) = J(\tau,\nu).$$

Donc par le principe du prolongement analytique $J(\tau,\nu)$ y satisfait partout. Cela signifie que $I(\tau,\nu)$ est en effet uniforme dans $\{0 < |\tau| < 1\} \times \{\mathrm{Re}\,\nu > \frac{n+1}{2}\}$. En vertu du théorème de Hartogs (voir Théorème 2.2.1), la singularité $\tau = 0$, $\frac{n+1}{2} < \mathrm{Re}\,\nu \leq n$ est otable et $I(\tau,\nu)$ devient holomorphe dans $|\tau| < 1$, $\mathrm{Re}\,\nu > \frac{n+1}{2}$. Comme on a remarqué ci-dessus, ceci termine la démonstration.

<u>Lemme 6.4.3</u> Soit $f(x) \in B(R^n)$ une hyperfonction à support compact. Posons

(6.28) $\Phi_{\lambda,\alpha}: f(x) \mapsto f(x,\omega) = f(x) \underset{x}{*} K_{\lambda,\alpha}(x,\omega) \in B(R^n \times S^{n-1})$.

Cette application induit un homomorphisme de faisceau $C \longrightarrow (B/A)^a_{R^n \times S^{n-1}}$.

La démonstration est la même que Théorème 6.2.7.

Posons ensuite

$$L_{\lambda,\alpha,k}(x,\omega) = (x^2-(x\omega)^2)^k K_{\lambda,\alpha}(x,\omega).$$

<u>Lemme 6.4.4</u> Soit $f(x,\omega) \in B(R^n \times S^{n-1})$ une hyperfonction à support compact. Posons

(6.29) $\Psi_{\lambda,\alpha,k}: f(x,\omega) \longmapsto f(x) = \int_{S^{n-1}} f(x,\omega) \underset{x}{*} L_{\lambda,\alpha,k}(x,\omega) d\omega$.

Cette application induit un homomorphisme de faisceau $(B/A)^a_{R^n \times S^{n-1}} \longrightarrow C$.

<u>Démonstration</u> Supposons d'abord que $\mathrm{supp}\, f(x,\omega) \subset K \times (-\Gamma^\circ)$. Alors $f(x,\omega) \underset{x}{*} L_{\lambda,\alpha,k}(x,\omega)$ est à support dans $R^n \times (-\Gamma^\circ)$ et même analytique réel

en dehors de $K\times(-\Gamma^\circ)$. On a donc comme dans la démonstration du Corollaire 6.2.9,

$$S.S.f(x) \subset K \times \Gamma^\circ.$$

Ainsi par l'argument standard utilisant la décomposition localement finie, on peut généraliser la correspondence (6.29) à un homomorphisme de faisceau $B^a_{R^n\times S^{n-1}} \longrightarrow C$. Pour passer au quotient $(B/A)^a_{R^n\times S^{n-1}}$, il suffit de vérifier ceci: Soit $f(x,\omega)$ analytique réel au voisinage de $K\times(-\Gamma^\circ)$. Alors

$$\int_{(-\Gamma^\circ)\cap S^{n-1}} d\omega \int_K f(t,\omega) L_{\lambda,\alpha,k}(x-t,\omega)\,dt$$

devient micro-analytique dans $\mathrm{Int}\left(K\times\frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\infty\right)$. Ceci découle du même calcul que le Corollaire 6.2.9, car l'intégrale en t devient analytique dans $\mathrm{Int}(K\times(-\Gamma^\circ))$ comme on le voit facilement par déformation du chemin. (Bien entendu, pour établir ceci on peut calculer le S.S. si on le préfère comme dans la démonstration du Théorème 3.4.2 en utilisant les règles déjà justifiées.) C.Q.F.D.

<u>Lemme 6.4.5</u> Il existe des constantes $c_{\mu,k}$, $\mu = 1,\ldots,n$, $k = 0,\ldots,\mu-1$ telles que l'homomorphisme composé

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{k=0}^{\mu-1} c_{\mu,k}\Psi_{\mu,2,k}\right)\circ\Phi_{\frac{n+1}{2},2} : \quad C \longrightarrow C$$

devient l'identité.

