A. Kaneko

Chapitre II. Fonctions holomorphes de plusieurs variables

Cours de l'institut Fourier, tome 12 (1977-1978), p. 32-48
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1977-1978__12__32_0>

1. Propriétés élémentaires.

La définition suivante est une simple généralisation du cas d'une variable:

Définition 2.1.1 Soit $U \subset C^n$ un ouvert. Une fonction continue $F(z)$ sur U est dite holomorphe si elle est holomorphe en chaque variable z_j pour les autres variables z_k, $k \neq j$ fixes.

Enumérons d'abord les propriétés pareilles au cas d'une variable.

Théorème 2.1.2 (Formule de Cauchy) Soit $\gamma_j \subset U_j$, $j = 1,\dots,n$ des chemins fermés simples et homologues à zero dans $U_j \subset C$. Soit $F(z)$ holomorphe dans $U_1 \times \dots \times U_n$. Pour z_j à l'intérieur de γ_j, on a

$$(2.1) \qquad F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{F(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_1 \dots d\zeta_n .$$

En effet il suffit d'appliquer la formule de Cauchy ordinaire pour chaque variable une à une.

Considérons C^n comme R^{2n} avec les coordonnées $x_j = \operatorname{Re} z_j$ et $y_j = \operatorname{Im} z_j$. On écrira pour simplifier $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ de sorte que $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Corollaire 2.1.3 $F(z) \in C^\infty(U)$ et on a

$$(2.2) \qquad \frac{\partial^{|\alpha|} F(z)}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{F(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{\alpha_n+1}}\, d\zeta_1 \dots d\zeta_n ,$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$.

On désignera cette dérivée supérieure pour simplifier par $F^{(\alpha)}(z)$ ou par $\partial^\alpha F(z)$.

Exercice $F(z)$ est holomorphe si et seulement si $F(z) \in C^1(U)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} F(z) = 0$, $j = 1,\dots,n$, où

$$(2.3) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{(opérateur de Cauchy-Riemann).}$$

Théorème 2.1.4 Soit $\{F_k(z)\}$ une suite de fonctions holomorphes dans

$U \subset \mathbb{C}^n$. Supposons qu'elle converge localement uniformément dans U. Alors la fonction en limite $F(z)$ est encore holomorphe dans U. Aussi pour tout α, $F_k^{(\alpha)}(z)$ converge localement uniformément vers $F^{(\alpha)}(z)$.

Démonstration Pour chaque point a de U, on choisira un polydisque $\{|z_1-a_1| \leq r_1\} \times \cdots \times \{|z_n-a_n| \leq r_n\}$ contenu dans U et avec les contours $\gamma_j = \{|z_j-a_j| = r_j\}$ écrira la formule de Cauchy (2.1) pour $F_k(z)$. Puisque $F_k(\zeta)$ converge uniformément sur le compact $\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$, on peut passer à la limite en vertu du théorème de Weierstrass et on obtiendra la même formule pour la limite $F(z)$. Cela signifie que $F(z)$ est encore holomorphe au voisinage de a. La formule pour les dérivées (2.2) appliquée à $F_k(z)$ prouve la deuxième assertion. C.Q.F.D.

Théorème 2.1.5 $F(z)$ est holomorphe dans U si et seulement si au voisinage de chaque point $a \in U$, $F(z)$ admet le développement en série en puissance de $z-a$ convergeant uniformément au voisinage de a:

$$F(z) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}(z-a)^{\alpha};$$

où on emploie l'abréviation

$$(z-a)^{\alpha} = (z_1-a_1)^{\alpha_1} \ldots (z_n-a_n)^{\alpha_n}.$$

Les coefficients sont déterminés par $F(z)$ comme suit:

$$c_{\alpha} = F^{(\alpha)}(a)/\alpha!. \tag{2.4}$$

Démonstration Puisque les polynômes sont holomorphes, une fonction représentée par une série convergeante est holomorphe d'après le Théorème 2.1.4. Le même théorème admet de calculer les dérivées de $F(z)$ par la différentiation terme à terme et on aura

$$F^{(\alpha)}(z) = \sum_{\beta \geq \alpha} \frac{\alpha!}{(\beta-\alpha)!} c_{\beta}(z-a)^{\beta-\alpha},$$

où $\beta \geq \alpha$ désignant $\beta_1 \geq \alpha_1, \ldots, \beta_n \geq \alpha_n$. Donc on a en particulier (2.4).

