A. KANEKO

Chapitre III. Hyperfonctions de plusieurs variables

Cours de l'institut Fourier, tome 12 (1977-1978), p. 49-84
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__12__49_0>

CHAPITRE III. HYPERFONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1. Définition intuitive

Dans ce chapitre nous donnerons des explications intuitives sur la manoeuvre des hyperfonctions de plusieurs variables. Cependant la décriture sera logique à partir de quelques théorèmes fondamentaux supposés au début. Ceux-ci seront démontrés aux chapitres V, VI.

Les exemples les plus simples de fonctions de plusieurs variables peuvent s'obtenir comme le produit de fonctions d'une variable; par exemple on a

$$\frac{1}{x_1+i0}\cdots\frac{1}{x_n+i0}.$$

Cette fonction est considérée comme la limite symbolique de la fonction $1/z_1\dots z_n$ holomorphe dans le coin $R^n+i\{y_1>0,\dots,y_n>0\}$. On a encore

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \delta(x_1)\dots\delta(x_n) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{-2\pi i}\left(\frac{1}{x_j+i0}-\frac{1}{x_j-i0}\right)\\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^n}\sum_{\sigma}\frac{\sigma_1\cdots\sigma_n}{(x_1+i\sigma_1 0)\dots(x_n+i\sigma_n 0)}\end{aligned}$$

où $\sigma_j=\pm 1$. $\delta(x)$ est ainsi donné comme la somme de la limite des fonctions holomorphes dans plusieurs coins $R^n+i\Gamma_\sigma$, où $\Gamma_\sigma=\{y\in R^n;\ \sigma_1 y_1>0,\dots,\sigma_n y_n>0\}$.

<u>Définition 3.1.1</u> Soit $F_j(z)$ holomorphe dans un coin infinitésimal $\Omega+i\Gamma_j 0$, $j=1,\dots,N$. Une somme symbolique de la forme

$$(3.1)\qquad \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0)$$

(expression valeurs au bord) sera dite une hyperfonction sur Ω. Si $F_j(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_j 0)$, $j=1,2$ et $\Gamma_1\cap\Gamma_2\neq\emptyset$, on définit l'addition par

$$F_1(x+i\Gamma_1 0)+F_2(x+i\Gamma_2 0)=(F_1+F_2)(x+i\Gamma_1\cap\Gamma_2 0).$$

Une hyperfonction (3.1) sera dite nulle si une série de tels calculs (réunion et décomposition des termes) réduit l'expression à la trivialité.

Notons que l'on prend la limite vers le tranchant du coin. Donc en vertu de Corollaire 2.2.7 il suffit de considérer les coins infinitésimals où Γ est convexe. On en supposera dorénavant sans le préciser.

Soit $B(\Omega)$ la totalité d'hyperfonctions sur Ω. Pour $\Omega' \subset \Omega$, l'application de restriction $F(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma 0) \longmapsto F(z)\big|_{\Omega' + i\Gamma 0}$ induit de façon naturelle celle de $B(\Omega) \to B(\Omega')$. On démontrera ultérieurement le

<u>Théorème 3.1.2</u> La donnée $\Omega \longmapsto B(\Omega)$ constitue un faisceau flasque sur R^n. Le faisceau de fonctions analytiques réelles $\Omega \longmapsto A(\Omega)$ est considéré comme un sous faisceau par le plongement

$$A(\Omega) \ni \varphi(x) \longmapsto \varphi(x+i\Gamma 0),$$

où Γ est un cône ouvert convexe quelconque. (même R^n).

<u>Remarque</u> On verra ultérieurement qu'en effet pour donner l'espace $B(\Omega)$ il suffit d'utiliser quelques coins fixes, par exemple $\Omega + i\Gamma_\sigma$, où $\Gamma_\sigma = \{y \in R^n;\ \sigma_j y_j > 0\}$. De plus le coin infinitésimal n'est pas une notion intrinsèque (il faudrait faire varier Γ le long du point $x \in \Omega$). On l'emploie ici pour la raison de comodité.

Par ce théorème on peut définir le support et le support singulier d'une hyperfonction juste à la même façon que le cas d'une variable. Mais pratiquement la définition ci-dessus ne permet même pas de déterminer si $f = 0$ dans une sous résion. On démontrera aussi le

<u>Lemme 3.1.3</u> Supposons que l'hyperfonction $f(x) \in B(\Omega)$ peut se représenter par une seule limite $F(x+i\Gamma 0)$. Alors elle est nulle (resp. analytique réelle) si et seulement si la fonction $F(z)$ est nulle (resp. se prolonge analytiquement sur l'axe réel Ω).

<u>Exemple 3.1.4</u>

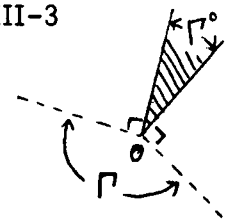
$$\operatorname{supp}\left(\frac{1}{x_1+i0} \cdots \frac{1}{x_n+i0}\right) = R^n$$

$$\operatorname{supp\,sing}\left(\frac{1}{x_1+i0} \cdots \frac{1}{x_n+i0}\right) = \{x_1=0\} \cup \ldots \cup \{x_n=0\}$$

$$\operatorname{supp} \delta(x) = \operatorname{supp\,sing} \delta(x) = \{0\}.$$

Pour le dernier exemple l'inclusion $\supset$ n'est pas encore évidente. On le vérifiera au cours du développement de l'exposé.

Comme dans le cas d'une variable, on peut mesurer l'analyticité directionnelle. Intuitivement $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$ deviendra de plus en plus analytique



lorsque Γ s'étend.

Définition 3.1.5 Pour un cone Γ on définit son dual par

$$\Gamma^\circ = \{\xi \in R^n ; \langle \xi, y \rangle \leq 0 \text{ pour tout } y \in \Gamma\}.$$

Si Γ est ouvert Γ° est l'ensemble des demi espaces de R^n qui ne coupent pas Γ (et le vecteur 0).

Mesurons l'analyticité de l'hyperfonction $\Gamma(x+i\Gamma 0)$ par Γ°. Γ° est un cône convexe fermé et se réduit à $\{0\}$ si $\Gamma = R^n$. Puisque la longueur de vecteurs n'a pas d'importance, l'ensemble $\Gamma^\circ \cap S^{n-1}$ est plus convenable à considérer. La normalisation de longueur à 1 étant annuyeux, on considérera plutôt $\Gamma^\circ \cap S^{n-1}_\infty$ et on le notera par $\Gamma^\circ\infty$ par l'abus de notation. Si Γ est un demi espace, Γ° se réduit à une demi-droite, donc $\Gamma^\circ\infty$ se réduit à un point. Puisqu'il n'y a que R^n comme un cône convexe plus grand que le demi espace, cela serait un élément minimum du spectre singulier.

Si on considère $R^n + i\Gamma$ au lieu de Γ et la forme $\mathrm{Re}\langle \frac{1}{i}\xi, z \rangle$ (Re$\langle \cdot,\cdot \rangle$ étant le produit scalaire euclidien de $C^n = R^{2n}$) au lieu de $\langle \xi, y \rangle$, $\frac{1}{i}\Gamma^\circ\infty$ sera le sous ensemble de vecteurs conormaux de $R^n \subset C^n$ formé des vecteurs d'appui extérieurs de $R^n + i\Gamma$. On aura donc la

Définition 3.1.6 Soit $f(x)$ une hyperfonction sur Ω. On dit que $f(x)$ est micro-analytique en $(x, \frac{1}{i}\xi\, dx\infty) \in R^n \times \frac{1}{i} S^{*n-1}_\infty$ si elle admet au voisinage de x une expression valeurs au bord (3.1) telle que $\Gamma_j \cap \{\langle \xi, y \rangle > 0\} \neq \emptyset$ pour tout j, où intuitivement si $f(x)$ admet le prolongement analytique quelque part dans $\{z \in C^n ; \mathrm{Re}\langle \frac{1}{i}\xi, z \rangle > 0\}$. Le complémentaire de l'ouvert où f est micro-analytique est dit le spectre singulier de f et noté par S.S.f.

Considérons par exemple $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$. On a par définition $S.S.f \subset \Omega \times \frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\infty$. On démontrera ultérieurement la réciproque suivante:

Théorème 3.1.7 Soit Γ un cône convexe ouvert. Si $S.S.f \subset \Omega \times \frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\infty$, il existe un coin infinitésimal $\Omega + i\Gamma 0$ et une fonction holomorphe $F(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma 0)$ telle que $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$. (L'assertion est aussi vraie pour $\Gamma = R^n$.)

On a la relation entre S.S.f et supp sing f pareille au cas d'une variable:

<u>Théorème 3.1.8</u> Soit π: $R^n \times \frac{1}{i} S_\infty^{*n-1} \longrightarrow R^n$ la projection. On a

(3.2) $\quad \pi(\text{S.S.}f) = \text{supp sing } f.$

En particulier, f est analytique réelle au voisinage de x si et seulement si f n'a aucun point de spectre singulier sur la fibre $\{x\} \times \frac{1}{i} S_\infty^{*n-1}$.

<u>Démonstration</u> Comparons le complémentaire des deux membres. Alors $\subset$ est clair par définition. La réciproque découle du cas $\Gamma = R^n$ du Théorème 3.1.7. C.Q.F.D.

Par ce théorème on peut renforcer le critère dans Lemme 3.1.3:

<u>Corollaire 3.1.9</u> (théorème en tranchant du coin cohomologique) Soit Γ un cône convexe ouvert. Supposons que $F_+(x+i\Gamma 0) - F_-(x-i\Gamma 0) = 0$ sur Ω. Alors $F_\pm(z)$ se rattachent comme une fonction holomorphe sur le tranchant Ω.

<u>Démonstration</u> Le spectre singulier de l'hyperfonction

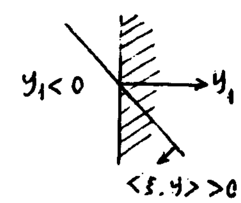
$$F_+(x+i\Gamma 0) = F_-(x-i\Gamma 0)$$

étant contenu dans $\Omega \times \frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\infty \cap \Omega \times (-\frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\infty) = \emptyset$, celle-ci est analytique réelle. Donc en vertu du Lemme 3.1.3 $F_\pm(z)$ se prolongent sur Ω, ainsi définissent une fonction analytique réelle $F_+(x) - F_-(x)$. D'après le Théorème 3.1.2 elle s'accorde avec l'hyperfonction donnée $F_+(x+i\Gamma 0) - F_-(x-i\Gamma 0) = 0$, donc s'annule comme une fonction analytique réelle. C.Q.F.D.

<u>Exemple 3.1.10</u> $\text{S.S.}\frac{1}{x_1+i0} = \{x_1 = 0\} \times \{-\frac{1}{i} dx_1 \infty\}$

$$\text{S.S.}\left(\frac{1}{x_1+i0} + \frac{1}{x_2+i0}\right) = \{x_1=0\} \times \{-\tfrac{1}{i} dx_1\infty\} \cup \{x_2=0\} \times \{-\tfrac{1}{i} dx_2\infty\}$$

$$\text{S.S.}\ \frac{1}{x_1+i0}\,\frac{1}{x_2+i0} = \{x_1=0\} \times \{-\tfrac{1}{i} dx_1\infty\} \cup \{x_2=0\} \times \{-\tfrac{1}{i} dx_2\infty\}$$
$$\cup \{x_1=x_2=0\} \times \{-\tfrac{1}{i}(\lambda dx_1 + (1-\lambda) dx_2)\infty\ ;\ 0 \le \lambda \le 1\}.$$



(Ici on a écrit $\frac{1}{x_1+i0}$ au lieu de $\frac{1}{z_1}\Big|_{z\mapsto x+i\{y_1>0\}0}$, $\frac{1}{x_1+i0} + \frac{1}{x_2+i0}$ au lieu de $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\Big|_{z\mapsto x+i\Gamma_{(+1,+1)}0}$ et $\frac{1}{x_1+i0}\,\frac{1}{x_2+i0}$ au lieu de $\frac{1}{z_1 z_2}\Big|_{z\mapsto x+i\Gamma_{(+1,+1)}0}$. Les dernières deux notations seront justifiées tout à l'heure.)

Dans tous les cas l'inclusion au sens $\subset$ est claire. L'inclusion réciproque pour le premier exemple découle du Théorème 3.1.8, d'où celle pour le deuxieme. La vérification du troisième sera achevée au cours de la discussion ultérieure. Notons qu'on a toujours au moins une estimation suivante:

Lemme 3.1.11 Soit $f(x) = F(x+i\Gamma 0)$. Supposons que $F(z)$ ne peut pas se prolonger au dela de la frontière de la section $x+i\Gamma 0$ du coin infinitésimal. On a alors

$$\widehat{S.S.f\big|_{\{x\}\times\frac{1}{i}S_\infty^{*n-1}}} = \{x\}\times\frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\infty.$$

Ici et dorénavant pour une partie $A\subset S_\infty^{*n-1}$ $\hat{A}$ désigne l'enveloppe convexe de A par les grands cercles, i.e. l'enveloppe convexe au niveau du cône qui represente A. On utilisera également la même notation pour une partie A de $R^n\times\frac{1}{i}S_\infty^{*n-1}$ pour indiquer l'opération d'enveloppe convexe en chaque fibre au sens ci-dessus.

Démonstration Il suffit de démontrer que tout point $(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty)$ à la frontière de $\{x\}\times\frac{1}{i}\Gamma^\circ dx\infty$ est contenu dans S.S.f. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty)\notin S.S.f$. Il existe alors un cône convexe ouvert $\Delta\supset\Gamma$ et un voisinage Ω de x tels que $\xi\in\Gamma^\circ\setminus\Delta^\circ$ et que $S.S.f\big|_{\Omega\times\frac{1}{i}S_\infty^{*n-1}}\subset\Omega\times\frac{1}{i}\Delta^\circ dx\infty$. (Notons que pour un cône convexe ouvert Γ on a $(\Gamma^\circ)^\circ = \overline{\Gamma}$.) D'après le Théorème 3.1.7 il existe $G(z)\in\mathcal{O}(\Omega+i\Delta 0)$ tel que $f|_\Omega = G(x+i\Delta 0)$. On a donc $(F-G)(x+i\Gamma 0) = 0$ sur Ω et en vertu du Lemme 3.1.3 on conclut que $F(z) = G(z)$. $F(z)$ ayant ainsi un prolongement, cela contredit l'hypothèse. C.Q.F.D.

