COURS DE L'INSTITUT FOURIER

A. KANEKO

Chapitre I. Hyperfonctions d'une variable

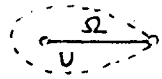
Cours de l'institut Fourier, tome 12 (1977-1978), p. 9-31
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__12__9_0>

CHAPITRE I. HYPERFONCTIONS D'UNE VARIABLE

1. Définition et opérations élémentaires.

Soit Ω un ouvert de R. Définissons maintenant l'espace d'hyperfonctions sur Ω de façon precise.

Définition 1.1.1 Un ouvert $U \subset C$ est dit un voisinage complexe de Ω s'il contient Ω comme un fermé.



Définition 1.1.2 $B(\Omega) = \varinjlim_{U \supset \Omega} \mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U)$, où $\mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ resp. $\mathcal{O}(U)$ désignent l'espace des fonctions holomorphes sur $U \setminus \Omega$ resp. sur U; $\mathcal{O}(U)$ est considéré comme un sous espace vectoriel de $\mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ par la restriction naturelle. La limite inductive (directe) est prise pour les voisinages complexes U de Ω par rapport à la restriction naturelle.

On voit facilement que pour un couple de voisinages $U \supset V$, la restriction $\mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$ est injective. Comme on le verra ultérieurement, elle est même surjective. On a donc le

Théorème 1.1.3 Quel que soit le voisinage complexe U, on a l'isomorphisme $B(\Omega) = \mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U)$, ainsi la limite inductive étant superflue.

Pour un élément $F(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$, on désignera par $[F(z)]$ l'hyperfonction qu'il définit. Intuitivement, en désignant par $F_\pm(z)$ la restriction $F(z)|_{U_\pm}$, où $U_\pm = U \cap \{\pm \mathrm{Im}\, z > 0\}$, on pourra écrire

(1.1) $[F(z)] = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$. (expression valeurs au bord).

Selon la définition, l'hyperfonction ainsi définie est nulle si et seulement si $F_\pm(z)$ se rattachent sur Ω comme une fonction holomorphe. Une question alors se pose: si $F_\pm(z)$ se rattachent sur Ω seulement comme une fonction continue, la différence $F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$ est-elle nulle au sens d'hyperfonction? C'est exact grâce au théorème de Painlevé:

Théorème 1.1.4 Toute fonction $F(z)$ continue sur U et holomorphe dans $U \setminus \Omega$, est en effet holomorphe sur U.

Pour les gens qui savent la distribution, nous donnons une généralisation de ce théorème à titre d'exercice:

Théorème 1.1.4' Soient $F_\pm(z)$ des fonctions holomorphes sur $U_\pm$. Supposons que les limites de $F_\pm(x\pm i\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ existent dans $D'(\Omega)$ et sont égales, i.e. pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \langle F_+(x+i\varepsilon), \varphi(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \langle F_-(x-i\varepsilon), \varphi(x)\rangle.$$

Alors $F_\pm(z)$ se rattachent comme une fonction holomorphe sur Ω.

On pourrait croire que la "limite" désignée par le symbole $F_\pm(x\pm i0)$, i.e. celle au sens d'hyperfonction était la plus faible des notions. Mais en ce qui concerne l'identité, elle est en apparence la plus forte bien que toutes les notions reviennent au même.

Donnons maintenant les définitions d'opérations sur les hyperfonctions.

1°. Opération C-linéaire est celle d'espace de quotient $\mathcal{O}(U\setminus\Omega)/\mathcal{O}(U)$ induite sur la limite inductive:

$$\lambda(F_+(x+i0)-F_-(x-i0)) + \mu(G_+(x+i0)-G_-(x-i0))$$
$$= (\lambda F_+ + \mu G_+)(x+i0) - (\lambda F_- + \mu G_-)(x-i0).$$

2°. Multiplication par une fonction analytique réelle. Soit $f(x) = [F(z)] \in B(\Omega)$ et soit $\varphi(x)$ une fonction analytique réelle (i.e. la restriction sur Ω d'une fonction holomorphe dans un voisinage complexe de Ω). On peut trouver un voisinage complexe U commun à F et φ. Alors le produit $\varphi(x)f(x)$ est l'hyperfonction définie par $\varphi(z)F(z) \in \mathcal{O}(U\setminus\Omega)$. Symboliquement:

$$(1.2) \quad \varphi(x)(F_+(x+i0)-F_-(x-i0)) = (\varphi F_+)(x+i0) - (\varphi F_-)(x-i0).$$

Il est clair que le résultat ne dépend pas du choix de représentant $F(z)$.

3°. Dérivation. La dérivée $f'(x)$ d'une hyperfonction $f(x) = [F(z)]$ est l'hyperfonction définie par $F'(z)$:

$$(1.3) \quad \frac{d}{dx}\big(F_+(x+i0)-F_-(x-i0)\big) = \frac{dF_+}{dz}(x+i0) - \frac{dF_-}{dz}(x-i0).$$

Puisqu'une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable, il en est de même d'une hyperfonction.

En somme on peut appliquer un opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques réelles:

$$\left\{a_0(x)\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\dots+a_n(x)\right\}f(x).$$

Exemple 1.1.5 Ajoutons quelques exemples d'hyperfonctions.

$(x\pm i0)^\lambda$, défini par z^λ avec la détermination principale.

$x_\pm^\lambda = \frac{1}{2i\sin\pi\lambda}\{(\mp x+i0)^\lambda-(\mp x-i0)^\lambda\}$ $(\lambda\notin Z)$.

$|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda$.

$p.f.F(x) = \frac{1}{2}\big(F(x+i0)+F(x-i0)\big)$, où $F(z)$ est méromorphe au voisinage de Ω.

En particulier,

$$p.f.\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0}+\frac{1}{x-i0}\right) = \frac{1}{x\pm i0}\pm i\pi\delta(x).$$

Exercice Trouver toutes les hyperfonctions f satisfaisant à l'équation $xf(x) = 1$, où 1 est l'hyperfonction définie par $F_+(z) = 1$, $F_-(z) = 0$.

Exercice Calculer les dérivées de $p.f.\frac{1}{x}$ et de $x_\pm^\lambda$.

2. Propriété locale

Le plus grand caractère d'opérateur différentiel est qu'il opère de façon locale. Il est donc important de vérifier si les hyperfonctions comportent bien par rapport à cette propriété locale. Pour décrire ceci, nous introduirons des terminologies de la théorie des faisceaux.

Définition 1.2.1 Soit X un espace topologique. Un préfaisceau d'espaces C-vectoriels $\mathcal{F}$ sur X est la donnée, pour tout ouvert $U\subset X$, d'un espace C-vectoriel $\mathcal{F}(U)$, et, pour tout couple d'ouverts $U\supset V$, d'une application C-linéaire $\rho_{VU}:\mathcal{F}(U)\longrightarrow\mathcal{F}(V)$ de telle sorte que

a) $\rho_{UU} = \mathrm{id}$,

b) $\rho_{WV}\circ\rho_{VU} = \rho_{WU}$ si $U\supset V\supset W$.

$\mathcal{F}(U)$ est appelé l'espace des sections au-dessus de U. ρ_{VU} est appelé la restriction de $\mathcal{F}(U)$ dans $\mathcal{F}(V)$. Pour $f\in\mathcal{F}(U)$, $\rho_{VU}(f)$ est souvent noté par $f|_V$.