Soit en réciproque $F(z)$ holomorphe dans U et soit $a \in U$. Choisissons un polydisque $\{|z_1-a_1| \leq r_1\} \times \cdots \times \{|z_n-a_n| \leq r_n\}$ dans U et écrivons la formule de Cauchy (2.1) pour $\gamma_j = \{|z_j-a_j| = r_j\}$. On a

$$\frac{1}{\zeta_j-z_j} = \frac{1}{(\zeta_j-a_j)-(z_j-a_j)} = \frac{1}{(\zeta_j-a_j)(1-(z_j-a_j)/(\zeta_j-a_j))} = \frac{1}{\zeta_j-a_j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_j-a_j}{\zeta_j-a_j}\right)^k,$$

la série convergeant uniformément par rapport à ζ_j, z_j tels que $\zeta_j \in \gamma_j$ et que $|z_j - a_j| \leq \rho_j < r_j$. On a donc $F(z) = \sum_\alpha c_\alpha (z-a)^\alpha$ avec

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \frac{F(\zeta)}{(\zeta_1 - a_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - a_n)^{\alpha_n+1}} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n = F^{(\alpha)}(a)/\alpha!.$$

Cette série converge uniformément sur $|z_1 - a_1| \leq \rho_1, \ldots, |z_n - a_n| \leq \rho_n$. C.Q.F.D.

Jusqu'ici la structure du produit C^n était fixe. Nous introduisons maintenant le changement de coordonnées.

Définition 2.1.6 Soit $F(z) = (F_1(z), \ldots, F_m(z))$ une application continue d'un ouvert $U \subset C^n$ dans C^m. On dit que $F(z)$ est holomorphe si ses composantes de coordonnées $F_j(z)$, $j = 1, \ldots, m$ sont des fonctions holomorphes dans U. Si $n = m$ et que $F(z)$ est un homéomorphisme entre U et V, F et F^{-1} étant holomorphes tous les deux, on dit que $F(z)$ est un changement de coordonnées.

Lemme 2.1.7 Si $F(z)$ est une application holomorphe de $U \subset C^n$ dans $V \subset C^m$ et $G(w)$ de V dans $W \subset C^\ell$, alors $G(F(z))$ est une application holomorphe de U dans W. En particulier, la notion de fonctions holomorphes ne dépend pas de coordonnées.

On peut le vérifier par la déformation d'une série absolument convergeante, ou par la différentiation de la fonction composée par rapport à $\bar{z}_j$.

Lemme 2.1.8 Si $F(z)$ est une application holomorphe de $U \subset C^n$ dans C^n dont le jacobien complexe $\det\left(\frac{\partial F_k}{\partial z_j}\right) \neq 0$ en $a \in U$, alors $F(z)$ est inversible et $F^{-1}(w)$ est encore holomorphe au voisinage de $F(a)$.

Démonstration En effet, puisque le jacobien de $F(z)$ en tant qu'une application différentiable est égal à

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_k}{\partial z_j} & \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial z_j} \\ \frac{\partial F_k}{\partial \bar{z}_j} & \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial \bar{z}_j} \end{pmatrix} = \left|\det\left(\frac{\partial F_k}{\partial z_j}\right)\right|^2 \neq 0 .$$

On sait l'existence de la réciproque différentiable $z = F^{-1}(w)$. On peut donc calculer $\frac{\partial F_k^{-1}(w)}{\partial \bar{w}_j}$. On a

$$0 = \frac{\partial z_k}{\partial \bar{z}_j} = \sum_\ell \frac{\partial F_k^{-1}(w)}{\partial w_\ell} \frac{\partial w_\ell}{\partial \bar{z}_j} + \sum_\ell \frac{\partial F_k^{-1}(w)}{\partial \bar{w}_\ell} \frac{\partial \bar{w}_\ell}{\partial \bar{z}_j}$$

Or on a $\frac{\partial w_\ell}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial F_\ell(z)}{\partial \bar{z}_j} = 0$ et que $\frac{\partial \bar{w}_\ell}{\partial \bar{z}_j} = \overline{\left(\frac{\partial w_\ell}{\partial z_j}\right)}$ forme une matrice régulière.