2. Opérations

Définissons maintenant les opérations fondamentales sur les hyperfonctions.

1° Opération C-vectorielle. Pour $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$, $g(x) = \sum G_k(x+i\Delta_k 0)$ et $\lambda,\mu\in C$ on a par définition

$$\lambda f(x) + \mu g(x) = \sum\lambda F_j(x+i\Gamma_j 0) + \sum\mu G_k(x+i\Delta_k 0).$$

Eventuellement les termes se réuniront par morceaux pour simplifier l'expression.

Exercice (3.3) $\overline{S.S.f\cup S.S.g\setminus S.S.f\cap S.S.g}\subset S.S.(f+g)\subset S.S.f\cup S.S.g.$

(La deuxième inclusion est banale. La première découle en l'appliquant à $f = (f+g) - g$.)

2° Multiplication par une fonction analytique réelle. Soit $\varphi(x) \in A(\Omega)$ et soit $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$. On a par définition

$$\varphi(x)f(x) = \sum(\varphi F_j)(x+i\Gamma_j 0).$$

3° Dérivation Soit $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$. On a par définition

$$\partial^\alpha f(x) = \sum(\partial^\alpha F_j)(x+i\Gamma_j 0).$$

En somme on peut faire opérer un opérateur aux dérivées partielles linéaires à coefficients analytiques réels. Il est clair qu'il définit un homomorphisme de faisceau B et de plus il n'augmente pas le spectre singulier de l'hyperfonction à laquelle il opère.

Pour introduire des opérations plus avancées, il faut préparer un grand théorème:

Théorème 3.2.1 Soit $f \in B(\Omega)$ tel que $S.S.f \subset F_1 \cup F_2$, réunion des fermés de $R^n \times \frac{1}{i}S^{*n-1}_\infty$. Alors il existe $f_1, f_2 \in B(\Omega)$ tels que

$$f = f_1 + f_2, \quad S.S.f_1 \subset F_1, \quad S.S.f_2 \subset F_2.$$

En particulier, cette décomposition a lieu avec S.S. remplacé par supp sing.

En le combinant avec le Théorème 3.1.7 et le Lemme 3.1.3 on obtient le

Corollaire 3.2.2 Soit $f \in B(\Omega)$ tel que

$$S.S.f \subset \Omega \times \frac{1}{i}\Gamma_1^\circ dx\infty \cup \ldots \cup \Omega \times \frac{1}{i}\Gamma_N^\circ dx\infty,$$

où Γ_j sont des cônes convexes ouverts. Il existe alors $F_j(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma_j 0)$ tels que

$$f(x) = F_1(x+i\Gamma_1 0) + \ldots + F_N(x+i\Gamma_N 0)$$

et que $F_j(z)$ se prolonge analytiquement au voisinage de $x \in \Omega$ satisfaisant à $S.S.f \cap \{x\} \times \frac{1}{i}\Gamma_j^\circ dx\infty = \emptyset$ (donc en particulier au point x où $f(x)$ est analytique réel).

La démonstration du Théorème 3.2.1 sera donnée vers la fin de ce cours.

4° Produit des hyperfonctions Soient $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ et $g(x) =$

$\sum G_k(x+i\Delta_k 0)$. On serait obligé de définir comme suit:

(3.4) $f(x)g(x) = \sum_{j,k} F_j(x+i\Gamma_j 0)G_k(x+i\Delta_k 0) = \sum_{j,k}(F_jG_k)(x+i\Gamma_j\cap\Delta_k 0).$

Pour que la définition ait un sens il faut avoir une expression telle que $\Gamma_j\cap\Delta_k \neq \emptyset$ pour tout couple j, k. Pour décrire cette condition en termes de spectre singulier introduisons la

<u>Définition 3.2.3</u> de l'application antipodale:

$$\begin{array}{cccc} a: & R^n\times\frac{1}{i}S^{*n-1}_\infty & \longrightarrow & R^n\times\frac{1}{i}S^{*n-1}_\infty \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,\frac{1}{i}\xi\,dx\infty) & \longmapsto & (x,-\frac{1}{i}\xi\,dx\infty) \end{array}$$

On désignera l'image d'une partie $A\subset R^n\times\frac{1}{i}S^{*n-1}_\infty$ par a par A^a.

<u>Théorème 3.2.4</u> Supposons que

(3.5) $S.S.f\cap(S.S.g)^a = \emptyset.$

Dans ce cas on peut définir le produit $f\cdot g$. On a $fg = gf$ et

(3.6) $S.S.fg \subset \widehat{S.S.f\cup S.S.g},$

où $\frown$ désigne l'enveloppe convexe par rapport aux grands cercles dans chaque fibre.

<u>Démonstration</u> Il suffit de définir le produit localement. Donc en choisissant une décomposition suffisamment fine de S.S.f resp. S.S.g on peut supposer que $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$, $g(x) = \sum G_k(x+i\Delta_k 0)$ où $\Gamma_j^\circ\cap -\Delta_k^\circ = \emptyset$ pour chaque couple j, k (Corollaire 3.2.2). Or on a l'équivalence suivante:

$$\begin{aligned} \Gamma_j^\circ\cap -\Delta_k^\circ = \emptyset &\iff \text{Il n'y a pas de } \xi \text{ tel que } \xi\in\Gamma_j^\circ,\ -\xi\in\Delta_k^\circ \\ &\iff \text{Il n'y a pas d'hyperplan qui sépare } \Gamma_j \text{ de } \Delta_k \\ &\iff \Gamma_j\cap\Delta_k\neq\emptyset. \end{aligned}$$

Notons que

$$S.S.fg \subset \bigcup_{j,k}\Omega\times\frac{1}{i}(\Gamma_j\cap\Delta_k)^\circ\,dx\infty.$$

Or on a la formule élementaire comme suit:

$$(\Gamma_j\cap\Delta_k)^\circ = \widehat{\Gamma_j^\circ\cup\Delta_k^\circ},$$

La commutativité du produit est banale.

d'où, en raffinant la décomposition, on obtient (3.6). Finalement le fait que le résultat du produit ne dépend pas de la décomposition découle du lemme suivant:

<u>Lemme 3.2.5</u> Soient Γ_j, $j=1,\ldots,N$, des cônes convexes ouverts et $F\subset S^{n-1}$ un fermé tels que $\Gamma_j^\circ \cap F = \emptyset$ pour tout j. Supposons que $\sum F_j(x+i\Gamma_j 0) = 0$. Alors il existe un procédé de réduction de cette expression à zéro tel que y participent seulement des coins infinitésimals $\Omega+i\Gamma 0$ ayant la propriété $\Gamma^\circ\cap F = \emptyset$.

En effet ce lemme admis le calcul de réduction pour la somme $\sum_j F_j(x+i\Gamma_j 0)$ induira celui pour $\sum_j (F_jG_k)(x+i\Gamma_j\cap\Delta_k 0)$ pour k fixe, ainsi montrant l'unicité du résultat.

I-8 bis

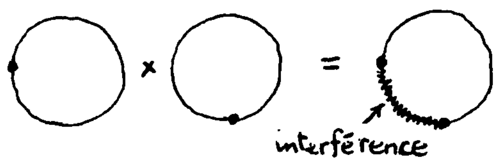
<u>Remarque</u> Pour l'exemple $\frac{1}{x_1+i0}\,\frac{1}{x_2+i0}$ déjà vu on a l'égalité dans (3.6). Mais ce n'est pas vrai en général. Contre-exemple: Posons

$$F(z_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(2k)!z_1}, \quad G(z_2) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(2\ell+1)!z_2}$$

Ils sont holomorphes dans le demi plan supérieur, ainsi définissent les hyperfonctions $F(x_1+i0)$, $G(x_2+i0)$. On a la décomposition suivante:

$$F(z_1)G(z_2) = \sum_{k>\ell} e^{2\pi i\{(2k)!z_1+(2\ell+1)!z_2\}} + \sum_{k\le\ell} e^{2\pi i\{(2k)!z_1+(2\ell+1)!z_2\}}$$

où le premier terme resp. le second dans le second membre sont holomorphes dans un coin infinitésimal $R^2+i\{y_1>0\}0$ resp. $R^2+i\{y_2>0\}0$. On a donc $S.S.F(x_1+i0)G(x_2+i0) \subset \{x_1=0\}\times\{-\frac{1}{i}dx_1\infty\}\cup\{x_2=0\}\times\{-\frac{1}{i}dx_2\infty\}$ (absence de l'interférence!).



<u>5° Intégrale définie</u> Soit $\Omega\subset R^n$ un ouvert et soit $K\subset\Omega$ un compact à frontière régulière par morceaux. Supposons que $f(x)\in B(\Omega)$ est analytique réel au voisinage de ∂K. Alors on peut définir l'intégrale définie $\int_K f(x)dx$. (En effet dans ce cas la régularité de ∂K n'est pas nécessaire, car l'intégrale sera bien définie au voisinage de ∂K comme celle pour une fonction sommable au sens ordinaire.) Prenons pour cela une décomposition $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ d'après le Corollaire 3.2.2 de façon que chaque $F_j(z)$ soit analytique au voisinage de ∂K. Choisissons une application continue et régulière par morceaux $\varepsilon_j(x)$ telle que

$$\begin{cases} \varepsilon_j(x) = 0 & \text{pour } x\in\partial K \\ x+i\varepsilon_j(x)\in R^n+i\Gamma_j 0 & \text{pour } x\in \mathrm{Int}(K). \end{cases}$$

Démonstration du Lemme 3.2.5 à des parties fermées Soit $E = \bigcup \Gamma_j^\circ$ et soit $E = \bigcup E_k$ une décomposition réduite de E de sorte que l'on a $E_k \cap E_\ell \subset \partial E_k \cap \partial E_\ell$ pour $k \neq \ell$. Il existe alors un cône convexe ouvert Δ_k tel que $\Delta_k^\circ = \widehat{E_k}$, $G_k(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Delta_k 0)$ tel que $S.S.G_k(x+i\Delta_k 0) \subset \Omega \times \frac{1}{i} E_k dx\infty$ et que $\sum G_k(x+i\Delta_k 0)$ soit une modification admissible de $\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$. En effet ce procédé est achevé par une série de calculs suivants: Soient, par exemple, $\Gamma_1^\circ \cap \Gamma_2^\circ = E_2$ et $\overline{\Gamma_1^\circ \setminus E_2} = E_1$. D'après le Théorème 3.2.1 il existe $g_k(x) \in B(\Omega)$, $k=1,2$ tels que $S.S.g_k \subset \Omega \times \frac{1}{i} E_k dx\infty$ et que $g_1 + g_2 = F_1(x+i\Gamma_1 0)$. D'après le Théorème 3.1.7 il existe $G_k(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Delta_k 0)$ tels que $G_k(x+i\Delta_k 0) = g_k(x)$, d'où la décomposition

$$F_1(x+i\Gamma_1 0) = G_1(x+i\Delta_1 0) + G_2(x+i\Delta_2 0).$$

Puisque l'on a a fortiori $G_k(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma_1 0)$, cette décomposition est induite, d'après le Lemme 3.1.3, par celle $F_1(z) = G_1(z) + G_2(z)$ sur $\mathcal{O}(\Omega + i\Gamma_1 0)$, ce qui est certainement admissible.

Considérons donc $\sum G_k(x+i\Delta_k 0) = 0$. L'égalité

$$G_1(x+i\Delta_1 0) = -\sum_{k\geq 2} G_k(x+i\Delta_k 0)$$

montre que $S.S.G_1(x+i\Delta_1 0) \subset \Omega \times \frac{1}{i} \bigcup_{k\geq 2} E_k dx\infty$.

Donc si $E_1 \cap E_k \neq \emptyset$ pour certain $k \neq 1$, on peut décomposer $G_1(x+i\Delta_1 0)$ comme ci-dessus à une somme avec des termes dont le S.S. est contenu resp. dans $\Omega \times \frac{1}{i} E_1 \cap E_k dx\infty$, $k \geq 2$. En modifiant $G_k(z)$ par ces termes on peut donc supprimer la partie E_1. Si E_1 est disjoint des autres E_k, cela signifie en vertu du Théorème 3.1.8 que $G_1(x+i\Delta_1 0)$ est analytique réel, donc en vertu du Lemme 3.1.3 que $G_1(z)$ se prolonge sur Ω. Donc on peut aussi modifier $G_k(z)$ pour supprimer E_1.

Procédant ainsi, on peut remplacer $\bigcup E_k$ par $\bigcup_{k,\ell} E_k \cap E_\ell$, et puis par $\bigcup_{k,\ell,m} E_k \cap E_\ell \cap E_m$ etc. et finalement par $\emptyset$. Ceci signifie qu'il n'y reste plus de termes. C.Q.F.D.

Par le même truc on pourrait démontrer dans certains cas $\sum F_j(x+i\Gamma_j 0) = 0$ en vérifiant $S.S.(\sum F_j(x+i\Gamma_j 0)) = \emptyset$.