<u>Démonstration</u> Remarquons d'abord que la phase $W(x,\omega)$ de la décomposition courbilinéaire de δ se réécrit

$$W(x,\omega) = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{k=0}^{\mu-1} b_{\mu,k}L_{\mu,1,k}(x,\omega).$$

(Voir (6.14).) En effet il suffit de développer le numérateur en remarquant que $x\omega = \{x\omega+i(x^2-(x\omega)^2)\} - i(x^2-(x\omega)^2)$. Notons ensuite que les valeurs $\lambda = \frac{n+1}{2}$, $\mu > 0$ satisfont à l'hypothèse du Corollaire 6.4.2. Notons aussi la formule évidente

$$(6.30) \qquad L_{\mu,\beta,k}(x,\omega) = i^k \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-k)}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^k K_{\mu-k,\beta}(x,\omega), \qquad \text{pour } k < \mu.$$

Ainsi (6.27) se réécrit

$$\int_{\bar D} K_{\lambda,\alpha}(x-t,\omega)L_{\mu,\beta,k}(t,\omega)\,dt\Big|_{D\times S^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\}}$$
$$= i^k \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-k)}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^k \int_{\bar D} K_{\lambda,\alpha}(x-t,\omega)K_{\mu-k,\beta}(t,\omega)\,dt\Big|_{D\times S^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\}}$$

$$\equiv i^k \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-k)} 2\pi^{\frac{n+1}{2}} i^{-\frac{n+1}{2}} \frac{\Gamma(\lambda+\mu-k-\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu-k)} \left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^k \left\{(\alpha+\beta)^{-\frac{n-1}{2}} K_{\lambda+\mu-k-\frac{n+1}{2},\, \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}}(x,\omega)\right\}$$
$$\bmod A(D\times S^{n-1}\times\{\alpha>0\}\times\{\beta>0\})$$

Si on execute la dérivation, utilise encore (6.30) et puis pose $\alpha = \beta = 2$ (d'où $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = 1$), ce résultat s'écrit à la forme d'une combinaison linéaire de $L_{\mu-k+j,1,j}(x,\omega)$, $j = 0,\ldots,k$. Donc en résolvant une équation linéaire simultanée du type triangle, on peut trouver des constantes $c_{\mu,k}$ telles que $L(x,\omega) = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{k=0}^{\mu-1} c_{\mu,k} L_{\mu,2,k}(x,\omega)$ satisfait à

$$\int_{\bar{D}} K_{\frac{n+1}{2},2}(x-t,\omega)L(t,\omega)dt \equiv W(x,\omega) \quad \bmod A(D\times S^{n-1}).$$

Soit donc $f(x)$ une hyperfonction à support compact. Posons $\Phi = \Phi_{\frac{n+1}{2},2}$, $\Psi = \sum c_{\mu,k}\Psi_{\mu,2,k}$. On a alors, en identifiant $f(x) \bmod A$ avec la section globale de C lui correspondant,

$$\begin{aligned}
\Psi\circ\Phi(f(x) \bmod A)\Big|_{\{0\}\times S^{n-1}} &= \Psi\left(\int_{R^n} f(t)K_{\frac{n+1}{2},2}(x-t,\omega)dt \bmod A\right)\Big|_{\{0\}\times S^{n-1}} \\
&= \int_{S^{n-1}} d\omega \int_{\bar{D}} L(s,\omega)ds \int_{R^n} f(t)K_{\frac{n+1}{2},2}(x-s-t,\omega)dt \bmod A\Big|_{\{0\}\times S^{n-1}} \\
&= \int_{S^{n-1}} d\omega \int_{R^n} f(t)dt \int_{\bar{D}} K_{\frac{n+1}{2},2}(x-t-s,\omega)L(s,\omega)ds \bmod A\Big|_{\{0\}\times S^{n-1}} \\
&= \int_{R^n} f(t)dt \int_{S^{n-1}} W(x-t,\omega)d\omega \bmod A\Big|_{\{0\}\times S^{n-1}} \\
&= \int_{R^n} f(t)\delta(x-t)dt \bmod A\Big|_{\{0\}\times S^{n-1}} = f(x) \bmod A\Big|_{\{0\}\times S^{n-1}},
\end{aligned}$$

d'où $\Psi\circ\Phi : C \longrightarrow C$ est l'identité. C.Q.F.D.