Donc on conclut que $\dfrac{\partial F_i^{-1}(w)}{\partial \bar{w}_\ell} = 0$. C.Q.F.D.

Le théorème de Cauchy a une version intrinsèque suivante:

Théorème 2.1.9 (Poincaré) Soit $F(z)$ holomorphe dans U. Soit $K \subset U$ une chaîne de dimension réelle $n+1$ orientable et régulière par morceaux. On a

$$\int_{\partial K} F(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = 0,$$

où on calcule l'intégrale dans le sens ordinaire sur l'espace euclidien réel $C^n \cong R^{2n}$ en considérant que $dz_j = dx_j + idy_j$, $j = 1,\ldots,n$.

En effet, on peut utiliser comme la base de 1-formes différentielles à valeurs complexes sur R^{2n} dz_1, $d\bar{z}_1,\ldots,dz_n$, $d\bar{z}_n$ au lieu de dx_1, $dy_1,\ldots,$ dx_n, dy_n. Le théorème de Stokes donne alors

$$\int_{\partial K} F(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n = \int_K d(F(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n).$$

Or on a

$$d(F(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n) = \sum_j \frac{\partial F}{\partial z_j} dz_j\wedge(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n) + \sum_j \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j} dz_j\wedge(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n)$$
$$= 0.$$

Considérons par exemple $\Delta_j = \{|z_j-a_j| \leq r_j\}$ et $\gamma_j = \partial\Delta_j$. On voit que le polycercle $\gamma_1 \times\cdots\times\gamma_n$ est le bord de chaque $(n+1)$-chaîne $\Delta_1\times\gamma_2\times\cdots\times\gamma_n$, $\ldots$, $\gamma_1\times\gamma_2\times\cdots\times\Delta_n$.

Il est clair que les fonctions holomorphes constituent un faisceau sur C^n. On le notera $\mathcal{O}$ comme dans le cas d'une variable.

2. Prolongement analytique

Nous examinons maintenant des propriétés particulières au cas de plusieurs variables. Dans le cas d'une variable, pour tout ouvert $U \subset C$ il existe un élément $F(z) \in \mathcal{O}(U)$ qui ne peut pas se prolonger nulle part au dela de U. Dans le cas de plusieurs variables ce n'est plus toujours vrai. On a, par exemple, le théorème suivant:

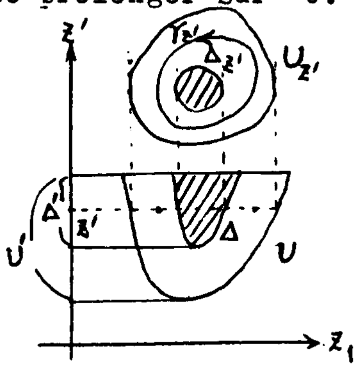
Théorème 2.2.1 (Hartogs) Soit U un ouvert connexe de C^n et Δ sa partie fermée. Supposons les propriétés suivantes:

a) $U \setminus \Delta$ est connexe.

b) Soient U', Δ' la projection de U resp. Δ sur l'espace C^{n-1} de coordonnées $z' = (z_2, \dots, z_n)$. Alors $U' \setminus \Delta'$ est non vide.

c) La projection $\Delta \longrightarrow \Delta'$ est propre, i.e., pour tout compact $K' \subset C^{n-1}$, $\Delta \cap C \times K'$ est encore compact.

Alors toute fonction $F(z)$ holomorphe dans $U \setminus \Delta$ peut se prolonger sur U.



Démonstration On choisit une courbe fermée $\gamma_{z'}$ dans chaque section $U_{z'} \setminus \Delta_{z'}$ de façon qu'elle est homologue à zéro dans $U_{z'}$. Posons

$$G(z_1, z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z'}} \frac{F(\zeta_1, z')}{\zeta_1 - z_1} \, d\zeta_1 .$$

Du fait que la projection $\Delta \to \Delta'$ est propre, on peut déformer le chemin $\gamma_{z'}$ de sorte qu'il est indépendant de z' au voisinage d'un point considéré de U'. Donc $G(z_1, z')$ devient une fonction holomorphe et univalente au voisinage de $\Delta_{z'} \times \{z'\}$, donc de Δ. En vertu du théorème de Cauchy on a $G(z_1, z') = F(z_1, z')$ pour $z' \in U' \setminus \Delta'$. Comme $U' \setminus \Delta'$ est un ouvert et $U \setminus \Delta$ est connexe, on a l'unicité du prolongement et on conclut que $G = F$ une fois qu'elles sont toutes définies. Donc G est le prolongement cherché. C.Q.F.D.