La notion de préfaisceau est l'abstraction de la propriété commune des applications de restriction pour une classe de fonctions.

Soient $\Omega \supset \Omega'$ un couple d'ouverts. Si U est un voisinage complexe de Ω, $U' = U \setminus (\Omega \setminus \Omega')$ est un voisinage complexe de Ω' tel que $U' \setminus \Omega' = U \setminus \Omega$. L'application identique $\mathcal{O}(U \setminus \Omega) \to \mathcal{O}(U' \setminus \Omega')$ et la restriction $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U')$ induisent une application $\mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(U' \setminus \Omega')/\mathcal{O}(U')$. Si $V \subset U$ est un autre voisinage complexe de Ω et si $V' = V \setminus (\Omega \setminus \Omega')$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{O}(U' \setminus \Omega')/\mathcal{O}(U') \arrow[d] \\
\mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V) \arrow[r] & \mathcal{O}(V' \setminus \Omega')/\mathcal{O}(V').
\end{tikzcd}$$

Donc il induit une application $B(\Omega) \to B(\Omega')$ qu'on appellera la restriction. Avec cette définition d'application de restriction, il est clair que $\Omega \mapsto B(\Omega)$ constitue un préfaisceau sur R.

<u>Définition 1.2.2</u> Un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X est dit faisceau s'il satisfait à deux conditions suivantes: Soit $\{U_\lambda\}$ un recouvrement ouvert quelconque de $U \subset X$.

FI) Tout élément $f \in \mathcal{F}(U)$, dont les restrictions $f|_{U_\lambda}$ sont nulles dans $\mathcal{F}(U_\lambda)$, est lui-même nul dans $\mathcal{F}(U)$.

FII) Etant donnée une famille de sections $\{f_\lambda\}$, $f_\lambda \in \mathcal{F}(U_\lambda)$, satisfaisant aux conditions de compatibilité:

$$U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad f_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = f_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu},$$

on peut trouver un élément $f \in \mathcal{F}(U)$ dont la restriction $f|_{U_\lambda}$ est egale à la donnée f_λ.

Cette notion est l'abstraction des classes de fonctions ayant la propriété locale.

<u>Exemple 1.2.3</u> La donnée $\Omega \mapsto L_1(\Omega)$, les fonctions sommables sur Ω, constitue un préfaisceau, mais non un faisceau; elle ne satisfait pas à FII. D'autre part, $\Omega \mapsto L_{1,loc}(\Omega)$, les fonctions localement sommables (i.e. sommables sur chaque compact de Ω) constitue un fausceau. Plus généralement, la classe de fonctions définie par une propriété locale constitue un faisceau. Voici des exemples importants:

E ou C^{∞}: faisceau des (germes de) fonctions indéfiniment dérivables sur R.

D': faisceau des distributions sur R; le fait que D' est un faisceau est signalé sous le nom du principe de localisation dans le livre de L. Schwartz.

$\mathcal{O}$: faisceau des fonctions holomorphes sur C.

A: faisceau des fonctions analytiques réelles sur R; pour $\Omega \subset R$, on donne $\Omega \mapsto A(\Omega) = \varinjlim_{U \supset \Omega} \mathcal{O}(U)$.

<u>Théorème 1.2.4</u> $\Omega \mapsto B(\Omega)$ est un faisceau sur R, que l'on désignera par B.

La propriété FI sera vérifiée immédiatement. FII sera démontré ultérieurement.

On dit qu'une hyperfonction $f \in B(\Omega)$ est égale à 0 sur $\Omega' \subset \Omega$ si la restriction $f|_{\Omega'}$ en est. En vertu de FI la définition suivante a un sens:

<u>Définition 1.2.5</u> Le support d'une hyperfonction $f(x)$ (noté supp f) est le complémentaire du plus grand ouvert où elle est égale à 0. En général, pour une section f d'un faisceau $\mathcal{F}$, on définit supp f par la même manière.

Notons que le support est toujours fermé par la définition.

Le fait que l'opérateur différentiel agit de façon locale est exprimé par la terminologie survante:

<u>Définition 1.2.6</u> Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux (pré-)faisceaux sur X. Une famille d'applications C-linéaires $h = \{h_U\}$, $h_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ est dite un homomorphisme de (pré-)faisceaux si elles sont compatibles avec les restrictions:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \rho^{\mathcal{F}}_{VU}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{\mathcal{G}}_{VU}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V). \end{array}$$

Imaginons que V soit un petit voisinage du point $x \in X$ considéré. Alors la commutativité du diagramme ci-dessus signifiera que le résultat en x de l'application h pour une section $f \in \mathcal{F}(U)$ est déterminé par la connaissance de f à vrai voisinage de x. Donc c'est une expression de la propriété locale de l'application. Cela dit, le théorème suivant est évident:

Théorème 1.2.7 Un opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques réelles est un homomorphisme de faisceaux $\circlearrowleft A$, $\circlearrowleft B$.

Exemple 1.3.8 supp $\delta(x) = \{0\}$, supp $Y(x) = \{x \geqslant 0\}$.

Exercice Déterminer le support des hyperfonctions données dans Exemple 1.1.5.

3. Plongement de fonctions ordinaires

Examinons maintenant le rapport entre les hyperfonctions et les fonctions ordinaires.

Définition 1.3.1 Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur X. On dira que $\mathcal{F}$ est un sous faisceau de $\mathcal{G}$ si pour chaque $U \subset X$ on a l'inclusion ι_U: $\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{G}(U)$, $\{\iota_U\}$ étant un homomorphisme de faisceaux.

Théorème 1.3.2 A est un sous faisceau de B. L'inclusion est donnée par

$$\begin{array}{ccc} A(\Omega) = \varinjlim_{U \supset \Omega} \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & B(\Omega) = \varinjlim_{U \supset \Omega} \dfrac{\mathcal{O}(U \setminus \Omega)}{\mathcal{O}(U)} \\ \varphi(z) \in \mathcal{O}(U) & \longmapsto & \varepsilon(z)\,\varphi(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega), \end{array}$$

où

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 1 & \text{sur } U_+ = U \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}, \\ 0 & \text{sur } U_- = U \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}. \end{cases}$$

On peut aussi utiliser l'application $\varphi(z) \mapsto \bar{\varepsilon}(z)\,\varphi(z)$, où

$$\bar{\varepsilon}(z) = \begin{cases} 0 & \text{sur } U_+ \\ -1 & \text{sur } U_- \end{cases}$$

Notons que $f \in B(\Omega)$ est dans $A(\Omega)$ si et seulement si dans une (en effet n'importe quelle) expression valeurs au bord $f(x) = F(x+i0) - F_-(x-i0)$, $F_\pm(z)$ se prolongent sur Ω. On dit que $f \in B(\Omega)$ est analytique réelle dans $\Omega' \subset \Omega$ si $f|_{\Omega'} \in A(\Omega')$.

Définition 1.3.3 Le support singulier de $f(x)$, noté par supp sing f est le complémentaire du plus grand ouvert où elle est analytique réelle.

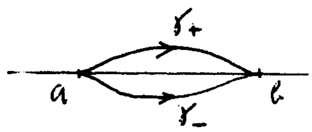
Corollaire 1.3.4 L'opérateur différentiel linéaire à coefficients analytiques réels n'augmente pas le support et le support singulier d'une hyperfonction.

Exemple 1.3.5 supp sing $\delta(x)$ = supp sing $Y(x) = \{0\}$.