On définit alors comme suit:

$$\int_K f(x)dx = \sum \int_K F_j(x+i\mathcal{E}_j(x))d(x+i\mathcal{E}_j(x)),$$

où $d(x+i\mathcal{E}_j(x))$ est l'abréviation de l'élément de volume sur ce chemin; si $\mathcal{E}_j(x) = (\mathcal{E}_{j1}(x),\ldots,\mathcal{E}_{jn}(x))$ est régulier, on a $d(x+i\mathcal{E}_j(x)) = \det\left(I + i\frac{\partial \mathcal{E}_{jk}(x)}{\partial x_l}\right) dx_1\ldots dx_n$. En vertu du théorème de Poincaré, l'intégrale ne dépend pas du choix de $\mathcal{E}_j(x)$. Mais le fait qu'elle ne dépend pas de la décomposition n'est pas évident, car on utilise une expression valeurs au bord globale pour définir l'intégrale tandis que l'équivalence de deux expressions a été définie de façon locale. On le démontrera après qu'on aura donné une autre définition de l'intégrale.

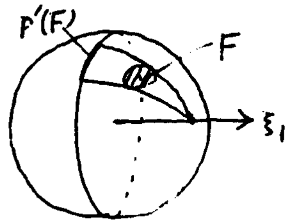
Dans le cas où K est un n-rectangle $[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ on peut utiliser un chemin du type produit: $\mathcal{E}_j(x) = (\mathcal{E}_{j1}(x_1),\ldots,\mathcal{E}_{jn}(x_n))$, où chaque $\mathcal{E}_{jk}(x_k)$ est une fonction continue et régulière par morceaux telle que $x_k+i\mathcal{E}_{jk}(x_k)$ relie a_k à b_k de la manière que $x+i\mathcal{E}_j(x)\in R^n+i\Gamma_j$ pour $x_k\neq a_k$, b_k, $k=1,\ldots,n$. Ce chemin sera plus élémentaire puisque l'on peut le comprendre seulement au niveau du théorème de Cauchy. En vertu du Théorème 3.2.1 on peut décomposer le support singulier de f de sorte que l'on peut toujours ramener l'intégrale à une somme finie d'intégrales de ce type. Pour le produit du type général $K = K_1\times K_2$ on peut également choisir un chemin du type produit. Notons que cette sorte de chemin n'est pas contenue dans la construction ci-dessus, car là on a toujours fixé toute la frontière ∂K.

Pour une hyperfonction $f(x)$ à support compact on peut définir $\int_{R^n} f(x)dx$ en choisissant un ouvert $D\supset K$ à frontière régulière par morceaux comme l'intégrale $\int_D f(x)dx$ dans le sens ci-dessus. Le résultat, comme on l'espère ne dépend pas de D. En effet, on peut appliquer la définition de la dernière intégrale avec $F_j(z)$ analytiques sur $R^n\setminus K$. Alors la somme de $F_j(x+i\Gamma_j 0)$ s'annule comme des fonctions analytiques en dehors de K. D'autre part on peut choisir le chemin d'intégrale sur l'axe réel au voisinage de ∂D. Donc l'intégrale au voisinage de ∂D s'annule au sens ordinaire et le résultat ne dépend pas de D . On définira plus tard un plongement canonique ι de $L_{1,loc}$ (ou D') dans B compatible avec les opérations élémentaires. En particulier, pour une fonction à support compact $f(x)$ on aura $\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} \iota(f)dx$. Soit de plus $f(x)$ encore une hyperfonction qui est analytique réelle au voisinage de ∂K . Soit χ_K la fonction caractéristique de K . Alors $\chi_K(x)$, donc $\chi_K(x)f(x)$ sera bien défini dans ce sens comme une hyperfonction. On verra ultérieurement que l'intégrale définie $\int_K f(x)dx$ s'accorde avec $\int_{\mathbf{R}^n} \chi_K(x)f(x)dx$ dans ce sens-ci. (Ce fait n'est pas si évident qu'il apparaît, car cela contient le changement de l'expression valeurs au bord.)

6° Restriction Une telle substitution quelle $x_1 = 0$ sera possible seulement si $f(x)$ est régulière en x_1 dans un sens au voisinage de $x_1 = 0$.

Définition 3.2.6 On dit que $f(x)$ contient x_1 comme un paramètre analytique réel au voisinage d'un point x si $(x, \pm\frac{1}{i}dx_1\infty) \notin S.S.f.$

Théorème 3.2.7 Supposons que $f(x)$ contient x_1 comme un paramètre analytique réel en 0. On peut alors définir la restriction $f|_{x_1=0}$ au voisinage de 0 et on a



(3.7) $\quad S.S.(f|_{x_1=0}) \subset p'(S.S.f \cap \{x_1 = 0\}),$

où p' désigne la projection en fibre le long des grands cercles à partir des pôles $(\pm 1, 0, \ldots, 0)\infty$:

$$p' : S^{n-1}_{\infty} \setminus \{(\pm 1, 0, .., 0)\infty\} \to S^{n-2}_{\infty}$$
$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\infty \mapsto (\xi_2, \ldots, \xi_n)\infty.$$

Par hypothèse p' est bien défini sur $S.S.f$ au voisinage de la fibre sur 0.

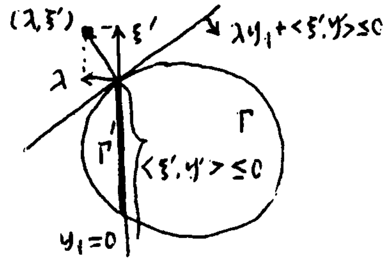
Démonstration En vertu du Corollaire 3.2.2 on a une expression comme suit au voisinage de 0:

(3.8) $\quad f(x) = \sum F_j(x + i\Gamma_j 0), \quad$ où $\Gamma_j^{\circ} \not\ni (\pm 1, 0, \ldots, 0).$

Cette condition-ci signifie que l'hyperplan $y_1 = 0$ coupe Γ_j. Donc on n'a qu'à définir par

$$f(x)|_{x_1=0} = \sum F_j|_{z_1=0}(x' + i\Gamma_j' 0), \quad \text{où } \Gamma_j' = \Gamma_j \cap \{y_1 = 0\}.$$

D'après le lemme 3.2.5 la nullité de (3.8) comme une hyperfonction implique l'existence d'un procédé de la réduction de son expression à la trivialité conservant la condition de (3.8). Donc ce procédé induira celui pour $\sum F_j|_{z_1=0}(x'+i\Gamma_j'0)$, ainsi démontrant l'indépendance du résultat de la restriction de son expression utilisée. Enfin pour montrer (3.7) il suffit de vérifier une assertion élémentaire comme suit:



$$(\Gamma|_{y_1=0})^\circ = p'(\Gamma^\circ).$$

On a

$$\xi'\in(\Gamma|_{y_1=0})^\circ \iff \text{pour } \forall y'\in\Gamma|_{y_1=0},\ \langle\xi',y'\rangle\le 0$$
$$\iff \exists\lambda \text{ tel que pour } \forall y\in\Gamma,\ \lambda y_1+\langle\xi',y'\rangle\le 0. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Notons que l'on n'a pas nécessairement l'égalité dans (3.7). En effet on a $x_1/(x_2+i0)|_{x_1=0} = 0$ tandis que $S.S.x_1/(x_2+i0) = S.S.1/(x_2+i0)$ contient $(0,-\frac{1}{i}dx_2\infty)$.

Théorème 3.2.7 peut être généralisé sans difficulté au cas de la restriction par rapport à plusieurs paramètres que l'on citera dorénavant par <u>Théorème 3.2.7bis</u>: Soit $f(x,t)$ une hyperfonction de $n+m$ variables définie au voisinage de 0. On dit que $f(x,t)$ contient t comme paramètres analytiques réels en 0 si $\{(0,\frac{1}{i}\theta dt\infty);\ \theta\in S^{m-1}\}\cap S.S.f = \emptyset$. Dans ce cas $f(x,t)|_{t=0}$ est bien défini au voisinage de 0; On peut procéder exactement comme ci-dessus. On a l'estimation pareille à (3.7):

$$(3.9)\qquad S.S.(f(x,t)|_{t=0})\subset p_{dx}(S.S.f\cap\{t=0\})$$
$$= \{(x,\tfrac{1}{i}\xi\,dx\infty)\ ;\ \exists\theta\in R^m \text{ tel que } ((x,0);\tfrac{1}{i}(\xi dx+\theta dt)\infty)\in \underbrace{\ }_{S.S.f(x,t)}\},$$

où p_{dx} désigne la projection suggérée dans la deuxième ligne. On a également

$$f(x,t)|_{t=0} = f(x,t)|_{t_1=0}|_{t_2=0}\cdots|_{t_m=0},$$

l'ordre de la restriction étant changeable. D'où par l'usage répété de (3.7) on regagnera (3.9).

<u>7° Intégration par rapport aux paramètres</u> est plus importante que l'intégrale définie. Soit $f(x,t)$ une hyperfonction sur $\Omega\times T\subset R^{n+m}$ et soit $K\subset T$ un compact à frontière régulière par morceaux. Supposons que f est analytique réel au voisinage de $\Omega\times\partial K$.

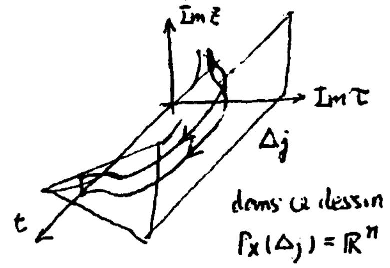
<u>Théorème 3.2.8</u> Sous ces hypothèses on peut définir $\int_K f(x,t)dt\in\mathcal{B}(\Omega)$. On a

$$(3.10)\qquad S.S.\int_K f(x,t)dt\subset p_x(S.S.f\cap\{dt=0\}),$$

où $dt = 0$ désigne le sous fibré avec la fibre $S_{\infty}^{*n-1} = \{\frac{1}{i}\xi dx\infty\} \subset \frac{1}{i} S_{\infty}^{*n+m-1}$ et $p_x : R^{n+m} \to R^n$ la projection.

Démonstration En appliquant le Corollaire 3.2.2 on obtient une expression $f(x,t) = \sum F_j((x,t)+i\Delta_j 0)$ telle que $F_j(z,\tau)$ ~~sont~~ soient holomorphes au voisinage de $\Omega \times \partial K$. Posons $\Gamma_j = p_x(\Delta_j)$. Pour tout $z \in \Omega + i\Gamma_j 0$ fixe on peut choisir une application $\varepsilon_j(t)$ continue et régulière par morceaux telle que

$$\begin{cases} \varepsilon_j(t) = 0 & \text{pour } t \in \partial K, \\ (z, t+i\varepsilon_j(t)) \in R^{n+m} + i\Delta_j 0 & \text{pour } t \in \mathrm{Int}(K). \end{cases}$$



Définissons

$$G_j(z) = \int_K F_j(z, t+i\varepsilon_j(t))\, d(t+i\varepsilon_j(t)).$$

Le résultat ne dépend pas du choix de $\varepsilon_j(t)$. Puisque l'on peut utiliser la même application $\varepsilon_j(t)$ au voisinage de z, on a $G_j(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma_j 0)$. Donc on peut définir un élément de $B(\Omega)$ par

$$\int_K f(x,t)dt = \sum G_j(x+i\Gamma_j 0).$$

Nous laissons aussi au futur la vérification du fait que le résultat ne dépende pas de l'expression. Notons que

$$S.S.\int_K f(x,t)dt \subset \bigcup_j \Omega \times \frac{1}{i}\Gamma_j^{\circ} dx\infty$$

et que

$$\Gamma_j^{\circ} = (p_x(\Delta_j))^{\circ} = \Delta_j^{\circ} \cap \{\theta = 0\}.$$

En effet on a

$$\begin{aligned} \xi \in (p_x(\Delta_j))^{\circ} &\Leftrightarrow \langle \xi, y\rangle = 0 \quad \text{pour } \forall y \in p_x(\Delta_j) \\ &\Leftrightarrow \langle(\xi,0),(y,s)\rangle = 0 \quad \text{pour } \forall (y,s) \in \Delta_j \\ &\Leftrightarrow (\xi, 0) \in \Delta_j^{\circ}. \end{aligned}$$

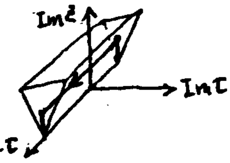
Donc (3.10) s'obtient en localisant par rapport à $x \in \Omega$ et en raffinant l'expression par rapport à Γ_j°. C.Q.F.D.

Pour définir $\int_K f(x,t)dt$, on peut affaiblir la condition sur $f(x,t)$ au voisinage de $\Omega \times \partial K$ jusqu'à la suivante:

Théorème 3.2.8bis Supposons que $f(x,t)$ contient t comme paramètres analytiques réels au voisinage de $\Omega \times \partial K$. Alors $\int_K f(x,t)dt$ est bien défini. On a

(3.11) $$S.S.\int_K f(x,t)dt \subset p_x(S.S.f \cap \{dt=0\}) \cup p_x(p_{dx}(S.S.f \cap \Omega \times \partial K \times \frac{1}{i} S_{\infty}^{*n+m-1})).$$

Démonstration En appliquant le Corollaire 3.2.2 à nouveau, on obtient une décomposition $f(x,t)=\sum F_j((x,t)+i\Delta_j 0)$, où l'on a, soit que $F_j(z,\tau)$ analytique au voisinage de $\Omega\times\partial K$, soit que $\Delta_j\cap R^n\times\{0\}\neq\emptyset$. Pour les composantes de la première espèce, on définit l'intégrale comme ci-dessus. Pour celles de la deuxiè e espèce, on pose



$$G_j(z)=\int_K F_j(z,t)dt \quad \text{pour} \quad z\in\Omega+i(\Delta_j\cap R^n\times\{0\})0.$$

Alors $G_j(z)$ définit une hyperfonction sur Ω dont le spectre singulier est contenu dans $\Omega\times\frac{1}{i}(\Delta_j\cap R^n\times\{0\})^\circ\infty$. On obtient ainsi (3.11). (Notons en effet que (3.11) est la superposition de (3.9) et de (3.10).) C.Q.F.D.

Comme dans 5° on peut définir en particulier $\int_{\mathbb{R}^m} f(x,t)dt$ pour une hyperfonction $f(x,t)$ à support dans $\Omega\times K$. Remarquons que sous l'hypothèse du Théorème 3.2.8bis on peut considérer d'après le Théorème 3.2.4 le produit $\chi_K(t)f(x,t)$. On verra ultérieurement que $\int_K f(x,t)dt = \int_{\mathbb{R}^m}\chi_K(t)f(x,t)dt$.