Exercice Enoncer et démontrer la version du principe du prolongement analytique au cas de plusieurs variables.

Corollaire 2.2.2 Soit K un compact dans un ouvert $U \subset C^n$ $(n \geq 2)$.

a) Si F est holomorphe dans $\underbrace{U \setminus K}_{\text{(qu'on suppose connexe)}}$, elle en est dans U.

b) Si F est holomorphe dans U et $\{F(z) = 0\} \subset K$, alors $F \neq 0$ dans U.

En effet il suffit d'appliquer le théorème à $1/F(z)$ qui est manifestement holomorphe où $F(z) \neq 0$.

Cet exemple de prolongement, bien qu'il apparaisse très partiel, se trouve en effet utile en combinaison avec le changement de coordonnées. On a par exemple le

Théorème 2.2.3 (Hörmander) Soit

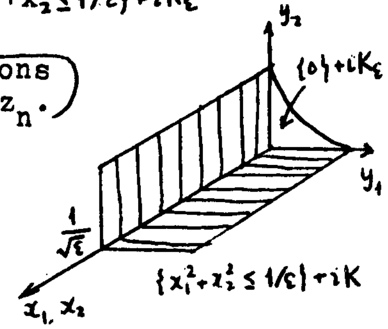
$$K = \{(y_1,0,\dots,0);\ 0\le y_1\le 1\}\cup\{(0,y_2,0,\dots,0);\ 0\le y_2\le 1\}\subset R^n_y,$$

et, avec $0<\varepsilon<1/2$, soit

$$K_\varepsilon = \{(y_1,y_2,0,\dots,0);\ y_1\ge 0,\ \ y_2\ge 0,\ \ y_1+y_2\le 1,\ \ y_1+y_2-\varepsilon(y_1^2+y_2^2)\le 1-\varepsilon\}\subset R^n_y.$$

Alors toute fonction holomorphe au voisinage de $\underbrace{\{x_1^2+x_2^2\le 1/\varepsilon\}}_{,x_3=\dots=x_n=0}+\ iK$ se prolonge au voisinage de $\{0\}+iK_\varepsilon$.

<u>Démonstration</u> On essaye de le ramener au Théorème 2.2.1 par un changement de coordonnées convenable au voisinage de $\{x_1^2+x_2^2\le 1/\varepsilon, x_3=\dots=x_n=0\}+iK_\varepsilon$. Posons (Pour simplifier omettons les variables $z_3,\dots,z_n$.)



$$(2.5)\qquad \begin{cases} w_1 = z_1 \\ w_2 = z_1+z_2+i\varepsilon(z_1^2+z_2^2)\,. \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial(w_1,\dots,w_n)}{\partial(z_1,\dots,z_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 1+2i\varepsilon z_1 \\ 0 & 1+2i\varepsilon z_2 \end{vmatrix} = 1+2i\varepsilon z_2 \neq 0,$$

puisque $\mathrm{Re}(1+2i\varepsilon z_2) = 1-2\varepsilon y_2 > 0$ dans $\{x_1^2+x_2^2\le 1/\varepsilon\}+iK_\varepsilon$. De plus, (2.5) est globalement injectif dans cette région. En effet l'équation pour z_2 s'écrit

$$z_2^2+\frac{1}{i\varepsilon}z_2+w_1^2+\frac{w_1-w_2}{i\varepsilon} = 0,$$

donc si une des solutions $z_2^{(1)}$ est contenue dans cette région, l'autre $z_2^{(2)} = -\frac{1}{i\varepsilon}-z_2^{(1)}$ ne peut pas, car

$$\mathrm{Im}\, z_2^{(1)}\le 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}\, z_2^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon}-\mathrm{Im}\, z_2^{(1)} \ge \frac{1}{\varepsilon}-1 > 1.$$