Exercice Déterminer le support singulier des hyperfonctions dans Exemple 1.1.5.

Soit $f(x)$ une hyperfonction définie au voisinage de l'intervalle $[a,b]$. Supposons que f est analytique réelle au voisinage des extrémites a, b. Prenons une expression $f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$. Par définition $F_\pm(z)$ se prolonge holomorphiquement au voisinage complexe de a, b. Dans ce cas on peut donner la définition d'intégrale définie.

Définition 1.3.6



$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\gamma_+} F_+(z)dz - \int_{\gamma_-} F_-(z)dz, \tag{1.4}$$

où $\gamma_\pm$ est un chemin dans le demi plan supérieur (resp. inférieur) reliant a à b.

En vertu du théorème de Cauchy, cette valeur ne dépend pas du choix de chemin ou de l'expression valeurs au bord. Comme un cas particulier considérons une hyperfonction $f(x)$ à support dans un compact K. Alors l'expression $f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$ s'annule dans le sens ordinaire en dehors de K et $F_\pm(z)$ définissent une fonction holomorphe $F(z)$ dans $U \setminus K$ pour un voisinage U. Soit $\varphi(x)$ une fonction analytique réelle définie au voisinage de K. Alors $\varphi(x)f(x)$ est encore une hyperfonction à support dans K et elle est représentée par $\varphi(z)F(z)$. Choisissons un intervalle $]a,b[$ contenant K. La définition ci-dessus permet de calculer $\int_a^b \varphi(x)f(x)dx$. Soit $\gamma = -\gamma_+ + \gamma_-$ le chemin fermé contournant K au sens positif. On a alors

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = -\oint_\gamma \varphi(z)F(z)dz.$$

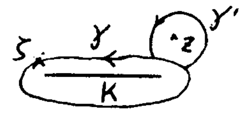
Puisque l'intégrale ne dépend pas du choix de a, b, on pourra le désigner par $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$. L'interprétation de la formule (0.1) donnée dans l'introduction est ainsi établie.

Lemme 1.3.7 Soit $f(x)$ une hyperfonction à support compact. Posons

$$(1.5) \qquad G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-z}dx.$$

$G(z)$ est holomorphe en dehors de supp f et on a $[G(z)] = f(x)$.

Démonstration Supposons $f(x) = [F(z)]$, où $F(z) \in \mathcal{O}(U \setminus K)$, $K = \operatorname{supp} f$ et U est un voisinage complexe de K. Soit γ un chemin fermé simple autour de K. On a, par la définition d'intégrale,



$$G(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

où on a supposé que γ est si voisin de K que z est en dehors de lui. Par suite $G(z)$ est holomorphe en dehors de γ, donc en déformant γ, en dehors de K. Elle définit donc une hyperfonction $g(x)$ à support dans K. Pour montrer $f(x) = g(x)$, il suffit de vérifier que $G(z) - F(z)$ est holomorphe au voisinage de K. Choisissons un chemin fermé simple γ' contournant z et ayant une partie commune avec γ. En vertu du théorème de Cauchy on a

$$G(z) - F(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma'}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma+\gamma'}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

la dernière expression étant holomorphe à l'intérieur de $\gamma+\gamma'$, donc au voisinage de K. C.Q.F.D.

Définition et Proposition 1.3.8 La fonction holomorphe $G(z)$ définie par (1.5) est dite le représentant standard de $f(x)$. Elle est caractérisée par les deux propriétés:

a) $G(z)$ est holomorphe dans $P^1 \setminus K$ (où $P^1 = C \cup \{\infty\}$).

b) $G(\infty) = 0$.

(Il suffit de se rappeler le théorème de Liouville.)

La formule (1.5) a aussi un sens lorsque $f(x)$ est une fonction sommable (ou une distribution) à support compact. Il est donc naturel de considérer une telle fonction $f(x)$ comme une hyperfonction par $f(x) = G(x+i0) - G(x-i0)$. Pour $f(x)$ à support quelconque, on la décompose en somme localement finie:

$$(1.6) \qquad f(x) = \sum_{\lambda} f_{\lambda}(x),$$

i.e. de telle manière que $\operatorname{supp} f_{\lambda}$ sont compacts et que chaque point x a un voisinage qui en coupe au plus nombre fini. Calculons $G_{\lambda}(z)$ pour chaque f_{λ} par(1.5) et posons $\iota(f_{\lambda}) = [G_{\lambda}(z)]$. Notons que $\operatorname{supp} \iota(f_{\lambda}) \subset \operatorname{supp} f_{\lambda}$. Donc la somme $\sum \iota(f_{\lambda})$ est aussi localement finie et définit une hyperfonction $\iota(f)$.

Théorème 1.3.9 Par cette application ι, $L_{1,loc}$ (D') devient un sous-faisceau de B, l'inclusion étant compatible avec celle $A \hookrightarrow L_{1,loc}$ habituelle et celle $A \hookrightarrow B$ donnée dans le Théorème 1.3.2.

Démonstration Montrons d'abord que le résultat ne dépend pas du choix de la décomposition (1.6). Soit $f(x) = \sum_{\mu} g_{\mu}(x)$ une autre. Il suffit de comparer les deux résultats au voisinage d'un point x. Prenons un voisinage V de x tel qu'il coupe $\operatorname{supp} f_{\lambda_1}, \ldots, \operatorname{supp} f_{\lambda_I}$ et $\operatorname{supp} g_{\mu_1}, \ldots, \operatorname{supp} g_{\mu_J}$ et non les autres. On a alors sur V,

$$\sum_{\lambda} \iota(f_{\lambda}) - \sum_{\mu} \iota(g_{\mu}) = \sum_{i=1}^{I} \iota(f_{\lambda_i}) - \sum_{j=1}^{J} \iota(g_{\mu_j}) = \iota\left(\sum f_{\lambda_i} - \sum g_{\mu_j}\right) = 0,$$

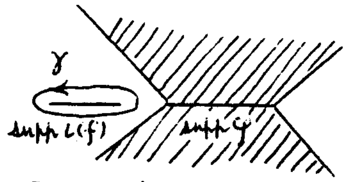
car $\sum f_{\lambda_i} - \sum g_{\mu_j}$ est à support compact disjoint de V et ι n'augmente pas le support pour un tel élément. Ainsi on trouve que ι est un homomorphisme.

Démontrons maintenant que ι est injective. Pour cela il suffit de montrer $\operatorname{supp} f \subset \operatorname{supp} \iota(f)$ lorsque f est à support compact. Soit $\varphi(x)$ une fonction continue (indéfiniment dérivable s'il s'agit de D') telle que $\operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \iota(f) = \emptyset$. Posons

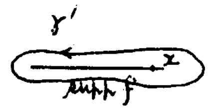
$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} * \varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/\varepsilon} \varphi(y)\,dy.$$

Il est évident que $\varphi_\varepsilon(z)$ est holomorphe entière et dans

$$\mathbb{C} \setminus [\operatorname{supp}\varphi + \{|\mathrm{Im}\ z| \geq |\mathrm{Re}\ z|\}],$$



elle tend vers zéro localement uniformément lorsque $\varepsilon \downarrow 0$. Donc si on choisit le chemin γ assez voisin de supp $\iota(f)$, on aura



$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \iota(f)\, \varphi_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} - \oint_\gamma G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz = 0.$$

D'autre part, en étendant γ à γ' qui contourne supp f, on a

$$- \oint_\gamma G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz = - \oint_{\gamma'} G(z)\varphi_\varepsilon(z)dz = - \oint_{\gamma'} dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi_\varepsilon(z)}{x-z} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{2\pi i} \oint_{\gamma'} \frac{\varphi_\varepsilon(z)}{z-x} dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx.$$

Ici le changement d'ordre d'intégration est garanti par la théorie des intégrales (ou par la théorie des distributions). La même théorie annonce que la limite du dernier membre est égale à

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (\text{ou } \langle f, \varphi \rangle).$$

Donc elle s'annule pour toute φ de telle sorte, ce qui prouve supp f $\subset$ supp $\iota(f)$.