Pour cette définition de l'intégrale on a des régles habituels suivants:

Proposition 3.2.9 On a

$$\partial_x^\alpha\int_K f(x,t)dt = \int_K\partial_x^\alpha f(x,t)dt.$$

Si $K=K_1\times K_2$, on a, en désignant par t_1, t_2 le groupement des variables correspondant,

$$\int_K f(x,t)dt=\int_{K_2}dt_2\int_{K_1}f(x,t)dt_1 = \int_{K_1}dt_1\int_{K_2}f(x,t)dt_2.$$

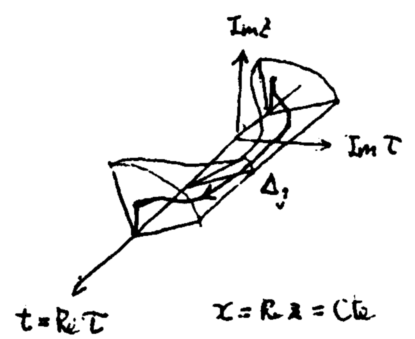
Démonstration La première formule découle de la définition de la dérivée et de la formule correspondante pour les fonctions holomorphes. La deuxième se vérifie séparément suivant l'espèce du terme F_j dans la démonstration ci-dessus. Ceci est clair pour ceux de la deuxième espèce. Pour ceux de la première espèce, on peut déformer le chemin $t+i\varepsilon_j(t)$ à un autre du type produit $(t_1+i\varepsilon_{j1}(t_1),t_2+i\varepsilon_{j2}(t_2))$, d'où l'assertion. C.Q.F.D.

Nous montrerons ultérieurement que l'on peut calculer $\int_K f(x,t)dt$ encore avec une expression $\sum F_j((x,t)+i\Delta_j 0)$ telle que $F_j(z,t)$ soit holomorphe seulement pour $(z,t)\in\Omega\times\partial K+i(\Gamma_j\times\{0\})0$, où $\Gamma_j=p_x(\Delta_j)$: On pose

$$\int_K f(x,t)dt = \sum_j\Big[\int_K F_j(z,t+i\varepsilon_j(t))\,\cancel{dt}\; d(t+i\varepsilon_j(t))\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_j 0},$$

où $\varepsilon_j(t)$ est choisi de telle manière que

$$\begin{cases}\varepsilon_j(t)=0 & \text{pour } t\in\partial K\\ (z,t+i\varepsilon_j(t))\in(x,t)+i\Delta_j 0 & \text{pour } t\in K \text{ général.}\end{cases}$$



Exemple 3.2.10 Considérons $f(x)g(t)$. Si $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ et que $g(t) = \sum G_k(t+i\Delta_k 0)$ avec $G_k(\tau)$ holomorphes au voisinage de ∂K, alors l'expression $f(x)g(t) = \sum F_j G_k((x,t)+i\Gamma_j\times\Delta_k 0)$ satisfait à la condition ci-dessus. On a donc

$$\int_K f(x)g(t)dt = \sum_{j,k}\left[\int_K F_j(z)G_k(t+i\varepsilon_k(t))d(t+i\varepsilon_k(t))\right]_{z\mapsto x+i\Gamma_j 0} = f(x)\int_K g(t)dt.$$

En particulier on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx_1 = \delta(x_2,\ldots,x_n),$$

d'où, en répétant ce calcul on obtient d'après la Proposition 3.3.9 $\int_{\mathbb{R}^n}\delta(x)dx = 1$. Ainsi $\delta(x) \neq 0$ et l'Exemple 3.1.4 est établi. Soit $\varphi(x)$ analytique réel au voisinage de 0. En écrivant $\delta(x') = \sum F_j(x'+i\Gamma_j'0)$, $x' = (x_2,\ldots,x_n)$, on a de même

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x)dx_1 = \sum_j\left[\frac{1}{2\pi i}\oint F_j(z')\frac{\varphi(z_1,z')}{z_1}\,dz_1\right]_{z'\mapsto x'+i\Gamma_j'0} = \varphi(0,x')\delta(x').$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0).$$

3. Hyperfonctions sur une variété analytique réelle.

1° Changement de coordonnées Soit $\tilde{x} = \varphi(x)\colon \Omega\mapsto\tilde{\Omega}$ un changement de coordonnées analytique réel entre les ouverts de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\det\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right)\neq 0$ sur Ω on peut le prolonger à un homéomorphisme holomorphe $\tilde{z} = \varphi(z)$ entre les voisinages complexes $V\supset\Omega$ et $\tilde{V}\supset\tilde{\Omega}$. En vertu du développement de Taylor on a

$$\tilde{z} = \varphi(z) \doteqdot \varphi(x) + d\varphi\cdot iy \quad \text{pour } y\doteqdot 0,$$

où $d\varphi$ désigne la matrice de Jacobi de φ (la dérivée de l'application φ). Donc le vecteur tangent $x+iy0$ en x va à $\varphi(x)+id\varphi y0$ en $\varphi(x)$. Pour $x\in\Omega$ fixe $d\varphi(x)$ est une application linéaire inversible, donc $d\varphi(x)\Gamma$ est encore un cône convexe ouvert. Mais il varie avec x de sorte que l'image d'un coin infinitésimal $\Omega+i\Gamma 0$ est tortue et elle n'est plus un coin infinitésimal. Néanmoins la dépendance $x\mapsto d\varphi(x)\Gamma$ est continue, donc une fonction holomorphe $F(\tilde{z})$ dans tel domaine peut encore définir une hyperfonction en se réstreignant à un vrai coin infinitésimal y contenu. Nous écrirons par abus $F(\tilde{x}+id\varphi\Gamma 0)$ pour une telle hyperfonction. Il en est de même de φ^{-1}. On a ainsi la

<u>Définition et Proposition 3.3.1</u> Pour $f(\tilde{x}) = \sum F_j(\tilde{x}+i\tilde{\Gamma}_j 0) \in B(\tilde{\Omega})$, on définit

$$\varphi^* f(x) = f(\varphi(x)) = \sum F_j(\varphi(x+id\varphi^{-1}\tilde{\Gamma}_j 0)).$$

On a

$$(3.12) \qquad S.S.\varphi^* f = (\varphi^{-1} \times {}^t d\varphi) S.S.f.$$

<u>Démonstration</u> Il reste à vérifier la dernière relation. Or on a

$$(d\varphi^{-1}\Gamma)^\circ = {}^t d\varphi \Gamma^\circ .$$

En effet

$$(3.13) \qquad \xi \in (d\varphi^{-1}\Gamma)^\circ \Leftrightarrow \langle \xi, d\varphi^{-1}\Gamma \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle {}^t d\varphi^{-1}\xi, \Gamma \rangle \leq 0 \Leftrightarrow {}^t d\varphi^{-1}\xi \in \Gamma^\circ$$
$$\Leftrightarrow \xi \in {}^t d\varphi \Gamma^\circ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Notons que le changement de coordonnées transforme l'intégrale de façon habituelle avec la valeur absolue du jacobien comme facteur. En effet, l'intégrale était définie par l'intégrale ordinaire pour les fonctions holomorphes qui obéit à la règle habituelle.

La translation $f(x) \mapsto f(x-a)$ qu'on a déjà implicitement utilisée peut être considérée comme un exemple du changement de coordonnées. Un autre exemple est l'homothétie $f(x) \mapsto f(\lambda x)$, d'où la définition d'homogénéité ou de parité pour les hyperfonctions.

<u>Exercice</u> Soit $V \subset C^n$ un ouvert. Posons $\bar{V} = \{z \in C^n; \bar{z} \in V\}$. Pour $F(z) \in \mathcal{O}(V)$ soit $\bar{F}(z)$ la fonction définie par $\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$. On a $\bar{F}(z) \in \mathcal{O}(\bar{V})$. En particulier $F(z) \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma 0) \Rightarrow \bar{F}(z) \in \mathcal{O}(\Omega - i\Gamma 0)$. En définir la conjuguée complexe $\bar{f}(x)$ d'une hyperfonction $f(x)$ et déterminer $S.S.\bar{f}$ à partir de $S.S.f$. Donner la décomposition $f(x) = \mathrm{Re}f(x) + i\mathrm{Im}f(x)$.

<u>2° Hyperfonctions dans une variété analytique réelle</u> Un espace topologique séparé M, avec la donnée de recouvrement ouvert $\{\Omega_\lambda\}$, des homéomorphismes $\varphi_\lambda : \Omega_\lambda \to R^n$ tels que, pour $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu \neq \emptyset$, $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu) \to \varphi_\mu(\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu)$ soit une application analytique réelle, est dit une variété analytique réelle de dimension n. Avec ces coordonnées on peut définir de

façon quotidienne le faisceau A de fonctions analytiques réelles sur M. De plus on peut définir aussi le faisceau B d'hyperfonctions sur M: Sur chaque ouvert Ω_λ définissons-le en rapportant celui sur $\varphi_\lambda(\Omega_\lambda)$. Sur l'intersection $\Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$ ils se relient par la transformation en Définition 3.3.1 induite par le changement de coordonnées $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$, de sorte que l'on obtient un faisceau B bien défini sur M. Le changement de coordonnées étant compatible avec le plongement $A \hookrightarrow B$, A est toujours un sousfaisceau de B. La notion de supp et de supp sing restent valable. De plus, si l'on considère les points de S.S. comme ceux dans $\frac{1}{i}S^*_\infty M$ (le fibré en cosphères de M, avec les accessoires $\frac{1}{i}$ et ∞), cette notion reste aussi bien définie. En effet la formule (3.12) signifie que les points de S.S.f comportent pour le changement de coordonnées comme ceux de S^*M.

Considérons ensuite l'intégrale définie d'hyperfonctions sur M. Notons d'abord le

<u>Lemme 3.3.2</u> Le faisceau B d'hyperfonctions sur M est flasque.

Démontrons plus généralement qu'un faisceau $\mathcal{F}$ sur M tel que $\mathcal{F}|\Omega_\lambda$ soit flasque pour tout λ, est lui-même flasque. ($\mathcal{F}|\Omega_\lambda$, la restriction de $\mathcal{F}$ sur Ω_λ, est le faisceau sur Ω_λ défini par $\Omega_\lambda \supset \Omega \to \mathcal{F}(\Omega)$.) Prenons $f \in \mathcal{F}(\Omega)$. Considérons l'ensemble des couples $(\tilde{f}, \tilde{\Omega})$ formés d'un ouvert $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ et d'un prolongement $\tilde{f} \in \mathcal{F}(\tilde{\Omega})$ de f. Il est un ensemble non vide et inductivement ordonné par l'ordre bien entendu, donc admet un élément maximal $(\tilde{f}, \tilde{\Omega})$ d'après le lemme de Zorn. Si $\tilde{\Omega} \neq M$, il existe Ω_λ tel que $\tilde{\Omega} \cap \Omega_\lambda \neq \emptyset$ et $\tilde{\Omega} \not\supset \Omega_\lambda$. Puisque $\mathcal{F}|\Omega_\lambda$ est flasque, il existe un prolongement $f_\lambda \in \mathcal{F}(\Omega_\lambda)$ de $\tilde{f}|\tilde{\Omega} \cap \Omega_\lambda$. Posons

$$\tilde{\tilde{f}} = \begin{cases} \tilde{f} & \text{sur } \tilde{\Omega} \\ f_\lambda & \text{sur } \Omega_\lambda \end{cases}$$

Alors $(\tilde{\tilde{f}}, \tilde{\Omega} \cup \Omega_\lambda)$ est un élément plus grand que $(\tilde{f}, \tilde{\Omega})$, ce qui est contradictoire. C.Q.F.D.

Soit $K \subset M$ un compact à frontière régulière (y comprise $\emptyset$). Supposons que f(x) est une hyperfonction définie au voisinage de K et analytique réelle au voisinage de ∂K. Soit dx un élément de volume analytique réel défini au voisinage de K. Alors on peut définir $\int_K f(x)dx$ de la manière suivante: On remplace d'abord cette intégrale par $\int_M \chi_K(x)f(x)dx$, de sorte que l'on peut supposer que $\operatorname{supp} f \subset K$. Puisque K est recouvert par un nombre fini de cartes de coordonnées Ω_{λ_j}, on peut prendre une décomposition $f = \sum f_j$ telle que $\operatorname{supp} f_j$ soit un compact dans Ω_{λ_j}. On pose alors

$$\int_M f(x)dx = \sum_j \int_{\Omega_{\lambda_j}} f_j(x)dx,$$

où on calcule chaque terme dans le second membre en le remportant sur $\varphi_{\lambda_j}(\Omega_{\lambda_j})$. On peut montrer de façon élémentaire que le résultat ne dépend pas de la décomposition utilisée.

En effet ceci est vrai si $\operatorname{supp} f$ est contenu dans un seul Ω_λ et que la décomposition se fait dans cette carte. Notons aussi que si $\operatorname{supp} f \subset \Omega_\lambda \cap \Omega_\mu$, alors le résultat d'intégrale est même en deux choix de coordonnées. Cela dit, étant données deux décompositions de f, on peut d'abord trouver un raffinement à chacune, de sorte que les éléments du recouvrement sont communs en deux décompositions. Soient donc $f = \sum f_j = \sum g_j$, où $\operatorname{supp} f_j$, $\operatorname{supp} g_j$ sont des compacts dans Ω_{λ_j}(on a réuni les termes à support dans le même Ω_{λ_j}). Ensuite, démarrant à partir de Ω_{λ_1}, on peut modifier les deux décompositions sans changeant la valeur d'intégrale de façon que dans les expressions ainsi obtenues

$$f = \sum_j f_j' + \sum_{jk} f_{jk} = \sum_j g_j' + \sum_{jk} g_{jk},$$

on ait $f_j' = g_j'$ pour tout j et que $\operatorname{supp} f_{jk}$, $\operatorname{supp} g_{jk}$ soient compacts dans $\Omega_{\lambda_j} \cap \Omega_{\lambda_k}$. On peut recommencer ce procédé avec le recouvrement $\{\Omega_{\lambda_j} \cap \Omega_{\lambda_k}\}$, aboutissant finalement à l'intersection minimale formée d'ouverts disjoints. Puisqu'il s'agit de la décomposition d'une hyperfonction fixe, les termes qui restent doivent s'accorder.