Il reste à montrer que la section $w_2 = \mathrm{Cte}$ satisfait aux propriétés du Théorème 2.2.1. Pour cela considérons la famille de surfaces

$$(2.6)\qquad z_1+z_2+i\varepsilon(z_1^2+z_2^2) = i\lambda(1-\varepsilon),\qquad 0\le \mathrm{Re}\lambda\le 1.$$

Pour $\lambda=0$ elle passe l'origine mais n'entre pas à l'intérieur de $\{x_1^2+x_2^2\le 1/\varepsilon\}+iK_\varepsilon$, car là on a

$$\mathrm{Im}\{z_1+z_2+i\varepsilon(z_1^2+z_2^2)\} = y_1+y_2+\varepsilon(x_1^2+x_2^2)-\varepsilon(y_1^2+y_2^2)\ge (1-\varepsilon)(y_1^2+y_2^2)+\varepsilon(x_1^2+x_2^2) > 0.$$

Quand on fait varier λ dans $0\le\lambda\le 1$, la famille recouvre l'ensemble $\{0\}+iK_\varepsilon$, puisque l'équation pour $z_j = iy_j$ se réécrit:

$$y_1 + y_2 - \varepsilon(y_1^2+y_2^2) = \lambda(1-\varepsilon).$$

Donc il suffit de vérifier que les surfaces (2.6) ne coupent pas la partie de la frontière de $\{x_1^2+x_2^2 \le 1/\varepsilon\} + iK_\varepsilon$ telle que $x_1^2+x_2^2=1/\varepsilon$

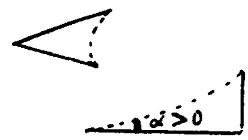
En prenant la partie imaginaire de l'équation (2.6) on obtient

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &= \frac{1}{\varepsilon}\{\varepsilon(y_1^2+y_2^2)-(y_1+y_2)+\mathrm{Re}\lambda(1-\varepsilon)\} \le \frac{1}{\varepsilon}\{(\varepsilon-1)(y_1+y_2)+\mathrm{Re}\lambda(1-\varepsilon)\} \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}(\mathrm{Re}\lambda-y_1-y_2) \le \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

Donc

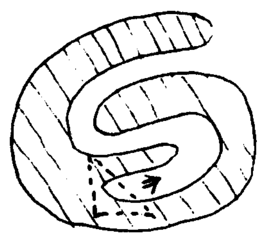
on conclut qu'on peut appliquer le Théorème 2.2.1. C.Q.F.D.

Remarque Par le changement de coordonnées convenable on peut modifier la longueur des côtés et l'angle entre eux. Notons que la partie du cercle $y_1+y_2-\varepsilon(y_1^2+y_2^2) = 1-\varepsilon$ et les côtés se rencontrent à un angle positif. Ce cercle devient de plus en plus plan lorsque ε tend vers 0 ou plus généralement lorsque la raison de la longueur des côtés et celle de l'épine tend vers 0.



Avec ce remarque notre théorème a des conséquences importantes comme suit:

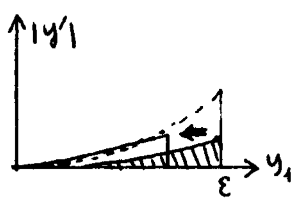
Corollaire 2.2.4 (Bochner) Soit Δ un ouvert connexe dans R^n et $\widehat{\Delta}$ son enveloppe convexe. Dans ce cas toute fonction $F(z)$ holomorphe dans $R^n + i\Delta$ peut se prolonger jusqu'à $R^n + i\widehat{\Delta}$.



En effet on peut manger le creux petit à petit en appliquant le Théorème 2.2.3. Il faut faire attention pour conserver la uniformité du prolongement!

Corollaire 2.2.5 (Kashiwara) Soit $F(z)$ holomorphe au voisinage de $\{|x|<1\} + i\{(y_1,0,\dots,0);\ 0<y_1<\varepsilon\}$. Alors pour tout $\delta<1$ il existe $K_\delta > 0$ tel que $F(z)$ est holomorphe dans

$$\{|x|<\delta\} + i\,\{y;\ K_\delta|y'| < y_1 < \delta\varepsilon\}.$$



Il suffit de préparer un coin approprié par rotation et l'enfoncer petit à petit vers l'origine.