Soit enfin $f(x)$ une fonction analytique réelle définie au voisinage de $[a,b]$. Soit $\chi(x)$ la fonction caractéristique de cet intervalle:

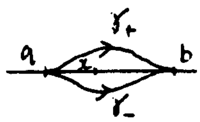
$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } x \in [a,b], \\ 0, & \text{pour } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

On a $\iota(\chi(x)f(x)) = [G(z)]$, où

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(x)}{x-z} dx.$$

Notons qu'on peut déformer le chemin d'intégrale dans le domaine où f est holomorphe. Donc G(z) se prolonge à travers l'intervalle $]a,b[$ de dessus et de dessous. Le saut des prolongements sur $]a,b[$ est égale à

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_- - \gamma_+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta = f(x),$$



d'où $\iota(f)|_{]a,b[} = \iota(\chi(x)f(x))|_{]a,b[} = f|_{]a,b[}$. C.Q.F.D.

<u>Exemple 1.3.10</u> Désignons la fonction caractéristique de $[a,b]$ par

$\chi_{[a,b]}$. On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\log(x-z)\Big|_a^b = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{b-z}{a-z}.$$

En utilisant ce représentant standard, on peut calculer la dérivée comme suit:

$$\chi'_{[a,b]}(x) = \left[\left(\frac{1}{2\pi i}\log\frac{b-z}{a-z}\right)'\right] = \left[\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-b} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\right] = -\delta(x-b) + \delta(x-a).$$

Considérons ensuite $Y(x)$ comme une fonction localement sommable. Puisque $Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\chi_{[k,k+1]}(x)$ est une somme localement finie, on a

$$\iota(Y) = \sum_{k=0}^{\infty}\iota(\chi_{[k,k+1]}) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z}\right].$$

Notons que $\sum \frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z}$ elle-même ne converge pas. Pour obtenir une fonction holomorphe définissant l'hyperfonction $\iota(Y)$, il faut donc remplacer les représentants. Prenons par exemple

$$\frac{1}{2\pi i}\log\frac{k+1-z}{k-z} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{k}, \quad \text{pour } k \geq 1.$$

Quand z parcourt dans un compact de $C \setminus \overline{R^+}$, celui-ci est égal à

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\log\left(1-\frac{z-1}{k}\right) - \log\left(1-\frac{z}{k}\right)\right\} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{k}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{-\frac{z-1}{k} - \frac{(z-1)^2}{2k^2} - \cdots + \frac{z}{k} + \frac{z^2}{2k^2} + \cdots - \frac{1}{k}\right\} = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \text{pour } k > |z|+1,$$

l'estimation étant uniforme par rapport à z. Ainsi la série modifiée converge localement uniformément dans $C \setminus \overline{R^+}$ et fournit un représentant de $\iota(Y)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-z}{-z} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\log\frac{k+1-z}{k-z} - \frac{1}{k}\right\}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\log(-z) + \frac{1}{2\pi i}\left\{\log(1-z) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\log\frac{k+1-z}{k-z} - \frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Le second terme s'écrit :

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\log\frac{k+1-z}{k-z} - \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k},$$

de sorte qu'il définit une fonction holomorphe entière. On a donc $\iota(Y) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\log(-z)\right]$ en concordance avec notre définition de la fonction de Heaviside.

<u>Exercice</u> Soit $f \in L_{1,loc}(\Omega)$, $\varphi \in A(\Omega)$. Démontrer:

$$\varphi \cdot \iota(f) = \iota(\varphi \cdot f),$$

$$\frac{d}{dx}\, \iota(f) = \iota\left(\frac{d}{dx} f\right), \quad \text{si} \quad f \in C^1(\Omega),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \iota(f)dx, \quad \text{si} \quad f \quad \text{est à support compact.}$$

Exercice On peut calculer un représentant de $Y(x)$ de la manière suivante: On a $Y(x) = (1+x)\cdot\frac{Y(x)}{1+x}$, donc $\iota(Y) = (1+x)\iota\left(\frac{Y(x)}{1+x}\right)$ et un représentant s'obtient par

$$(1+z)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x}\,\frac{dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{x-z}{x+1}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{2\pi i}\log(-z).$$

Justifier ce calcul.

Exercice Donner l'interprétation hyperfonctionniste à $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)$. (Un représentant: $1/(1-e^{2\pi i z})$.)

Exercice Supposons que dans (1.5) $f(x)$ est une fonction sommable (continue resp. une distribution). Alors $G(x+i0)-G(x-i0)$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$ converge vers $f(x)$ en norme de L_1 (uniformément resp. au sens de distribution).

4. Flascité.

On a déjà vu que l'hyperfonction est une classe de fonctions généralisées étendant la distribution. On se pose la question: Quels sont des mérites de cette extension alors que la distribution déjà permet la dérivation d'ordre quelconque? Voici une réponse.

Définition 1.4.1 Un faisceau $\mathcal{F}$ sur X est dit flasque si pour tout ouvert $U \subset X$ la restriction $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ est surjective (par conséquent, la restriction $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ pour tout couple d'ouverts $V \supset U$ en est).

Théorème 1.4.2 B est flasque.

Démonstration Soit $\Omega \subset R$ un ouvert quelconque. $C \setminus \partial\Omega$ est alors un voisinage complexe de Ω. D'après le Théorème 1.1.3 il y a un isomorphisme

$$B(\Omega) = \mathcal{O}(C\setminus\overline{\Omega})/\mathcal{O}(C\setminus\partial\Omega):$$

Prenons $f \in B(\Omega)$ et soit $F(z) \in \mathcal{O}(C\setminus\overline{\Omega})$ un représentant de f par cet isomorphisme. Il est claire que $F(z)$ définit une hyperfonction sur R (à support dans $\overline{\Omega}$!) dont la restriction sur Ω n'est autre que f. C.Q.F.D.

Exemple 1.4.3 Considérons l'hyperfonction sur $x > 0$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(x-a_k),$$

où $\{a_k\}$ est une suite décriossante tendant vers 0. Cherchons un prolongement de f sur R conservant le support dans $x \geq 0$. On a

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a_k} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{a_k}{z}} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z}\left\{1+\frac{a_k}{z}+\ldots+\frac{a_k^N}{z^N}+\frac{a_k^{N+1}}{z^{N+1}}\frac{1}{1-\frac{a_k}{z}}\right\}.$$

Puisque $\{a_k\}$ tend vers 0, on peut trouver $\{N_k\}$ tel que $a_k^{N_k+1} \leq 1/k^2$ pour k assez grands. Posons

$$G(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_k\left\{\frac{1}{z-a_k} - \frac{1}{z}\left(1+\frac{a_k}{z}+\ldots+\frac{a_k^N}{z^N}\right)\right\}.$$

La série converge localement uniformément dans $C \setminus \overline{\{a_k\}}$. Donc $G(z)$ définit une hyperfonction sur R à support dans $\overline{\{a_k\}}$. Il est clair que c'est un prolongement voulu.