Cet argument peut se généraliser au cas suivant: Soit $f(x,t)$ une hyperfonction sur une variété du type produit $M \times T$. On dit que le support de f est compact par rapport à t si la projection naturelle $M \times T \to M$ est propre sur $\operatorname{supp} f$, i.e. si pour tout compact $K \subset M$, $\operatorname{supp} f \cap K \times T$ est compact.

Alors on peut définir $\int_T f(x,t)dt$ en recollant celles dans 7° du paragraphe précédant de la même manière que ci-dessus. Plus généralement soit $\varphi: M \to N$ une application de variétés analytiques réelles. Supposons qu'elle est lisse, i.e. que le rang de $d\varphi$ est maximal partout. Soit $f(x)$ une hyperfonction sur M telle que $\varphi|_{\mathrm{supp}\, f}$ soit propre, i.e. que pour tout compact $K \subset N$, $\varphi^{-1}(K) \cap \mathrm{supp}\, f$ soit compact. Alors on peut définir l'intégrale de f le long de la fibre de φ : $\int_{\varphi^{-1}} f(x)$. Le résultat est une hyperfonction sur N. En effet d'après le théorème de la fonction implicite une telle application est localement (i.e. sur l'image réciproque d'un petit ouvert de N) de la forme de projection. Donc on peut définir cette intégrale localement comme ci-dessus.

Dans la suite nous n'utiliserons que la sphère S^{n-1} comme variété analytique réelle. On sait bien la structure de S^{n-1} comme une variété analytique réelle. Mais il est souvent utile d'utiliser les coordonnées ~~de R^n~~ elles-mêmes de R^n qui contient S^{n-1} comme la sphère unité: on désigne un point de S^{n-1} par $(\omega_1 \ldots, \omega_n)$ satisfaisant à $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2 = 1$. Puisque S^{n-1} est orientable, l'élément de volume standard est exprimé par une $(n-1)$-forme. Cette $(n-1)$-forme est induite par une sur R^n:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \omega_j d\omega_1 \wedge \ldots \wedge d\omega_{j-1} \wedge d\omega_{j+1} \wedge \ldots \wedge d\omega_n .$$

En effet, si on prend le produit extérieur avec le vecteur conormal unité de la sphère $\omega_1 d\omega_1 + \ldots + \omega_n d\omega_n$, cela donne $d\omega_1 \wedge \ldots \wedge d\omega_n$ sur $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2 = 1$. Par abus de notation nous allons désigner dorénavant par $d\omega$ cet élément de volume sur S^{n-1}.

<u>Exemple 3.3.3</u> Décomposition de la fonction δ en ondes planes:

$$(3.14) \qquad \delta(x) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \int_{S^{n-1}} \frac{d\omega}{(x\omega + i0)^n} ,$$

où $x\omega = x_1\omega_1 + \ldots + x_n\omega_n$. La composante $W_0(x,\omega) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \frac{1}{(x\omega + i0)^n}$ est considérée comme une hyperfonction en (x,ω) sur $R^n \times S^{n-1}$. Notons que la fonction $1/(z\zeta)^n$ en $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ est holomorphe au moins dans la résion où $\mathrm{Im}\, z\zeta = x\eta + y\xi > 0$. Donc ~~au voisinage de comme sa valeur au bord~~ comme la valeur au bord de celle-ci $W_0(x,\omega)$ est une hyperfonction contenant ω comme paramètres analytiques réels. Donc comme l'opération de restriction on peut considérer la spécialisation des variables $\omega \in S^{n-1}$. Le résultat $W_0(x,\omega)$, en tant qu'une hyperfonction de x, contient une seule direction $-\frac{1}{i}\omega dx\infty$ dans S.S. Donc (3.14) peut être considéré comme la décomposition spectrale de la fonction δ.

Démontrons (3.14). Notons qu'on peut décomposer l'intégrale $\int_{S^{n-1}} W_0(x,\omega)d\omega$ comme $\sum\int_{E_j} W_0(x,\omega)d\omega = \sum\int \chi_{E_j}(\omega) W_0(x,\omega)d\omega$ suivant une décomposition $\bigcup E_j$ de S^{n-1}. Ceci est valable puisque ω sont des paramètres analytiques réels (voir la remarque faite après le théorème 3.2.8bis). Soit donc Γ_σ le σ-ième orthant $\{\sigma_j \operatorname{Im} z_j > 0\}$. On a

$$\int_{S^{n-1}} W_0(x,\omega)d\omega = \sum_\sigma \int_{\overline{\Gamma}_\sigma\cap S^{n-1}} W_0(x,\omega)d\omega = \Big[\sum_\sigma \int_{\overline{\Gamma}_\sigma\cap S^{n-1}} W_0(z,\omega)d\omega\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_\sigma 0},$$

et la dernière intégrale est celle au sens ordinaire pour une fonction holomorphe. En remarquant que $\operatorname{Re}(iz\omega) = -\operatorname{Im} z\omega < 0$ dans le domaine d'intégrale, on peut utiliser la formule

$$\int_0^\infty e^{irz\omega} r^{n-1} dr = \frac{(n-1)!}{(-iz\omega)^n},$$

où l'intégrale converge absolument. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Gamma}_\sigma\cap S^{n-1}} W_0(z,\omega)d\omega &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\overline{\Gamma}_\sigma\cap S^{n-1}} d\omega \int_0^\infty e^{irz\omega} r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\overline{\Gamma}_\sigma} e^{iz\xi} d\xi \\ &= \frac{\sigma_1\cdots\sigma_n}{(2\pi)^n}\int_0^{\sigma_1\infty} e^{iz_1\xi_1} d\xi_1 \cdots \int_0^{\sigma_n\infty} e^{iz_n\xi_n} d\xi_n \\ &= \frac{\sigma_1\cdots\sigma_n}{(-2\pi i)^n}\,\frac{1}{z_1\cdots z_n}.\end{aligned}$$

On a donc par définition

$$\int_{S^{n-1}} W_0(x,\omega)d\omega = \sum_\sigma \frac{\sigma_1\cdots\sigma_n}{(-2\pi i)^n}\Big[\frac{1}{z_1\cdots z_n}\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_\sigma 0} = \delta(x). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarquons que, ici c'est sous entendue la formule bien connue $\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}d\xi$. En effet le calcul ci-dessus justifie celle-ci dans un sens du point de vue d'hyperfonctions.

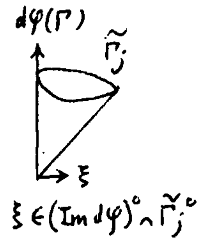
Bien que la formule (3.14) soit belle, elle n'est pas tout à fait utile. C'est parce que la composante $W_0(x,\omega)$ n'est pas analytique sur le plan $x\omega = 0$ même en dehors de l'origine où δ était nul. On améliorera cette formule ultérieurement pour annuler ce défaut.

<u>Exercice</u> Soit A une matrice non singulière. Montrer que $\delta(Ax) = |\det A|^{-1}\delta(x)$. En déduire que $S.S.\delta = \{0\}\times\frac{1}{i}S^{*n-1}_\infty$ et la dernière formule de l'Exercice 3.1.10.

3°. Substitution du type général. Soit maintenant $\tilde{x} = \varphi(x)$ une application analytique réelle de $\Omega \subset R^n$ dans $\tilde{\Omega} \subset R^m$. Soit $f(\tilde{x}) \in B(\tilde{\Omega})$ une hyperfonction à l'expression valeurs au bord $f(\tilde{x}) = \sum F_j(\tilde{x}+i\tilde{\Gamma}_j 0)$. On veut définir la substitution $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x))$. Mais tout d'abord, pour que l'on puisse définir $\varphi^*(F_j(\tilde{x}+i\tilde{\Gamma}_j 0))$, il faut que la fonction $F_j(\varphi(z))$ soit holomorphe dans un coin infinitésimal $\Omega + i\Gamma 0$, i.e. qu'il existe Γ tel que $d\varphi\Gamma \subset \tilde{\Gamma}_j$. Cette condition-ci peut se réécrire comme suit:

$$d\varphi\Gamma \subset \tilde{\Gamma}_j \Leftrightarrow (d\varphi\Gamma)^\circ \supset \Gamma_j^\circ, \quad \operatorname{Ker} d\varphi \cap \Gamma = \emptyset, \quad (\operatorname{Im} d\varphi)^\circ \cap \tilde{\Gamma}_j^\circ = \{0\}.$$

En effet $(d\varphi\Gamma)^\circ \supset \tilde{\Gamma}_j^\circ$ est équivalent à $\overline{d\varphi\Gamma} \subset \overline{\tilde{\Gamma}_j}$, donc pour remonter la flèche on doit examiner la frontière séparément. La deuxième condition assure alors $0 \notin d\varphi\Gamma$, et la troisième assure que les autres points à la frontière de $\tilde{\Gamma}_j$ ne sont pas dans $d\varphi\Gamma$. (Voir le dessin. Notons que $d\varphi\Gamma$ engendre le sous espace linéaire $\operatorname{Im} d\varphi$ puisque Γ est un cone ouvert.) En se rappelant le calcul (3.13), on peut encore la réécrire comme suit:



$$\Leftrightarrow {}^t d\varphi^{-1}\Gamma^\circ \supset \tilde{\Gamma}_j^\circ, \quad \operatorname{Im} {}^t d\varphi + \Gamma^\circ = R^n, \quad \operatorname{Ker} {}^t d\varphi \cap \tilde{\Gamma}_j^\circ = \{0\}.$$

(3.15) $$\Leftrightarrow \Gamma^\circ \supset {}^t d\varphi\, \tilde{\Gamma}_j^\circ, \quad \operatorname{Im} {}^t d\varphi + \Gamma^\circ = R^n, \quad \operatorname{Ker} {}^t d\varphi \cap \tilde{\Gamma}_j^\circ = \{0\}.$$

Notons que la deuxième condition dans (3.15) est superflue. En effet, si $\operatorname{Im} {}^t d\varphi \neq 0$ on peut toujours lui satisfaire en choisissant Γ° à l'intérieur non vide compte tenu la première condition. Si au contraire $\operatorname{Im} {}^t d\varphi = 0$, cela signifie que $\operatorname{Ker} {}^t d\varphi = R^m$, donc $\tilde{\Gamma}_j^\circ = \{0\}$ en vertu de la troisième condition. C'est absurde (ou bien, c'est le cas où $F_j(\tilde{x}+i\tilde{\Gamma}_j 0)$ est analytique réelle, donc admet n'importe quelle substitution.)

L'argument ci-dessus devient précis si on localise par rapport à $x \in \Omega$. On a donc le

Théorème 3.3.4 La substitution $\varphi^* f(x) = f(\varphi(x))$ est possible si S.S.f $\cap (\operatorname{Im} d\varphi)^\perp = \emptyset$. On a

(3.16) $$\text{S.S.}f(\varphi(x)) \subset (\varphi^{-1} \times {}^t d\varphi)\text{S.S.}f.$$

En effet, la condition suffisante pour la substitution découle de la troisième condition dans (3.15).

(Pour appeler à l'intuition on a noté $(\operatorname{Im} d\varphi)^\perp$ au lieu de

$(\mathrm{Im}\ d\varphi)^\circ = \mathrm{Ker}\,{}^t d\varphi$. En effet, pour un sous espace linéaire E le dual E° en tant qu'un cône s'accorde avec le sous espace dual orthogonal $E^\perp$.) L'estimation (3.16) découle de la première condition dans (3.15), car Γ est arbitraire ailleurs.

Exemple 3.3.5 Considérons une courbe analytique $\varphi(t): R \to R^n$. Soit $f(x)$ une hyperfonction définie au voisinage de cette courbe dans ~~un ouvert de~~ R^n. La substitution $f(\varphi(t))$ est possible si S.S.f ne contient pas $(\mathrm{Im}\ d\varphi)^\perp$, c'est-à-dire si S.S.f ne contient pas les éléments conormaux de cette courbe. Cette condition exige en particulier que f est analytique dans un point où $\varphi'(t) = 0$. Ce résultat est compatible avec (3.9).

Exemple 3.3.6 Considérons une fonction analytique réelle $\varphi(x): R^n \to R$. Soit $f(t)$ une hyperfonction d'une variable. La substitution $f(\varphi(x))$ est possible si f est analytique réel au point où $d\varphi(x) = 0$. On a

$$S.S.f(\varphi(x)) = \{(x, \tfrac{\varepsilon}{i} d\varphi(x)\infty);\ (\varphi(x), \tfrac{\varepsilon}{i} dt) \in S.S.f\} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

l'inclusion réciproque étant évidente dans ce cas. En particulier, $\delta(\varphi(x))$ a un sens si $d\varphi(x) \neq 0$ lorsque $\varphi(x) = 0$, et on a

$$(3.17) \qquad S.S.\delta(\varphi(x)) = \{(x, \pm\tfrac{1}{i} d\varphi(x)\infty\ ;\ \varphi(x) = 0\}.$$

4. Quelques applications

Dans ce paragraphe nous donnerons deux exemples de calculs formels basés sur les théorèmes établis jusqu'ici. Pour simplifier nous omettrons pendant les calculs les accessoires $1/i$ et ∞ et éventuellement dx dans l'expression de S.S.