<u>Fin de la Démonstration du Théorème 3.5.2</u> La flascité de C découle immédiatement de celle de $(B/A)_{R^n\times S^{n-1}}$ et du Lemme 6.4.5. Démontrons la dernière assertion (3.26):

$$C(\Omega\times\tfrac{1}{i}\Delta dx\infty) = B(\Omega)/A^*(\Omega\times\tfrac{1}{i}\Delta dx\infty).$$

Considérons d'abord le cas $\Delta = S^{n-1}$. On a manifestement $A^*(\Omega\times\frac{1}{i}S_\infty^{*n-1}) = A(\Omega)$. D'autre part, Φ resp. Ψ induit de façon évidente l'homomorphisme de faisceaux $B/A \longrightarrow \pi_*(B/A)_{R^n\times S^{n-1}}$ resp. $\pi_*(B/A)_{R^n\times S^{n-1}} \longrightarrow B/A$ de sorte que l'on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B/A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_*(B/A)_{R^n\times S^{n-1}} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B/A \arrow[d] \\
\pi_*C \arrow[r, "\bar{\Phi}"'] & \pi_*(B/A)_{R^n\times S^{n-1}} \arrow[r, "\bar{\Psi}"'] & \pi_*C .
\end{tikzcd}$$

Ainsi $B/A(\Omega) \longrightarrow \pi_* C(\Omega)$ devient surjectif.

Soit maintenant $\Delta \subset S^{n-1}$ un ouvert connexe quelconque. En vertu de la flascité de C et de ce qui est déjà démontré, on a le diagramme commutatif et exact comme suit:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & & & & & \\ & & \downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & A(\Omega) & \longrightarrow & B(\Omega) & \longrightarrow & C(\Omega \times \frac{1}{i} S_\infty^{*n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^*(\Omega \times \frac{1}{i}\Delta dx\infty) & \longrightarrow & B(\Omega) & \longrightarrow & C(\Omega \times \frac{1}{i}\Delta dx\infty), & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

d'où la dernière flèche horizontale devient surjective. C.Q.F.D.

Exercice Vérifier que la suite exacte (3.27): $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow \pi_* C \longrightarrow 0$ est l'image directe de celle: $0 \longrightarrow A^* \longrightarrow \pi^{-1} B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ par la projection π: $R^n \times \frac{1}{i} S_\infty^{*n-1} \longrightarrow R^n$. Calculer aussi

$$R^k \pi_* A^* = \begin{cases} A & k = 0 \\ B & k = n-1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Exercice Soit $F(z)$ une fonction holomorphe dans un coin infinitésimal $\Omega + i\Gamma 0$. Supposons que pour tout compact $K \subset\subset \Omega$ et pour tout $\Gamma' \subset\subset \Gamma$, il existe $\varepsilon > 0$, $M > 0$ tels que

(6.31) $$|F(z)| \leq \frac{C}{|y|^M} \quad \text{pour} \quad z \in K + i\Gamma' \cap \{|y| < \varepsilon\}.$$

Alors $F(x+i\Gamma 0)$ est une distribution. [En intégrant certaines fois, on peut supposer que $F(z)$ se prolonge continûment à Ω. Calculer alors le représentant standard de $\chi(x)F(x+i\Gamma 0)$ pour la fonction caractéristique $\chi(x)$ d'un cube dans Ω. C.f. (6.8).]

Exercice Soit $f(x)$ une distribution dans Ω. Supposons que S.S.f $\subset \Omega \times \frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\infty$ en tant qu'une hyperfonction. Alors $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$ avec $F(z)$ vérifiant la condition de l'Exercice précédent. En déduire l'assertion suivante: Si $f(x)$ est une distribution contenant x_1 comme paramètre analytique réel en tant qu'une hyperfonction, alors la restriction $f(0,x')$ est encore une distribution. [Noter que $W(x,\omega)$ est une distribution de x, ω, et que l'intégrale est compatible avec le plongement $D' \hookrightarrow B$.]

<u>Remarque</u> Soit $C_{D'}$ le faisceau sur $R^n \times iS_\infty^{n-1}$ associé à

$\Omega \times \frac{1}{i}\Delta dx\infty \longmapsto D'(\Omega)/D'(\Omega) \cap A^*(\Omega \times \frac{1}{i}\Delta dx\infty)$.

Par le même raisonnement que l'Exercice ci-dessus, on peut constater que la décomposition spectrale induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} C_{D'} & \xrightarrow{\Phi} & (D'/A)^a_{R^n \; S^{n-1}} & \xrightarrow{\Psi} & C_{D'} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{\Phi} & (B/A)^a_{R^n \; S^{n-1}} & \xrightarrow{\Psi} & C. \end{array}$$

Ainsi on obtient la théorie du spectre singulier pour les distributions compatible avec celle pour les hyperfonctions. $C_{D'}$ n'est pas flasque, mais mou puisque D'/A l'est. (Pour la définition de faisceau mou, voir Définition 7.1.5.)