Remarque $f(x)$ est même une distribution sur $x > 0$. On peut trouver un prolongement en distribution si et seulement si on peut choisir une telle suite $\{N_k\}$ bornée.

5. Démonstration des théorèmes fondamentaux.

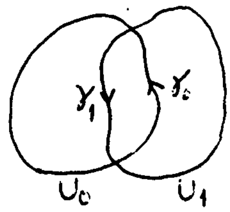
Donnons maintenant la démonstration des théorèmes 1.1.3, 1.2.4.

Lemme 1.5.1 Soient U_j, $j = 0,1$, deux ouverts de C. Supposons que $F(z)$ est holomorphe dans $U_0 \cap U_1$. On peut alors trouver $F_j(z) \in \mathcal{O}(U_j)$, $j = 0,1$, telles que

(1.7) $\quad F_1(z) - F_0(z) = F(z)$ dans $U_0 \cap U_1$.

Démonstration Supposons d'abord que U_j sont bornés à frontière régulière par morceaux et $F(z)$ holomorphe au voisinage de $\overline{U_0 \cap U_1}$. Désignons par γ_j la partie de ∂U_j contenue dans $\overline{U_{1-j}}$. Posons

$$F_j(z) = \frac{(-1)^{1-j}}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$



Il est clair qu'elles répondent à notre demande.

Considérons maintenant le cas général. U_j peut être approché par une suite croissante d'ouverts $U_{j,k}$ tels que $U_{j,k+1} \supset \overline{U_{j,k}}$, qu'ils satisfont aux conditions ci-dessus et pour chaque k que $(U_0 \cup U_1, U_{0,k} \cup U_{1,k})$ est une paire de Runge i.e., tout $\varphi \in \mathcal{O}(U_{0,k} \cup U_{1,k})$ peut être approché de façon localement uniforme par les éléments de $\mathcal{O}(U_0 \cup U_1)$. Pour assurer la dernière condition, il suffit de choisir $U_{j,k}$ de façon que chaque composante connexe du complémentaire de $U_{0,k} \cup U_{1,k}$ coupe le complémentaire de $U_0 \cup U_1$ (théorème de Runge). Construisons $F_{j,k}(z) \in \mathcal{O}(U_{j,k})$, j = 0, 1, pour chaque k suivant la recette ci-dessus. On a

$$F_{1,k}(z) - F_{0,k}(z) = F(z) \quad \text{sur} \quad U_{0,k} \cap U_{1,k}.$$

Donc

$$F_{0,k+1}(z) - F_{0,k}(z) = F_{1,k+1}(z) - F_{1,k}(z) \quad \text{sur} \quad U_{0,k} \cap U_{1,k},$$

et elles définissent une unique fonction holomorphe $G_k(z)$ sur $U_{0,k} \cup U_{1,k}$. On peut alors trouver une fonction $H_k(z) \in \mathcal{O}(U_0 \cup U_1)$ telle que

$$|G_k(z) - H_k(z)| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{sur} \quad U_{0,k-1} \cup U_{1,k-1}.$$

Posons

$$F_j(z) = F_{j,1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (G_k(z) - H_k(z)), \quad j = 0, 1.$$

On a

$$F_j(z) = F_{j,N}(z) + \sum_{k=N+1}^{\infty} (G_k(z) - H_k(z)) + \sum_{k=1}^{N} H_k(z). \tag{1.8}$$

Il est alors clair que $F_j(z) \in \mathcal{O}(U_j)$ et elles satisfont à (1.7). C.Q.F.D.

Démonstration du Théorème 1.1.3 Comme on l'a déjà remarqué il suffit de montrer que pour deux voisinages $U \supset V$ la restriction $\mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$ est surjective. Prenons donc $F(z) \in \mathcal{O}(V \setminus \Omega)$. Appliquons le lemme ci-dessus au couple $U_1 = U \setminus \Omega$, $U_0 = V$. On obtient $F_1(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$, $F_0(z) \in \mathcal{O}(V)$ telles que $F_1(z) - F_0(z) = F(z)$ sur $V \setminus \Omega = V \cap (U \setminus \Omega)$. Ainsi $[F_1(z)|_{V \setminus \Omega}] = [F(z)]$ dans $\mathcal{O}(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}(V)$ et $[F_1(z)] \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)/\mathcal{O}(U)$ est l'élément cherché. C.Q.F.D.

Démonstration du Théorème 1.2.4 Il reste à démontrer la propriété FII. Soit $f_\lambda \in B(\Omega_\lambda)$ définie par $F_\lambda(z) \in \mathcal{O}(U_\lambda \setminus \Omega_\lambda)$. En prenant un raffinement dans le cas échéant, on peut supposer que $\{\Omega_\lambda\}$ donc $\{U_\lambda\}$ est localement fini. Supposons $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset$. La compatibilité $f_\lambda|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu} = f_\mu|_{\Omega_\lambda\cap\Omega_\mu}$ implique que $F_{\lambda\mu} = F_\mu - F_\lambda$ est holomorphe au voisinage de $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$, donc sur $U_\lambda \cap U_\mu$. Elles satisfont aux conditions:

a) $F_{\lambda\mu} = -F_{\mu\lambda}$,

b) $F_{\lambda\mu} + F_{\mu\nu} + F_{\nu\lambda} = 0$ sur $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$.

Le problème est alors ramené au

<u>Lemme 1.5.2</u> Soit $\{U_\lambda\}$ un recouvrement localement fini d'un ouvert $U \subset C$. Etant données $F_{\lambda\mu} \in \mathcal{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$ satisfaisant aux conditions a), b), on peut trouver $G_\lambda(z) \in \mathcal{O}(U_\lambda)$ telles que

$$F_{\lambda\mu} = G_\mu - G_\lambda \quad \text{sur} \quad U_\lambda \cap U_\mu.$$

Supposant ce lemme on a

$$F_\mu - F_\lambda = G_\mu - G_\lambda \quad \text{sur} \quad U_\lambda \cap U_\mu,$$

donc

$$F_\lambda - G_\lambda = F_\mu - G_\mu \quad \text{sur} \quad (U_\lambda \setminus \Omega_\lambda) \cap (U_\mu \setminus \Omega_\mu)$$

Elles définissent alors une fonction bien définie $F(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$. L'hyperfonction $[F(z)]$ est la voulue. C.Q.F.D.