Pour formuler le troisième résultat préparons nous quelques notions. On considère un cône ouvert Γ dans R^n_y. Sans le préciser on supposera dorénavant que le sommet de Γ est à l'origine. Soit Δ un autre cône ouvert. On dit que Δ est un sous cône propre de Γ et note $\Delta \subset\subset \Gamma$ si $\overline{\Delta \cap \{|y| = 1\}} \subset \Gamma$.

Définition 2.2.6 Soit $\Omega \subset R^n$ un ouvert et soit Γ un cône ouvert dans R^n_y. On dit qu'un ouvert $U \subset C^n$ est un coin infinitésimal de type $\Omega + i\Gamma 0$ s'il satisfait aux propriétés suivantes:

a) $U \subset \Omega + i\Gamma$,

b) Pout tout sous cône propre $\Delta \subset\subset \Gamma$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$U \supset \Omega_\varepsilon + i[\Delta \cap \{|y| < \delta\}],$$

où $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega;\ \mathrm{dis}(d, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. La partie Ω de la frontière de U est dite le tranchant de ce coin infinitésimal.

Pour simplifier on désignera dorénavant un coin infinitésimal de type $\Omega + i\Gamma 0$ par le même symbole $\Omega + i\Gamma 0$ sans faire préciser sa vraie région.

Corollaire 2.2.7 Soit $F(z)$ holomorphe dans un coin infinitésimal $\Omega + i\Gamma 0$. Alors elle se prolonge à un autre coin infinitésimal $\Omega + i\widehat{\Gamma} 0$, où $\widehat{\Gamma}$ désigne l'enveloppe convexe de Γ.

Démonstration Dans ce cas la longueur de l'épine est limitée contrairement au Corollaire 2.2.4. Mais quand on s'approche du tranchant du coin, la raison de la longueur des côtés et de l'épine tend vers zéro. Donc en utilisant Théorème 2.2.3 on obtient le prolongement à un domaine "approximativement convexe". C.Q.F.D.

3. Domaines d'holomorphie

Dans le cas de plusieurs variables les ouverts ayant la même propriété que les ouverts de C jouent un rôle très important. Nous donnerons dans ce paragraphe des caractérisations de tels ouverts. Nous appellerons un ouvert connexe dans C^n un domaine.

Définition 2.3.1 Un domaine $U \subset C^n$ est dit domaine d'holomorphie si pour tout point $z \in \partial U$ il existe un élément $F(z) \in \mathcal{O}(U)$ qui ne peut pas se prolonger au voisinage de z.

Exemple 2.3.2 Soit U un domaine. Soient $F_1(z),\dots,F_N(z) \in \mathcal{O}(U)$. Un sous domaine ~~borné~~ relativement compact de U défini comme une composante connexe de l'ouvert

$$\{z \in U;\ |F_1(z)| < 1,\dots,\ |F_N(z)| < 1\} \tag{2.7}$$

est appelé un polyèdre analytique dans U. Il est un domaine d'holomorphie. En effet soit a un point à la frontière de (2.7). On a $F_j(a) = e^{i\theta}$ pour un certain j et θ réel. Alors $1/(F_j(z)- e^{i\theta})$ sera une fonction non prolongeable.

Exercice Démontrer que tout domaine $U \subset C$ est domaine d'holomorphie. Pourquoi la démonstration ne marche plus dans le cas de plusieurs variables?

Définition 2.3.3 Un domaine U est dit holomorphiquement convexe si pour tout compact $K \subset U$ son enveloppe holomorphe $\hat{K}$ dans U défini ci-dessous est encore compact:

$$\hat{K} = \{z \in U;\ |F(z)| \leq \sup_{\zeta \in K} |F(\zeta)| \text{ pour tout } F(z) \in \mathcal{O}(U)\}. \tag{2.8}$$

Lemme 2.3.4 $\hat{K} \subset \widehat{K}$, donc un domaine convexe est holomorphiquement convexe.