1° Convolution Soit $f(x) \in B(\Omega)$ et soit $g(x)$ une hyperfonction à support compact K, Ω et K étant dans R^n. On a $f(x)g(y) \in B(\Omega \times R^n)$ et que

$$\mathrm{supp}\ f(x)g(y) \subset \Omega \times K,$$

$$S.S.f(x)g(y) \subset \{(x,y;\ \lambda\xi\, dx + (1-\lambda)\eta\, dy);\ (x,\xi) \in S.S.f,\ (y,\eta) \in S.S.g,\ 0 \le \lambda \le 1\}$$

d'après le Théorème 3.2.4. Le changement de coordonnées $x \mapsto x-y$, $y \mapsto y$ envoie $f(x)g(y)$ à $f(x-y)g(y)$. On a

$$f(x-y)g(y) \in B(\{(x,y) \in R^{2n};\ x-y \in \Omega\}),$$

$$\operatorname{supp} f(x-y)g(y) \subset \{(x,y) \in R^{2n};\ x-y \in \Omega,\quad y \in K\}.$$

Posons donc

$$\Omega_K = \{x \in R^n;\ x-y \in \Omega \quad \text{pour tout} \quad y \in K\}.$$

Alors on peut considérer $f(x-y)g(y)$ comme une hyperfonction sur $\Omega_K \times R^n$ ayant le support compact par rapport à y.

Définition 3.4.1 On définit $f * g \in B(\Omega_K)$ par

$$f * g(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy,$$

et l'appelle la convolution de f et de g.

Notons d'abord la relation suivante:

(3.18) $\quad \operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$

En effet on a évidemment

$$\operatorname{supp} f(x-y)g(y) \subset (\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g) \times \operatorname{supp} g,$$

d'où intégrant en y on obtient (3.18). Continuons le calcul de S.S. D'après la Proposition 3.3.1 on a

$$S.S.f(x-y)g(y) \subset \{(x-y, y; \lambda\xi(dx-dy)+(1-\lambda)\eta dy);\ (x-y,\xi) \in S.S.f,\ (y,\eta) \in S.S.g,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Quand on l'intégre en y, les points de S.S. disparaissent, d'après le Théorème 3.2.8, sauf ceux qui satisfont à

$$-\lambda\xi dy + (1-\lambda)\eta dy = 0, \quad \text{i.e.} \quad \xi = \eta.$$

On obtient donc le

Théorème 3.4.2 On a

(3.19) $\quad S.S.f * g \subset \{(x+y, \xi);\ (x,\xi) \in S.S.f,\ (y,\xi) \in S.S.g\}.$

En particulier, si S.S.f et S.S.g ne contiennent aucune direction commune, $f * g$ devient analytique réel.

Notons que d'après le Théorème 3.1.8 on a aussi

(3.20) $\quad \operatorname{supp\,sing} f * g \subset \operatorname{supp\,sing} f + \operatorname{supp\,sing} g.$

Examinons maintenant quelques propriétés connues pour la convolution.

Proposition 3.4.3 Soient f et g comme ci-dessus. On a

$$f * g = \int_{R^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Soit de plus h une hyperfonction à support compact L. On a alors $(f*g) * h \in B(\Omega_{K+L})$ et

$$(f*g)*h = f*(g*h) = (f*h)*g.$$

On a aussi

$$\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g = f*\partial^\alpha g,$$

$$f*\delta = f.$$

<u>Démonstration</u> La première formule découle du changement de coordonnées. pour l'intégrale. Cela signifie, en particulier, que $g*h = h*g$ pour deux hyperfonctions à support compact. Notons que $(\Omega_K)_L = \Omega_{K+L}$. Donc la deuxième formule est un cas particulier de la Proposition 3.2.9. Il en est de même de la troisième. Notons enfin que $f(x-y)\delta(y) = f(x)\delta(y)$. En effet, au voisinage de $y = 0$ on a $f(x) = f(x-y) + \sum_{j=1}^{n} y_j f_j(x,y)$ avec certaines hyperfonctions $f_j(x,y)$ comme on le voit facilement au moyen d'une expression valeurs au bord. Puisque $y_j\delta(y) = (y_j\delta(y_j))\delta(y_1)\dots\delta(y_{j-1})\delta(y_{j+1})\dots\delta(y_n) = 0$, on en déduit l'égalité ci-dessus. On obtient donc $\int f(x-y)\delta(y)dy = \int f(x)\delta(y)dy = f(x)$ d'après l'Exemple 3.2.10. C.Q.F.D.

Pour nous assurer, réexaminons ce qui ce passe au niveau de l'expression valeurs au bord. Reprenons $f(x)$ et $g(x)$ comme ci-dessus. Pour simplifier la notation supposons que $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{Int}(K)$. Prenons les expressions valeurs au bord:

$$f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0), \quad g(t) = \sum G_k(t+i\Delta_k 0),$$

où $G_k(\tau)$ est supposé holomorphe au voisinage de ∂K. On a alors

$$f(x-t)g(t) = \sum_{j,k}\left[F_j(z-\tau)G_k(\tau)\right]_{(z,\tau)\mapsto(x,t)+i\,\mathcal{E}_{jk}0},$$

où

$$\mathcal{E}_{jk} = \{(y,s)\in R^{2n};\ y-s\in\Gamma_j,\ s\in\Delta_k\}$$

est un cône convexe dans R^{2n}. Notons que $p_x(\mathcal{E}_{jk}) = \Gamma_j + \Delta_k$ et que $F_j(z-\tau)G_k(\tau)$ est holomorphe ~~si $\tau \in \partial K$~~ sur $(\Omega_K+i\Gamma_j 0)\times\partial K$. Donc cette expression satisfait à la condition indiquée à la fin de § 2, 7°, de sorte qu'on obtient

$$(3.21)\quad \int f(x-t)g(t)dt = \sum_{jk}\Big[\int_{\substack{K\\ \text{bordé par } \partial K}} F_j(z-t-i\varepsilon_k(t))G_k(t+i\varepsilon_k(t))d(t+i\varepsilon_k(t))\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_j 0}$$

où $t+i\varepsilon_k(t)$ est un chemin tel que $\varepsilon_k(t)\in\Delta_k$ et ~~que~~ $y-\varepsilon_k(t)\in\Gamma_j$ pour $t\in \mathrm{Int}(K)$. La seconde condition sera satisfaite pour $y = \mathrm{Im}\, z$ fixe dans Γ_j dès qu'on choisit $\varepsilon_k(t)$ suffisamment petit. Donc on peut en effet choisir le chemin indépendant de j et on peut réunir les termes de sorte qu'on obtient

$$(3.22)\quad \int f(x-t)g(t)dt=\sum_j\Big[\sum_k\int F_j(z-t-i\varepsilon_k(t))G_k(t+i\varepsilon_k(t))d(t+i\varepsilon_k(t))\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_j 0}$$
$$= \sum_j\Big[\int F_j(z-t)g(t)dt\Big]_{z\mapsto x+i\Gamma_j 0}.$$

Dans la dernière expression l'intégrale est celle pour l'hyperfonction $F_j(z-t)g(t)$ ayant le support compact par rapport à t qui nous donne éventuellement une fonction holomorphe. D'où en particulier on regagne $f*\delta = f$.

Remarquons ensuite que dans l'intégrale (3.21) on peut ajouter $\partial K+i\{\lambda a;\ 0\le\lambda\le 1\}$, où a est un vecteur fixe suffisamment petit. En effet, sur cette partie la somme $\sum_{jk}F_j(z-\tau)G_k(\tau)$ s'annule en tant que des fonctions holomorphes, donc s'annule aussi la somme des intégrales. Par le théorème de Poincaré on peut modifier ce nouveau chemin à un autre de la forme $t+i\varepsilon'_k(t)$ bordé par $\partial K+\{ia\}$ et satisfaisant toujours à $\varepsilon'_k(t)\in\Delta_k$ et $y-\varepsilon'_k(t)\in\Gamma_j$ pour $t\in\mathrm{Int}(K)$. En faisant z et a varier de façon convenable on obtient ainsi le prolongement de l'intégrale dans (3.21) à $\Omega_K+i\Delta_j 0+ia$ pour tout $a\in\Delta_k$ suffisamment petit. Ainsi l'intégrale devient holomorphe dans $\Omega_K+i(\Gamma_j+\Delta_k)0$ et on peut remplacer la limite $z\mapsto x+i\Gamma_j 0$ par $z\mapsto x+i(\Gamma_j+\Delta_k)0$. Compte tenu $(\Gamma_j+\Delta_k)^\circ = \Gamma_j^\circ\cap\Delta_k^\circ$, on regagne la partie directionnelle de l'estimation (3.19).

Pour voir $\int f(x-t)g(t)dt = \int f(t)g(x-t)dt$, fixons z et choisissons dans l'argument ci-dessus $a = y = \mathrm{Im}\, z$. Soit $t+i\varepsilon'_k(t)$ le chemin ainsi obtenu, i.e. tel qu'il soit bordé par $\partial K+\{iy\}$ et $\varepsilon'_k(t)\in\Delta_k$, $y-\varepsilon'_k(t)\in\Gamma_j$ pour $t\in \mathrm{Int}(K)$. Posons $\varepsilon''_k(t) = y-\varepsilon'_k(x-t)$ et faisons le chantement de variables réel ordinaire $x-t\mapsto t$. On obtient alors l'intégrale

$$\int_{\{x\}-K}F_j(t+i\varepsilon''_k(t))G_k(z-t-i\varepsilon''_k(t))d(t+i\varepsilon''_k(t)),$$

où $\varepsilon''_k(t)\in\Gamma_j$ et $y-\varepsilon''_k(t)\in\Delta_k$ pour $t\in\mathrm{Int}(\{x\}-K)$. Quand x parcourt le voisinage d'un point de Ω_K, on peut remplacer de même le domaine d'intégrale

$\{x\}-K$ par un autre plus grand et indépendant de x. Ainsi la somme de ces intégrales après passées à la valeur au bord nous donne par définition l'intégrale $\int_{R^n} f(t)g(x-t)dt$.

2° Analyticité et causalité Dans ce paragraphe nous étudierons la relation entre le support et le spectre singulier d'une hyperfonction. Il est clair qu'ils ne peut pas être indifférents entre eux, car il n'existe pas de fonction analytique réelle dont le support est limité. C'est alors la micro-localisation de l'unicité du prolongement analytique:

Théorème 3.4.4 (Kashiwara) Soit $f(x)$ une hyperfonction définie au voisinage de l'origine de R^n. Supposons que $\operatorname{supp} f(x) \subset \{x_1 \geq 0\}$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

a) $0 \in \operatorname{supp} f(x)$;

b) $(0, \pm\frac{1}{i} dx_1 \infty) \in S.S.f(x)$.

Démonstration b) $\Rightarrow$ a) étant clair, démontrons non b) $\Rightarrow$ non a). Pour fixer l'idée supposons que $(0, +\frac{1}{i} dx_1 \infty) \notin S.S.f$. Considérons le changement de coordonnées

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1 + \varepsilon x'^2 \\ \tilde{x}' = x'. \end{cases}$$

où $\varepsilon > 0$ est une constante et $x' = (x_2, \ldots, x_n)$.
Il est appelé la transformation de Holmgren et souvent utilisé dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Avec ces nouvelles coordonnées le support de f est contenu dans l'ensemble $\tilde{x}_1 \geq \varepsilon \tilde{x}'^2$, ainsi compact par rapport à $\tilde{x}'$. Pour simplifier écrivons x à nouveau au lieu de $\tilde{x}$. En vertu de la Proposition 3.3.1 on a toujours $(0, +\frac{1}{i} dx_1 \infty) \notin S.S.f$. Prenons $\delta > 0$ tel que $S.S.f \cap \{x_1 < \delta\} \times \{+\frac{1}{i} dx_1 \infty\} = \emptyset$. Posons

$$g(x, \omega') = f(x) \underset{x'}{*} W_0(x', \omega') \underset{\text{déf}}{=} \int f(x_1, y') W_0(x'-y', \omega') dy', \tag{3.23}$$

où $W_0(x', \omega')$ est la composante de la décomposition (3.14) pour $\delta(x')$.

$g(x,\omega')$ est une hyperfonction de x, ω'. Nous essayons de démontrer $g(x,\omega') \equiv 0$. Pour cela considérons d'abord l'hyperfonction d'une variable x_1 comme suit:

$$h(x_1;z',\omega') = \int f(x_1,y')W_0(z'-y',\omega')dy',$$

où $z' \in C^{n-1}$ et $\omega' \in S^{n-2}$ sont fixés de façon que $\operatorname{Im} z'\omega' > 0$. On a $\operatorname{supp} h(x_1;z',\omega') \subset \{x_1 \geq 0\}$. D'après le Théorème 3.2.8 on a aussi $S.S.h(x_1; z',\omega') \cap \{x_1 < \delta\} \times \{+\frac{1}{i}dx_1\infty\} = \emptyset$. Donc d'après le Théorème 1.6.6 qui est le cas particulier d'une variable de notre théorème, on conclut que $h(x_1;z',\omega') \equiv 0$ dans $x_1 < \delta$. Pour remonter à $g(x,\omega')$ regardons en détail l'intégrale (3.23).