<u>Démonstration du Lemme 1.5.2</u> Considérons d'abord le cas de recouvrement fini. Le cas $N = 2$ n'est autre que Lemme 1.5.1. Démontrons par récurrence. Supposons que le lemme est vrai pour les recouvrements avec $N - 1$ éléments et considérons un recouvrement avec N éléments $\{U_j\}_{j=1}^{N}$. En appliquant l'hypothèse à $\{U_j\}_{j=1}^{N-1}$ on peut trouver $\{F_j\}_{j=1}^{N-1}$ telles que

$$F_k - F_j = F_{jk} \quad \text{si} \quad U_j \cap U_k \neq \emptyset.$$

Posons $V = \bigcup_{j=1}^{N-1} U_j$. Définissons une fonction holomorphe G sur $V \cap U_N$ par

$$G(z) = F_{jN}(z) + F_j(z) \quad \text{sur} \quad U_j \cap U_N, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Grâce aux relations a), b), cette définition est compatible sur l'intersection: sur $U_j \cap U_k \cap U_N$ on a en effet

$$(F_{kN}+F_k) - (F_{jN}+F_j) = (F_{kN}-F_{jN}) + (F_k-F_j) = -F_{jk} + F_{jk} = 0.$$

Appliquons encore Lemme 1.5.1 pour le couple (V,U_N) et obtenons une décomposition de la forme

$$G(z) = G_N(z) - H(z), \quad G_N(z) \in \mathcal{O}(U_N), \quad H(z) \in \mathcal{O}(V).$$

Posons $G_j(z) = F_j(z) + H(z)$ pour $j = 1,\dots,N-1$. Le calcul sur $U_j \cap U_N$:

$$G_N - G_j = (G_N - H) - F_j = G - F_j = (F_{jN} + F_j) - F_j = F_{jN}$$

montre que $\{G_j\}_{j=1}^N$ ainsi obtenu est une solution cherchée.

Considérons maintenant le cas général. Soit $K_n \nearrow U$ une suite croissante de compacts épuisant U telle que (U,K_n) est une paire de Runge. Puisque $\{U_\lambda\}$ est un recouvrement localement fini, pour chaque n fixe il a seulement nombre fini d'éléments qui coupent K_n. Par ci-dessus on peut trouver $\{F_{\lambda,n}\} \in \mathcal{O}(U_\lambda)$ pour ces éléments satisfaisant à $F_{\lambda\mu} = F_{\mu,n} - F_{\lambda,n}$ entre eux. Pour l'uniformité posons $F_{\lambda,n} = 0$ pour U_λ qui ne coupe pas K_n. Alors $F_{\lambda,n+1}(z) - F_{\lambda,n}(z)$ se recollent et définissent une fonction holomorphe $H_n(z)$ au voisinage de K_n. Prenons $J_n(z) \in \mathcal{O}(U)$ telle que $|H_n(z) - J_n(z)| \leq 1/2^n$ sur K_n. Posons

$$G_\lambda = F_{\lambda,1} + \sum_{n=1}^{\infty} (F_{\lambda,n+1} - F_{\lambda,n} - J_n)$$

Une déformation pareille à (1.8) montre que $G_\lambda(z) \in \mathcal{O}(U_\lambda)$. Il est clair que $\{G_\lambda\}$ est une solution voulue. C.Q.F.D.

On verra ultérieurement que l'énoncé du lemme n'est que $H^1(U,\mathcal{O}) = 0$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$.

6. Spectre singulier.

Une fonction analytique réelle est une fonction définie sur l'axe réel qui permet de se prolonger au voisinage complexe comme une fonction holomorphe. L'expression $f(x) = F_+(x+i0) - F_-(x-i0)$ signifie qu'une hyperfonction de type général a deux composantes dont chacun permet de se prolonger au demi voisinage complexe $y > 0$, i.e. $\langle\frac{1}{i}, iy\rangle > 0$ respectivement $y < 0$, i.e. $\langle\frac{1}{i}, iy\rangle < 0$. Pour exprimer cette notion d'analyticité raffinée, on introduit $S^0 = \{\pm 1\}$, la sphère de dimension zéro, et considère l'espace $R \times S^0 = R \sqcup R$. En terminologie intrinsèque de la géométrie, c'est le fibré en sphères conormales de R dans C. On pourra plus précisément le désigner par $R\times \frac{1}{i}S^{*0}_{\infty}$, car il est en dualité par le produit scalaire $\langle \frac{1}{i}\xi\infty, iy0\rangle$ avec les vecteurs normaux infinitésimaux de R dans C.

<u>Définition 1.6.1</u> Une hyperfonction $f(x)$ est dite micro-analytique en $(x,+\frac{1}{i}dx\infty)$ si les composantes $F_{\pm}(z)$ définissant f se prolongent à un demi voisinage complexe $U_+ = U\cap\{\mathrm{Im}\, z>0\}$ de x. La micro-analyticité en $(x,-\frac{1}{i}dx\infty)$ sera définie de façon pareille.

Au lieu d'écrire $\pm\frac{1}{i}dx\infty$ on peut écrire $\mp idx\infty$ si on ne confond pas la définition.

f(x) est micro-analytique en $(x,+\frac{1}{i}dx\infty)$

<u>Lemme et Définition 1.6.2</u> L'ensemble des points où $f(x)$ est micro-analytique est un ouvert de $R\times S^0$. Le complémentaire de cet ouvert sera dit le spectre singulier de $f(x)$ et noté par S.S.f.

Soit $\pi: R\times S^0 \to R$ la projection. On a évidemment le

<u>Corollaire 1.6.3</u> $\pi(S.S.f) = \mathrm{supp\ sing}\, f$.

<u>Exemple 1.6.4</u> $S.S.\delta = \{0\}\times\{\pm idx\infty\}$, $S.S.Y = \{0\}\times\{\pm idx\infty\}$,

$$S.S.\frac{1}{x+i0} = \{(0,+idx\infty)\} \text{ (un point)}.$$

Comme une application de cette notion considérons le produit de deux hyperfonctions.

<u>Théorème 1.6.5</u> Soit f, g deux hyperfonctions. Supposons que S.S.f et S.S.g ne contiennent pas une paire de points antipodals, i.e. $(x,i\xi dx\infty)\in S.S.f$ et $(x,i\eta dx\infty)\in S.S.g$ tels que $\xi = -\eta$. Alors on peut définir le produit fg. On a

(1.9) $\quad S.S.fg \subset S.S.f\cup S.S.g.$

<u>Démonstration</u> Soit $f(x) = F_+(x+i0)-F_-(x-i0)$ et $g(x) = G_+(x+i0)-G_-(x-i0)$. Il suffit de définir fg localement au voisinage de chaque point x. Il y a deux situations typiques:

	type N° 1	type N° 2
S.S.f	$\not\ni(x,-idx\infty)$	$(x,\pm idx\infty)$
S.S.g	$\not\ni(x,-idx\infty)$	général
fg	$(F_+G_+)(x+i0)$	$(FG_+)(x+i0)-(FG_-)(x-i0)$

Dans le premier cas on peut représenter f, g par une seule composante $F_+(x+i0)$, $G_+(x+i0)$ au voisinage de x, d'où la possibilité du produit $F_+(z)G_+(z)$. Dans le deuxième cas $f(x)$ devient analytique au voisinage de x et le produit se ramène à celui qui est déjà introduit. La relation (1.9) sera claire. Les autres cas seront traités pareillement. C.Q.F.D.

Par exemple on peut considérer par ce théorème $1/(x+i0)^n$ comme la puissance $\{1/(x+i0)\}^n$.

Le théorème suivant, dont la démonstration est presque évident, suggère le principe complèmentaire entre le support et le spectre singulier comme celui entre la macro-causalité et la micro-analyticité dans la théorie de la mécanique quantique.

Théorème 1.6.6 Si $\operatorname{supp} f \subset \{x \geq 0\}$ et que $0 \in \operatorname{supp} f$, alors $(0, \pm i dx\infty) \in S.S.f.$

7. Microfonctions

En admettant que les fonctions analytiques sont maniables, pour étudier la singularité d'une hyperfonction il vaut mieux retirer sa partie singulière elle-même. Nous ajouterons pour ce but quelques terminologies des faisceaux.