Démonstration Il suffit de démontrer l'assertion suivante:

$$K \subset \{ax+by \leq c\} \Rightarrow \hat{K} \subset \{ax+by \leq c\},$$

où ax est l'abréviation de $a_1x_1+\dots+a_nx_n$ etc. Notons que $ax+by \leq c$ est équivalent à $|e^{(a-bi)z-c}| \leq 1$. Puisque $e^{(a-bi)z-c} \in \mathcal{O}(U)$, l'assertion découle de la définition de $\hat{K}$. C.Q.F.D.

Théorème 2.3.5 (Cartan-Thullen) Les énoncés suivants sont équivalents:

a) U est un domaine d'holomorphie.

b) U est holomorphiquement convexe.

c) U est rapproché par des polyèdres analytiques de l'intérieur: $D_k \nearrow U$.

d) Il existe une fonction $F(z) \in \mathcal{O}(U)$ qui ne peut se prolonger nulle part au dela de ∂U.

<u>Démonstration</u> a) $\Rightarrow$ b) Supposons qu'il existe $K \subset U$ tel que $\hat{K}$ ne soit pas compact. Puisque $\hat{K}$ est borné d'après le Lemme 2.3.4, K contient dans ce cas une suite de points qui converge vers un point de ∂U. Donc il existe $a \in \hat{K}$ tel que

$$\mathrm{dis}(a, \partial U) < \frac{1}{3}\rho, \qquad \rho = \mathrm{dis}(K, \partial U),$$

où on utilise comme la métrique celle du type produit:

$$\mathrm{dis}(A,B) = \inf\{\sup_{1 \leq j \leq n} |a_j - b_j| \; ; \; a \in A, \; b \in B\}.$$

Soit $F(z)$ un élément quelconque de $\mathcal{O}(U)$. Considérons le développement de Taylor de $F(z)$ en a. Par la définition de $\hat{K}$, les coefficients $c_\alpha = F^{(\alpha)}(a)/\alpha!$ satisfont à

$$|c_\alpha| = \frac{|F^{(\alpha)}(a)|}{\alpha!} \leq \frac{1}{\alpha!} \sup_{z \in K} |F^{(\alpha)}(z)|.$$

Or, d'après le Corollaire 2.1.3 on a

$$|F^{(\alpha)}(z)| = \left| \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} \oint_{|\zeta_1 - z_1| = \frac{2}{3}\rho} \cdots \oint_{|\zeta_n - z_n| = \frac{2}{3}\rho} \frac{F(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{\alpha_n+1}} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n \right|.$$

$$\leq \frac{\alpha!}{(\frac{2}{3}\rho)^{|\alpha|}} \sup\{|F(\zeta)| \; ; \; |\zeta_j - z_j| \leq \tfrac{2}{3}\rho, \; j = 1, \ldots, n\},$$

donc

$$|c_\alpha| \leq \frac{\sup\{|F(\zeta)| \; ; \; \mathrm{dis}(\zeta, K) \leq \frac{2}{3}\rho\}}{(\frac{2}{3}\rho)^{|\alpha|}} = \frac{M}{(\frac{2}{3}\rho)^{|\alpha|}}.$$

Donc la série entière $\sum c_\alpha (z-a)^\alpha$ converge dans le polydisque $\{|z_j - a_j| < \frac{2}{3}\rho, \; j = 1, \ldots, n\}$ ce qui contient un voisinage d'une partie de ∂U. Ainsi toute $F(z)$ ayant le prolongement, U ne serait pas domaine d'holomorphie.

b) $\Rightarrow$ c) Soit K un compact de U. Choisissons un sous domaine relativement compact $V \subset U$ tel que $\hat{K} \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Pour chaque point z de

∂V, il existe $F(z) \in \mathcal{O}(U)$ tel que

$$|F(z)| > \sup_{\zeta \in K} |F(\zeta)| .$$

Notons que cette inégalité a lieu au voisinage de z. Puisque ∂V est compact, on peut choisir un nombre fini de telles fonctions $F_1(z), \ldots, F_N(z)$ et $\varepsilon > 0$ de façon que sur ∂V on a

$$|F_j(z)| \geq (1+\varepsilon) \sup_{\zeta \in K} |F_j(\zeta)|$$

pour un certain j. Posons

D = la composante connexe de $\{z \in V;\ |F_j(z)| < (1+\varepsilon)\sup_{\zeta \in K}|F_j(\zeta)|,\ j=1,\ldots,N\}$ contenant K.