Soit $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ une expression valeurs au bord. On peut supposer que $F_j(z)$ sont analytiques en dehors de $x_1 \geq \varepsilon x'^2$ et que $(1,0,\ldots,0) \notin \Gamma_j^{\circ}$. Par la définition d'intégrale on a

$$(3.24) \qquad g(x,\omega') = \sum_j G_j(z,\zeta')\Big|_{(z,\zeta')\mapsto(x,\omega')+i\Delta_j 0'}$$

$$\text{où } G_j(z,\zeta') = \int_{D_j} F_j(z_1,\tau')W_0(z'-\tau',\zeta')d\tau',$$

D_j est un chemin bordé par $|x'| = \sqrt{\delta/\varepsilon}$ et choisi ailleurs de façon que $(z_1,\tau') \in R^n+i\Gamma_j 0$ et $\operatorname{Im}(z'-\tau')\zeta' > 0$ pour $\tau' \in \operatorname{Int} D_j$. Cette dernière condition sert à préciser Δ_j. Comme le calcul à la fin de 1°, on voit que pour $\zeta' = \omega' \in S^{n-2}$ fixe $G_j(z,\omega')$ se prolonge en z dans $R^n+i\Gamma_j 0+ \{0\}\times\{\operatorname{Im} z'\omega' > 0\}$. Cela signifie que $g(x,\omega')$ contient ω' comme paramètres analytiques réels et de plus que $\Delta_j \cap \{\eta' = 0\} \supset \Gamma_j + \{y';y'\omega' > 0\}$, où η' désigne les variables imaginaires pures correspondantes à ω'. Fixons maintenant z' de façon que $\operatorname{im} z'\omega' > 0$. Alors en passant aux valeurs au bord les fonctions $H_j(z;z',\omega') = G_j(z,\omega')$ de (3.24) donnent évidemment une expression de l'hyperfonction $h(x_1;z',\omega')$, ce qui est nulle. Notons que $H_j(z_1;z',\omega')$ est holomorphe dans un coin de largeur $\Gamma_j+\{y';y'\omega' > 0\} \cap \{y'=Cte\}$. Un calcul élémentaire montre que ce dernier est égal à $p_1(\Gamma_j)$, où $p_1: R^n \to R$ désigne la projection sur la première composante. Rappelons alors que $(1,0,\ldots,0) \notin \Gamma_j^{\circ}$, i.e. que $\Gamma_j \cap \{y_1 > 0\} \neq \emptyset$.

Donc toutes les $H_j(z_1;z',\omega')$ sont holomorphes dans le même coin $R + i0$, de sorte que la somme $\sum H_j(z_1;z',\omega')$ s'annule au sens ordinaire (Lemme 3.1.3; mais facile de le voir dans le cas d'une variable). Ainsi d'après l'unicité du prolongement la somme $\sum G_j(z,\zeta')$ elle-même s'annule identiquement. Cela implique $g(x,\omega') \equiv 0$.

Maintenant, d'après l'Exemple 3.3.3, la Proposition 3.2.9 et la Proposition 3.4.3 on a

$$\begin{aligned} 0 = \int_{S^{n-2}} f(x,\omega')d\omega' &= \int_{S^{n-2}} f(x) \underset{x'}{*} W_0(x',\omega')d\omega' \\ &= f(x) \underset{x'}{*} \int_{S^{n-2}} W_0(x',\omega')d\omega' \\ &= f(x) * \delta(x') = f(x). \end{aligned}$$

En effet le changement d'ordre d'intégrales sera généralisé dans notre cas si nous remarquons les formules suivantes:

$$\int_{S^{n-2}} W_0(x',\omega')d\omega' = \sum_{\tau} \int \chi_{\overline{\Gamma}_\tau \cap S^{n-2}}(\omega')W_0(x',\omega')d\omega',$$

$$\chi_{\overline{\Gamma}_\tau \cap S^{n-2}}(\omega') f \underset{x'}{*} W_0(x',\omega') = f * (\chi_{\overline{\Gamma}_\tau \cap S^{n-2}}(\omega')W_0(x',\omega')). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On a un autre résultat plus profond:

<u>Théorème 3.4.5</u> Soit $f(x)$ comme dans le théorème précédent. Alors la fibre à l'origine de S.S.f a la forme suivante: il existe un fermé F dans l'équateur $S^{n-1} \cap \{dx_1=0\}$ tel que

$$S.S.f|_{x=0} = \{(0,\tfrac{1}{i}\xi dx\infty);\xi' \in F \quad \text{ou} \quad \xi'=0\}.$$

C'est-à-dire, il est comme une tranche de melon.

La démonstration, qui nécessite une nouvelle notion de paramètres, sera donnée ultérieurement. Examinons maintenant des exemples typiques.

<u>Exemple 3.4.6</u> Soit $N \subset R^n$ une variété analytique lisse. Supposons que supp f = N. Alors en vertu du Théorème 3.4.4 appliqué après un changement de coordonnées approprié S.S.f contient le fibré conormal de N, $\frac{1}{i}S^*_{\infty N}(R^n)$; Si N s'écrit $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_k(x) = 0$ avec $d\varphi_j$ linéairement indépendants le long de N, on a

$$\tfrac{1}{i}S^*_{\infty N}(R^n) = \{(x, \textstyle\sum \frac{1}{i}\lambda_j d\varphi_j(x)\infty);\ x \in N,\ \sum \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0\}.$$

<u>Exemple 3.4.7</u> Soit $f(x)$ une hyperfonction telle que supp $f = \{x_1 = |x'|\}$,

le cône futur de la lumière. On a

(3.25) $\quad S.S.f|_{x=0} = \{0\}\times\frac{1}{i}S_{\infty}^{*n-1}$.

En effet, d'après le Théorème 3.4.4 appliqué à chaque demi espace $\langle x,\xi\rangle\geq 0$ avec ξ du genre temps positif, on obtient d'abord

$$S.S.f|_{x=0} \supset \{(0,\tfrac{1}{i}\xi dx\infty);|\xi_1|\geq|\xi'|\}.$$

Donc d'après le Théorème 3.4.5 appliqué à $\{x_1\geq 0\}$ on conclut (3.25).

5. Microfonctions

Pour manipuler le spectre singulier systématiquement, nous construisons un faisceau C sur $R^n\times\frac{1}{i}S_{\infty}^{*n-1}$ qui est l'extrait de la singularité directionnelle des hyperfonctions.

Définition 3.5.1 On définit les deux faisceaux comme suit sur $R^n\times\frac{1}{i}S_{\infty}^{*n-1}$:

- le sous faisceau A^* de $\pi^{-1}B$ associé au préfaisceau

$$R^n\times\tfrac{1}{i}S_{\infty}^{*n-1}\supset\Omega\times\tfrac{1}{i}\Delta dx\infty\longmapsto\{f\in B(\Omega);\ S.S.f\cap\Omega\times\tfrac{1}{i}\Delta dx\infty=\emptyset\}.$$

- le faisceau de "microfonctions": $C = \pi^{-1}B/A^*$.

Un germe de microfonction en $(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty)$, i.e. un élément de la fibre $C_{(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty)}$, est un germe d'hyperfonction f en x modulo ceux qui sont micro-analytique en $(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty)$, donc juste l'extrait de la partie singulière de f en $(x,\frac{1}{i}\xi dx\infty)$.

Théorème 3.5.2 C est un faisceau flasque. Si $\Delta\subset S^{n-1}$ est un ouvert connexe, on a

(3.26) $\quad C(\Omega\times\frac{1}{i}\Delta dx\infty) = B(\Omega)/A^*(\Omega\times\frac{1}{i}\Delta\, dx\infty)$.

En particulier, prenant $\Delta = S^{n-1}$ et remarquant que $A^*(\Omega\times\frac{1}{i}S_{\infty}^{*n-1}) = A(\Omega)$ d'après le Théorème 3.1.7, on a la suite exacte des faisceaux:

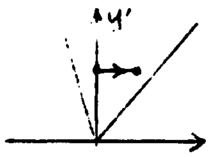
(3.27) $\quad 0\longrightarrow A\longrightarrow B\xrightarrow{sp}\pi_*C\longrightarrow 0$

Pour $f\in B(\Omega)$, nous désignons par $sp(f)$ plutôt la section de $C(\Omega\times\frac{1}{i}S_{\infty}^{*n-1})$ qui lui correspond par l'identification $\pi_*C(\Omega) = C(\Omega\times\frac{1}{i}S_{\infty}^{*n-1})$. On a alors

$$S.S.f = \operatorname{supp} sp(f).$$

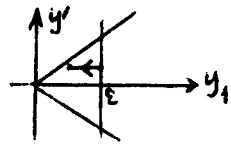
Nous démontrerons ces propriétés vers la fin de notre cours. Notons que le Théorème 3.2.1 découle de ce théorème. En effet soit $f \in B(\Omega)$ et soit $F_1 \cup F_2 \supset$ S.S.f. On a alors $F_1 \cup F_2 \supset$ supp sp(f). D'après la flascité de C on peut décomposer sp(f) à la forme $g_1 + g_2$ dans $C(\Omega \times \frac{1}{i} S_\infty^{*n-1})$ telle que supp $g_j \subset F_j$, j=1,2. En vertu de (3.26) g_j a un représentant $f_j \in B(\Omega)$. Alors $f - f_1 - f_2$ est dans $A(\Omega)$. En ajustant f_1 par cet élément on obtient une décomposition voulue: $f = f_1+f_2$, $S.S.f_j$ = supp $sp(f_j)$ = supp $g_j \subset F_j$.

Toute opération locale (homomorphisme de faisceaux) sur B qui respecte le S.S. peut s'induire sur C de façon évidente. Parmi eux sont énumérées la dérivation, la multiplication par une fonction analytique réelle, donc l'opération d'un opérateur aux dérivées partielles linéaires à coefficients analytiques réels. Mais en plus C admets quelques intégrales comme homomorphismes de faisceaux, ce qui est la principale raison de l'introduction de ce faisceau. Considérons par exemple l'intégrale indéfinie par rapport à x_1: $\int^{x_1} f(x)dx_1$. Désignons par le même symbole f(x) une micro-fonction et une hyperfonction qui le représente (un tel abus de notation est systématiquement utilisé dans la littérature courante). Soit $f(x) = \sum F_j(x+i\Gamma_j 0)$ une expression valeurs au bord valable sur un compact $K = [a_1,b_1] \times K'$. On peut supposer que, soit $\Gamma_j \cap \{y_1=0\} \neq \emptyset$, soit $\Gamma_j \ni (1,0,\ldots,0)$ ou $\Gamma_j \ni (-1,0,\ldots,0)$. On peut en effet toujours trouver une telle expression si on emploie le Théorème 3.1.7 après avoir décomposé S.S.f de façon suffisamment fine. Pour un terme de la première espèce, on pose



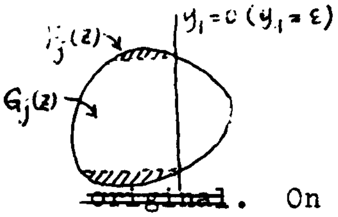
$$G_j(z) = \int_{a_1}^{z_1} F_j(z)dz_1$$

où l'intégrale est faite le long d'un chemin dans le plan complexe z' = Cte. Alors $G_j(z)$ est holomorphe dans un coin infinitésimal contenant $(K+i\Gamma_j 0) \cap \{y_1=0\}$ ~~le même coin infinitésimal que pour F_j~~.
Pour un terme de la deuxième espèce on choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et on pose



$$G_j(z) = \int_{a_1 \pm i\varepsilon}^{z_1} F_j(z)dz_1$$

Dans ce cas $G_j(z)$ est holomorphe dans ~~la partie dans $\{\pm \mathrm{Im}\, z < \varepsilon\}$ du coin~~ un coin infinitésimal contenant $K+i\{(\pm\lambda\varepsilon,0,\ldots,0); 0\le\lambda\le 1\}$



~~original~~. On obtient ainsi une hyperfonction $g(x) : \sum G_j(x+i\Gamma_j 0)$. Il est clair que $\frac{\partial}{\partial x_1} g(x) = f(x)$, i.e. que $g(x)$ est une primitive de $f(x)$. On démontrera ultérieurement de façon systématique que $\frac{\partial}{\partial x_1} g(x) = 0$ implique que $g(x)$ est une hyperfonction de x' seul. (Notons qu'au moins on peut directement vérifier que le changement de a_1 ou de ε n'affecte la primitive ci-dessus que par une telle hyperfonction.) Puisqu'une telle hyperfonction a son S.S. dans l'équateur $dx_1 = 0$, on conclut que $\frac{\partial}{\partial x_1} : C \to C$ est un isomorphisme de faisceaux en dehors de l'équateur. Donc on a la

Proposition et Définition 3.5.3 L'intégrale indéfinie calculée comme ci-dessus est un homomorphisme de faisceau $C|_{dx_1\neq 0} \to C|_{dx_1\neq 0}$ inverse de ∂_1. On le désignera donc par ∂_1^{-1}.

Exercice Pour comprendre le besoin de la cohomologie essayer de démontrer à la main que $\partial_1 g(x) = 0$ implique que $g(x)$ est une hyperfonction de $n-1$ variables x'.

Nous faisons ici une petite esquisse sur l'opérateur micro-différentiel (pseudo-différentiel). C'est un opérateur à forme formelle comme suit:

$$(3.28) \qquad p(x,\partial) = \sum_{j=-\infty}^{m} p_j(x,\partial),$$

où $p_j(x,\xi) = |\xi|^j p_j(x,\omega)$, $\omega = \xi/|\xi|$ et $p_j(x,\omega)$ est une fonction analytique réelle en x, ω définie dans un ouvert U de $R^n \times S^{n-1}$ (plus précisément $R^n \times \frac{1}{i} S_\infty^{*n-1}$ avec l'identification évidente). (D'habitude on dit plutôt que $p_j(x,\xi)$ est une fonction positivement homogène de degré j définie dans l'ouvert correspondant de $R^n \times R^{*n}$.) On met de plus l'hypothèse suivante: Pour tout point $(x^0,\omega^0) \in U$, il existe un voisinage complexe et des constantes $A, B > 0$ tels que $p_j(z,\zeta)$ y sont holomorphes et vérifient

$$(3.29) \qquad |p_j(z,\zeta)| \leq AB^{|j|}|j|!$$

Définition 3.5.4 Une somme formelle (3.28) satisfaisant aux conditions énumérées ci-dessus est dite un opérateur microdifférentiel d'ordre m défini dans U. La série formelle $\sum p_j(x,\zeta)$ est dite son symbole total, et $p_m(x,\zeta)$ son symbole principal. (Bien entendu on suppose dans ce cas que $p_m(x,\zeta) \not\equiv 0$.) Il opère à $C|_U$ comme un homomorphisme de faisceaux de la manière $f \longmapsto p(x,\partial)f = \sum_{j=-\infty}^{m} p_j(x,\partial)f$ dont la signification sera précisée ci-dessous.