Définition 1.7.1 Soit $\mathcal{F}$ un (pré-)faisceau sur X et $x \in X$ un point.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

est appelé la fibre de $\mathcal{F}$ en x. Un élément de $\mathcal{F}_x$ est appelé un germe de section de $\mathcal{F}$ en x.

Lemme et Définition 1.7.2. Etant donné un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X, posons

$$\overline{\mathcal{F}}(U) = \{s : U \to \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x ;\ \text{pour } \forall x \in U\ \exists V \ni x,\ \exists t \in \mathcal{F}(V) \text{ tels que}$$
$$s(y) = t(y) \text{ pour } \forall y \in V\}.$$

Alors $U \mapsto \overline{\mathcal{F}}(U)$ est un faisceau dont les fibres sont les mêmes que $\mathcal{F}$. On l'appellera le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{F}$.

Démonstration FI: Soit $s \in \overline{\mathcal{F}}(U)$. $s|_{U_\lambda} = 0$ signifie que $s(x) = 0$

dans $\mathcal{F}_x$ pour chaque $x \in U_\lambda$, donc $s = 0$ dans $\bar{\mathcal{F}}(U)$. FII: Etant données $s_\lambda \in \bar{\mathcal{F}}(U_\lambda)$ on définit $s: U \to \bigcup_{x\in U} \mathcal{F}_x$ en recollant s_λ. Il est clair que $s \in \bar{\mathcal{F}}(U)$. Enfin, chaque $s \in \bar{\mathcal{F}}_x$ est représentée par un élément de $\bar{\mathcal{F}}(V)$, donc par un élément de $\mathcal{F}(W)$, où $W \subset V$ sont des voisinages de x. Cela donne un homomorphisme $\bar{\mathcal{F}}_x \to \mathcal{F}_x$ ce qui se voit immédiatement isomorphe. C Q F D

<u>Remarque 1</u> Pour fabriquer le faisceau associé $\bar{\mathcal{F}}$, il suffit que les sections $\mathcal{F}(U)$ du préfaisceau $\mathcal{F}$ soient connues seulement pour une base d'ouverts $\{U\}$. Pour la commodité on dira la donnée partielle $U \mapsto \mathcal{F}(U)$ pour une base aussi un préfaisceau.

<u>Remarque 2</u> Si le préfaisceau $\mathcal{F}$ déjà satisfait à la condition FI, on peut simplifier la définition de $\bar{\mathcal{F}}(U)$ comme suit:

$$\bar{\mathcal{F}}(U) = \varinjlim_{\{U_\lambda\}} \{(s_\lambda);\ s_\lambda \in \mathcal{F}(U_\lambda),\quad s_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = s_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}\},$$

où la limite est prise par rapport à la restriction associée au raffinement. La restriction étant injective en vertu de FI, on a $\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \bar{\mathcal{F}}(U)$.

Par exemple, le faisceau associé à $U \mapsto L_1(U)$ est $L_{1,loc}$.

<u>Exercice</u> Soit G un espace C-vectoriel. Alors la donnée $U \mapsto G(U) = G$ avec la restriction identique constitue un préfaisceau. Chercher le faisceau lui associé. (On l'appelle le faisceau constant à fibre G.)

<u>Proposition et Définition 1.7.3</u> Soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur X et $\mathcal{F}$ un sous-faisceau de $\mathcal{G}$. La donnée

(1.10) $\qquad U \longmapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$

constitue un préfaisceau. Le faisceau lui associé est appelé le faisceau quotient de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{F}$ et noté par $\mathcal{G}/\mathcal{F}$. Plus généralement, soit $h: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un homomorphisme de faisceaux. Les données

$U \mapsto \operatorname{Ker} h_U$, $\quad U \mapsto \operatorname{Im} h_U$,

constituent des préfaisceaux. Les faisceaux leur associés sont notés par $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} h$ respectivement et appelés le noyau et l'image de h. Ils sont un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ respectivement. En combinant avec l'opération de quotient on peut fabriquer Coker $h = \mathcal{G}/\mathrm{Im}\ h$ (conoyau de h), Coim $h = \mathcal{F}/\mathrm{Ker}\,h$ (coimage de h).

Remarque on voit immédiatement que $U \mapsto \mathrm{Ker}\ h_U$ est en effet un faisceau, mais $U \mapsto \mathrm{Im}\ h_U$ non généralement. Considérons par exemple l'homomorphisme $d/dz: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$. On a

(1.11) $U \mapsto \mathcal{O}(U)/\frac{d}{dz}\mathcal{O}(U) = C^{\mu}$, μ étant le nombre de trous dans U,

alors que passant à la limite on a $\mathrm{Im}\ d/dz = \mathcal{O}$. Notons que (1.11) est un exemple d'un préfaisceau qui ne satisfait pas à FI.

Un homomorphisme de (pré-)faisceaux $h: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induit un C-homomorphisme $h_x: \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ pour chaque $x \in X$. Il est clair que $(\mathrm{Im}\ h)_x = \mathrm{Im}\ h_x$. En particulier, étant donné un couple de faisceaux $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ on a $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ si et seulement si $\mathcal{F}_x = \mathcal{G}_x$ pour tout $x \in X$.

Définition et Proposition 1.7.4 Soit $f: X \to Y$ une application continue d'espaces topologiques. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau sur Y. La donnée

$$X \supset U \longmapsto \varinjlim_{\substack{V \supset f(U) \\ \text{ouvert}}} \mathcal{G}(V)$$

constitue un préfaisceau sur X. Le faisceau lui associé est dit l'image reciproque de $\mathcal{G}$ par f et noté par $f^{-1}\mathcal{G}$. On a

$$(f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}.$$

Si f est de plus ouverte (i.e. elle envoie un ouvert de X à un de Y), on a $f^{-1}\mathcal{G}(U) = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{G}(f(U_\lambda))$, où U_λ sont les composantes connexes de U.

La vérification est immédiate. Revenons à notre situation $\pi: R \times S^0 \to R$. On a $\pi^{-1}B(\Omega_1 \times \{idx\infty\} \sqcup \Omega_2 \times \{-idx\infty\}) = B(\Omega_1) \oplus B(\Omega_2)$.

Définition 1.7.5 On introduira les deux faisceaux suivants sur $R \times S^0$:

-le sous-faisceau A^* de $\pi^{-1}B$ défini par $\Omega_1 \times \{+idx\infty\} \sqcup \Omega_2 \times \{-idx\infty\} \mapsto A^*(\Omega_1 \times \{+idx\infty\} \sqcup \Omega_2 \times \{-idx\infty\}) = \{f \in B(\Omega_1); S.S.f \cap \Omega_1 \times \{+idx\infty\} = \emptyset\} \oplus \{f \in B(\Omega_2); S.S.f \cap \Omega_2 \times \{-idx\infty\} = \emptyset\}$.

-le faisceau de "microfonctions" $C = \pi^{-1}B/A^*$.

Intuitivement, un élément $f \in C_{(x,\pm idx\infty)}$ est un germe d'hyperfonction en x modulo les germes qui sont micro-analytiques en $(x,\pm idx\infty)$. Pour décrire la relation entre ces faisceaux, introduisons la notion suivante:

Définition 1.7.6 Soit $\mathcal{F} \xrightarrow{h} \mathcal{G} \xrightarrow{k} \mathcal{H}$ une suite d'homomorphismes de faisceaux sur X. On dit qu'elle est exacte (en terme $\mathcal{G}$) si Im h = Ker k. Cela devient au même de dire que la suite d'espaces vectoriels induite:

$$(1.12) \qquad \mathcal{F}_x \xrightarrow{h_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{k_x} \mathcal{C}_x$$

est exacte (en $\mathcal{G}_x$) pour tout $x \in X$ (i.e. Im h_x = Ker k_x).

Notons que la suite d'espaces de sections

$$(1.13) \qquad \mathcal{F}(U) \xrightarrow{h_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{k_U} \mathcal{C}(U)$$

n'est pas nécessairement exacte, alors que l'exactitude de (1.13) pour tout U implique l'exactitude de (1.12).

En désignant par 0 le faisceau avec la seule section 0, on a une suite suivante de faisceaux sur $R \times S^0$ dont l'exactitude découle de la définition:

<u>Corollaire 1.7.7</u> $0 \to A^* \to \pi^{-1}B \to C \to 0.$

Pour mettre en relation avec des faisceaux A, B, il faut descendre sur R le long de l'application π.

<u>Définition et Lemme 1.7.8</u> Soit $f: X \to Y$ une application continue et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. La donnée

$$Y \supset V \longmapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

constitue un faisceau sur Y que l'on appelle l'image directe de $\mathcal{F}$ par f et note par $f_*\mathcal{F}$.

On a par définition $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Soit de plus $\varphi \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Désignons par $f_*\varphi$ la même section considérée comme un élément de $f_*\mathcal{F}(V)$. On a alors $\operatorname{supp} f_*\varphi = \overline{f(\operatorname{supp}\varphi)}$.

<u>Exercice</u> Quel est $\pi_*\pi^{-1}B$? $(B \oplus B)$

Notre théorème principal est le suivant.

<u>Théorème 1.7.9</u> Le préfaisceau

$$R \times S^0 \supset U \longmapsto \pi^{-1}B(U)/A^*(U)$$

est en effet un faisceau, donc égal à C(U). C est donc flasque. Soit $sp_\Omega : B(\Omega) \to \pi_* C(\Omega)$ l'homomorphisme défini par

(1.14) $B(\Omega) \ni f \longmapsto f \bmod A^*(\Omega \times \{idx\infty\}) \oplus f \bmod A^*(\Omega \times \{-idx\infty\}) \in C(\pi^{-1}(\Omega))$.

On a alors la suite exacte

(1.15) $0 \to A(\Omega) \longrightarrow B(\Omega) \xrightarrow{sp_\Omega} \pi_* C(\Omega) \to 0.$

Ainsi elle induit la suite exacte de faisceaux sur R:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \xrightarrow{sp} \pi_* C \longrightarrow 0.$$

Pour $f \in B(\Omega)$ on a les relations suivantes:

(1.16) $S.S.f = \operatorname{supp} sp(f)$, $sp(f)$ étant considéré comme un élément de $C(\pi^{-1}(\Omega))$.

(1.17) $\operatorname{supp\,sing} f = \pi(S.S.f)$.

<u>Démonstration</u> Montrons la première partie. Il suffit de considérer un ouvert de type $U = \Omega \times \{idx\infty\}$. La propriété FI est claire. Montrons FII. Soit donc $\{\Omega_\lambda\}$ un recouvrement ouvert de Ω et $f_\lambda \in B(\Omega_\lambda)$. On peut supposer qu'il est localement fini. La compatibilité de la famille $\{f_\lambda \bmod A^*(\Omega_\lambda \times \{idx\infty\})\}$ signifie que pour $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset$, $f_{\lambda\mu} = f_\mu|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} - f_\lambda|_{\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu} \in A^*(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \times \{idx\infty\})$. On obtient ainsi une famille de sections $f_{\lambda\mu} \in A^*(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \times \{idx\infty\})$ telle que

(1.18)
$$f_{\lambda\mu} = - f_{\mu\lambda},$$
$$f_{\lambda\mu} + f_{\mu\nu} + f_{\nu\lambda} = 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \cap \Omega_\nu \times \{idx\infty\}.$$

Montrons qu'il existe une famille de sections $g_\lambda \in A^*(\Omega_\lambda \times \{idx\infty\})$ telle que

$$g_\mu - g_\lambda = f_{\lambda\mu} \quad \text{sur} \quad \Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \times \{idx\infty\}.$$

Par la définition de A^* on peut supposer que $f_{\lambda\mu} = F_{\lambda\mu}(x-i0)$ avec un certain $F_{\lambda\mu} \in \mathcal{O}(U^-_{\lambda\mu})$, où $U_{\lambda\mu}$ est un voisinage complexe de $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$ et toujours $U^-_{\lambda\mu} = U_{\lambda\mu} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$. On peut alors trouver des voisinages complexes U_λ de Ω_λ tels que $U^-_\lambda \cap U^-_\mu \subset U^-_{\lambda\mu}$ et que $\{U_\lambda\}$ est un recouvrement localement fini d'un voisinage complexe U de Ω. (1.18) implique une relation pareille pour $F_{\lambda\mu}$, donc le En appliquant Lemme 1.5.2 à $\{F_{\lambda\mu};\ U^-_\lambda \cap U^-_\mu\}$ on obtient $G_\lambda \in \mathcal{O}(U^-_\lambda)$ tels que

$$G_\mu - G_\lambda = F_{\lambda\mu} \quad \text{sur} \quad U^-_\lambda \cap U^-_\mu .$$

Ainsi $g_\lambda = G_\lambda(x-i0)$ sont des éléments cherchés.

Considérons maintenant les nouvelles sections $f_\lambda - g_\lambda \in B(\Omega_\lambda)$. Par la construction elles se recollent et définissent une section f de $B(\Omega)$. Donc $f \bmod A^*(\Omega \times \{idx\infty\})$ est la section globale cherchée de $\pi^{-1}B(\Omega \times \{idx\infty\}) / A^*(\Omega \times \{idx\infty\})$. Le fait que C est flasque découle de là et de la flascité de B.

Démontrons maintenant l'exactitude de (1.15). C'est banal en terme B. Donc il reste à démontrer la surjectivité de sp. Soit $f \in C(\pi^{-1}(\Omega))$. En vertu de ce qui est démontré ci-dessus, il existe $g, h \in B(\Omega)$ tels que

$$g \bmod A^*(\Omega \times \{idx\infty\}) = f|_{\Omega \times \{idx\infty\}},$$

$$h \bmod A^*(\Omega \times \{idx\infty\}) = f|_{\Omega \times \{-idx\infty\}}.$$

Soit $g = G_+(x+i0) - G_-(x-i0)$ et $h = H_+(x+i0) - H_-(x-i0)$. Alors l'hyperfonction $f = G_+(x+i0) - H_-(x-i0)$ est un élément ~~voulu~~ de $B(\Omega)$ solution de $sp(\cdot) = f$.

(1.16) est évident par définition. Notons que supp sing f n'est autre que le support de la section $f \bmod A$ de B/A sur Ω. On voit donc que

$$\text{supp sing } f = \text{supp}\, \pi_* sp(f) = \pi(\text{supp } sp(f)) = \pi(S.S.f),$$

où on a considéré $sp(f)$ comme un élément de $C(\pi^{-1}(\Omega))$ ($\pi_* sp(f) \in \pi_* C(\Omega)$ et distingué avec la section correspondante). C.Q.F.D.

<u>Exercice</u> Montrer que $B/A(\Omega) = B(\Omega)/A(\Omega)$.