Nous allons d'abord définir l'opération de $p(x,\partial)$ pour $W_0(x,\omega)$, la composante de la décomposition de δ dans l'Exemple 3.3.3. Posons

$$(3.30) \quad \Phi_j(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^j \ (j-1)!}{\lambda^j} & \text{pour } j > 0, \\ \dfrac{\lambda^{-j}}{(-j)!}\Big(\log\lambda - \sum\limits_{k=1}^{j}\dfrac{1}{k}\Big) & \text{pour } j \leq 0 \end{cases}$$

On a alors $\frac{d}{d\lambda}\Phi_j = \Phi_{j+1}$ et $W_0(x,\omega) = (2\pi i)^{-n}\,\Phi_n(x\omega+i0)$. On définit

$$(3.31) \quad K(x,t;\omega) = p(x,\partial)W_0(x-t,\omega) = \Big[\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{j=-\infty}^{m} p_j(z,\zeta)\,\Phi_{n+j}((z-\tau)\zeta)\Big]_{z,\tau,\zeta\mapsto(x,t,\omega)}$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{j=-\infty}^{m} p_j(x,\omega)\,\Phi_{n+j}((x-t)\omega+i0),$$

où la deuxième ligne est symbolique. Grâce à l'estimation (3.29) la série en fonctions holomorphes dans le crochet converge localement uniformément en z, τ, ζ pour (z,ζ) dans ce voisinage et $|(z-\tau)\zeta| \ll 1$, $\mathrm{Im}(z-\tau)\zeta > 0$. Donc (3.31) donne une hyperfonction de x,t,ω définie dans V $((x,\omega)\in U$, $|x-t| \ll 1$ et contenant t,ω comme paramètres analytiques réels. Soit maintenant $(x^0,\frac{1}{i}\omega^0 dx\infty)\in U$ un point. A une microfonction $f \in C_{(x^0,\frac{1}{i}\omega^0 dx\infty)}$ quelconque, $p(x,\partial)$ opère comme suit:

$$p(x,\partial)f(x) = \int_K f(t)\,dt\int_\Delta K(x,t;\omega)\,d\omega,$$

où Δ est un voisinage de ω et K un voisinage de x tels que f est définie sur $K+\frac{1}{i}\Delta dx\infty$ et représentée par une hyperfonction sur K qu'on a désignée encore par f. Le symbole $\int_K dt$ signifie qu'on calcule l'intégrale après avoir coupé le support de f dans K. Notons que le résultat en tant qu'une microfonction au voisinage de $(x^0,\frac{1}{i}\omega^0 dx\infty)$ ne dépend pas de K ou Δ. En effet, just comme dans le cas de $W_0(x-t,\omega)$ on a

$$\mathrm{S.S.}K(x,t;\omega) \subset \{(x,t,\omega;\tfrac{1}{i}\{\omega(dx-dt)+(x-t)d\omega\}\infty)\}$$

d'où, d'après le Théorème 3.2.8bis on a

$$\mathrm{S.S.}\int_\Delta K(x,t;\omega)\,d\omega \subset \{(x,t;\tfrac{1}{i}\omega(dx-dt)\infty);\ \omega\in\bar{\Delta}, x=t\} \cup \{(x,t;\tfrac{1}{i}\omega(dx-dt)\infty);\ \omega\in\partial\Delta\}.$$

Donc comme dans le calcul de §4, 1° on voit que la différence pour divers choix de Δ est microanalytique partout en direction ω^0 et l'ambiguïté de f au voisinage de ∂K n'affecte à l'intérieur de K que par des directions dans $\partial\Delta$.

Compte tenu la Proposition 3.2.9 on peut changer l'ordre d'opération de $p(x,\partial)$ avec l'intégration. Cela dit, d'après l'Exemple 3.3.3 on retrouve notre définition plausible:

$$p(x,\partial)f = p(x,\partial)\int\delta(x-t)f(t)dt = p(x,\partial)\int f(t)dt\int W_0(x-t,\omega)d\omega$$
$$= \int f(t)dt\int p(x,\partial)W_0(x-t,\omega)d\omega = \int f(t)dt\int K(x,t;\omega)d\omega.$$

Ce calcul sera justifié si on introduit le domaine d'intégrale comme ci-dessus. On pose

$$K(x,t) = p(x,\partial)\delta(x-t)$$

et l'appelle le noyau de l'opérateur $p(x,\partial)$. Il est une microfonction de x, t définie dans $\{(x,t;\frac{1}{i}\omega(dx-dt)\infty;\ (x,\omega)\in U\}$. Notons qu'au voisinage de la direction $\omega^0(dx-dt)$ on a $\delta(x-t) = \int_\Delta W_0(x-t,\omega)d\omega$, donc $K(x,t) = \int_\Delta K(x,t;\omega)d\omega$ en tant qu'une microfonction.

On peut encore donner l'interprétation de (3.31) comme suit: Considérons par exemple au voisinage d'un point $(x^0,\omega^0)\in U\cap\{\omega_1>0\}$. Alors comme le système de coordonnées de S^{n-1} on peut utiliser $\omega' = (\omega_2,\dots,\omega_n)$. Soit

$$p_j(x,\omega) = \sum_{\beta'\geq 0} p_j^{\beta'}(x)(\omega'-\omega^0{}')^{\beta'}$$

le développement de Taylor partiel dans un voisinage de (x^0,ω^0). On a alors dans le coin correspondant

$$p_j(x,\xi) = \sum_{\beta'\geq 0} p_j^{\beta'}(x)\left(\frac{\xi'}{\xi_1}-\omega^0{}'\right)^{\beta'}\xi_1^j.$$

En remplaçant ici ξ' par $\partial' = (\partial_2,\dots,\partial_n)$ et ξ_1^{-1} par l'opérateur de Définition 3.5.3, on obtient une série d'opérateurs intégro-différentiels

$$(3.32)\quad \sum_{\beta'\geq 0} p_j^{\beta'}(x)(\partial'/\partial_1^{-1}-\omega^0{}')^{\beta'}\cdot\partial_1^{-j}.$$

On voit facilement que (3.32) donne (3.31) au sens formel. Notons aussi que si $|\omega^0{}'|\ll 1$, (3.32) définit un opérateur sur les fonctions holomorphes au voisinage de $z_1 = a_1 - i\ell$, la limite inférieure de l'intégrale. Mais on ne peut pas tout de suite déduire par majoration que (3.32) redonne pour $F(z) \in \mathcal{O}(\Omega+i\Gamma 0)$ un autre élément de $\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma 0)$. Ce calcul de majoration devient praticable si on remplace encore $\partial'^{\beta'}$ par le noyau de Cauchy correspondant $\frac{(-1)^{|\beta'|}}{(2\pi i)^{n-1}}\frac{\beta'!}{(z'-\tau')^{\beta'+e}}$ (où $e = (1,\dots,1)$), et $\partial_1^{-\ell}$ par le noyau $\frac{1}{2\pi i}\frac{(z_1-\tau_1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}$ $\{\log(z_1-\tau_1)-\sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{1}{k}\}$. Ainsi on retrouve le noyau

$$p(x,\partial)\left\{-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{x_1-t_1+i0}\,\delta(x'-t')\right\}=\int_{\omega_1>0}K(x,t;\omega)d\omega.$$

Remarque Historiquement l'opérateur pseudo-différentiel a été introduit pour généraliser l'opérateur différentiel sur la base de la formule

$$(3.33)\quad p(x,\partial)f(x) = p(x,\partial)\left\{\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}e^{ix\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi\right\}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}e^{ix\xi}p(x,i\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi,$$

ce qui est certainement valable pour un opérateur différentiel. A cause de la transformation de Fourier $\tilde{f}$ qui intervient, cette formule n'a pas de sens local. Mais si on intégre par rapport à $r = |\xi|$, on obtient

$$p(x,\partial)f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_j\int_{S^{n-1}}p_j(x,\omega)d\omega\int_0^\infty e^{ixr\omega}\tilde{f}(r\omega)(ir)^{n+j-1}idr,$$

où

$$\int_0^\infty e^{ixr\omega}\tilde{f}(r\omega)(ir)^{n+j-1}idr = \int_0^\infty e^{ixr\omega}(ir)^{n+j-1}idr\int_{R^n}e^{-itr\omega}f(t)dt$$

$$=\int_{R^n}f(t)dt\int_0^\infty e^{i(x-t)r\omega}(ir)^{n+j-1}idr = \int_{R^n}f(t)\,\Phi_{n+j}((x-t)\omega+i0)dt,$$

d'où on regagne notre définition ayant un sens "micro-local". Dans la littérature courante on utilise souvent $D = \frac{1}{i}\partial$ au lieu de ∂ pour supprimer le facteur i dans (3.33).

Le composé de deux opérateurs micro-différentiels $p(x,\partial) = \sum_{j=-\infty}^{M}p_j(x,\partial)$, $q(x,\partial) = \sum_{j=-\infty}^{N}q_j(x,\partial)$ d'ordre M, N respectivement est encore un opérateur micro-différentiel $r(x,\partial) = \sum_{j=-\infty}^{M+N}r_j(x,\partial)$ d'ordre $M+N$, où

$$(3.34)\quad r_j(x,\zeta) = \sum_{k+\ell-|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\partial_\zeta^\alpha p_k(x,\zeta)\partial_x^\alpha q_\ell(x,\zeta).$$

C'est la généralisation de la loi de Leibniz et se vérifie tout de suite au moins formellement. Ainsi la totalité d'opérateurs micro-différentiels devient une algèbre P. Elle est non commutative. Mais comme dans le cas d'opérateurs différentiels, le commutateur $[p,q]$ perd le terme d'ordre $M+N$. Donc la correspondence $\sigma: p(x,\partial)\mapsto p_M(x,\zeta)$ définit un homomorphisme d'algèbres de P sur "l'algèbre des symboles" commutative formée des fonctions homogènes en ζ par la multiplication ordinaire. De plus, si $F(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k\tau^k$ est un germe de fonction holomorphe d'une variable en 0 et si $p(x,\partial)$ est d'ordre ≤ -1, on peut faire la substitution $F(p(x,\partial)) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(p(x,\partial))^k$. Le résultat est un opérateur micro-différentiel $\sum_{j=-\infty}^{0} q_j(x,\partial)$ dont les termes $q_j(x,\partial)$ sont calculés un à un formellement d'après la formule (3.34).

Soit $p_m(x,\zeta)$ le symbole principal de $p(x,\partial)$. La variété

(3.35) $\quad V(p) = \{(x,\xi)\in R^n\times S^{n-1};\ p_m(x,\xi) = 0\}$

est dite la variété caractéristique de l'opérateur $p(x,\partial)$. (Avec l'identification évidente on considère aussi que $V(p)\subset R^n\times \frac{1}{i}S^{*n-1}_{\infty}$.) L'opérateur $p(x,\partial)$ est inversible en dehors de sa variété caractéristique. En effet le symbole $1/p_m(x,\zeta)$ y définit d'abord un opérateur micro-différentiel $q(x,\partial)$ d'ordre $-m$. Alors $r(x,\partial) = 1-p(x,\partial)q(x,\partial)$ est d'ordre ≤ -1 comme on le voit facilement. Donc en vertu de la série de Neumann on peut construire le vrai inverse:

$$q(x,\partial)(1-r(x,\partial))^{-1} = q(x,\partial)\sum_{k=0}^{\infty}(r(x,\partial))^k.$$

Comme le corollaire on obtient le

<u>Théorème 3.5.5</u> Soit f une micro-fonction. On a alors

(3.36) $\quad \mathrm{supp}\ p(x,\partial)f \subset \mathrm{supp}\ f \subset \mathrm{supp}\ p(x,\partial)f\cup V(p).$

En particulier, soit f une hyperfonction et $p(x,\partial)$ un opérateur différentiel. On a alors (le théorème fondamental de Sato)

(3.37) $\quad S.S.p(x,\partial)f \subset S.S.f \subset S.S.p(x,\partial)f\cup V(p).$

On dit qu'un opérateur différentiel $p(x,\partial)$ est elliptique si $V(p) = \emptyset$. Alors (3.37) combiné avec le Théorème 3.1.8 nous donne le lemme de Weyl:

<u>Corollaire 3.5.6</u> Soit $p(x,\partial)$ un opérateur différentiel elliptique. Alors $p(x,\partial)f$ est analytique réel si et seulement si f est analytique réel.

<u>Exercice</u> Soit $f(x,t)$ une microfonction à support compact par rapport à t. Définir l'intégration par rapport à t: $\int f(x,t)dt$. Démontrer $\mathrm{supp}\int f(x,t)dt \subset (p_x{}^t dp_x)\mathrm{supp}\ f(x,t)$, où $p_x: R^{n+m}_{x,t}\to R^n_x$ est la projection et ${}^t dp_x$ le dual de la dérivée de l'application p_x (i.e. la restriction à $dt = 0$). (Indication: Prendre un représentant $f(x,t)$ en hyperfonction et appliquer le Théorème 3.2.8.)

<u>Exercice</u> On dit qu'un homomorphisme de faisceaux $p: B_X\to B_X$ (resp. $C_{X,\xi}$

$\to C_{x,\xi}$) de n variables x est continu s'il se relève à un homomorphisme $B_{x,t} \to B_{x,t}$ (resp. $C_{x,t,\xi,\theta} \to C_{x,t,\xi,\theta}$) pour des paramètres t quelconque, de sorte qu'il commute avec l'intégrale par rapport à t. Montrer qu'il existe alors $K(x,y)$, une hyperfonction (resp. microfonction) de 2n variables x, y telle que $\operatorname{supp} K(x,y) \subset \{x-y=0\}$ (resp. $\operatorname{supp} K(x,y) \subset \{(x,y,\xi,\eta);\ x-y=0,\ \xi=-\eta\}$, le fibré conormal de $x-y=0$ dans R^{2n}) de sorte qu'on a

$$pf(x) = \int K(x,y)f(y)dy.$$

(Considérer $p\delta(x-y)$.)