On a ainsi trouvé un polyèdre analytique D tel que $K \subset D \subset U$. On peut répéter ce procédé pour construire une suite $D_k \nearrow U$.

c) $\Rightarrow$ d) Soit $D_k \nearrow U$ une suite de polyèdres analytiques épuisant U. Supposons que

D_k = la composante connexe contenant $\overline{D_{k-1}}$ de $\{z \in U;\ |F_{k,j}(z)| < 1, j=1,\ldots,N_k\}$

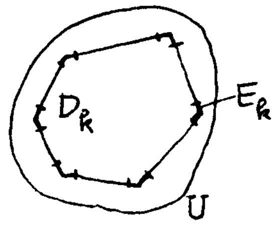
Fixons k et soit $E_k \subset \partial D_k$ un petit voisinage du sous ensemble de ∂D_k où au moins deux égalités $|F_{k,j}(z)| = 1$ ont lieu. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe m tel que le module de la fonction

$$(F_{k,1}(z))^m + \ldots + (F_{k,N_k}(z))^m$$

est $< \varepsilon$ sur $\overline{D_{k-1}}$ et $> 1-\varepsilon$ sur $\partial D_k \setminus E_k$, car sur $\partial D_k \setminus E_k$ les $F_{k,j}(z)$ sauf une ont de petits modules. En modifiant cette fonction par un facteur constant on peut construire par récurrence une suite de fonctions $G_k(z)$ comme suit:

$$|G_k(z)| \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{sur } \overline{D_{k-1}}$$

$$|G_k(z)| \geq 2^k + \sum_{j=1}^{k-1} \sup_{\zeta \in \partial D_k} |G_j(\zeta)| \quad \text{sur } \partial D_k \setminus E_k .$$



La fonction $G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(z)$ appartient à $\mathcal{O}(U)$. Sur $\partial D_k \setminus E_k$ on a

$$|G(z)| \geq |G_k(z)| - \sum_{j=1}^{k-1} |G_j(z)| - \sum_{j=k+1}^{\infty} |G_j(z)| \geq 2^k - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \longrightarrow \infty \quad (k \to \infty)$$

On peut choisir E_k de façon que chaque point de ∂U est dans l'adhérence de la suite d'ensembles $\{\partial D_k \setminus E_k\}$. Alors $G(z)$ n'est pas bornée au voisinage de chaque point de ∂U, donc elle ne peut se prolonger nulle part.

d) $\Rightarrow$ a) est banal. C.Q.F.D.

Corollaire 2.3.6 Un domaine convexe est un domaine d'holomorphie.

Etudions la stabilité de domaines d'holomorphie pour quelques opérations. Pour cela il est commode d'enlever la condition de connexité. Nous dirons donc qu'un ouvert $U \subset C^n$ est un ouvert de Stein si ses composantes connexes sont des domaines d'holomorphie.

Proposition 2.3.7 a) Soit U_1, U_2 des ouverts de Stein. Alors $U_1 \cap U_2$ en est aussi. Plus généralement, soit U_λ, $\lambda \in \Lambda$ une famille quelconque d'ouverts de Stein. Alors l'intérieur de $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ est encore un ouvert de Stein.

b) Soient $U_1 \subset C^n$ et $U_2 \subset C^m$ des ouverts de Stein. Alors $U_1 \times U_2 \subset C^n \times C^m$ est un ouvert de Stein.

c) Soit $U \subset C^n$ un ouvert de Stein. Alors $U \cap \{z_1 = 0\}$ est un ouvert de Stein dans C^{n-1}.

Démonstration b) et c) se démontrent par exemple en vérifiant la condition c) du Théorème 2.3.5 grâce à la stabilité correspondante du polyèdre analytique. Il en est de même de l'assertion a) dans le cas d'une intersection finie. Considérons-la pour une intersection quelconque. Sans perdre la généralité on peut supposer que $U = \mathrm{Int} \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ est connexe. Montrons donc qu'il est holomorphiquement convexe. Soit K un compact dans U. Désignons par $\hat{K}_U$ (resp. $\hat{K}_{U_\lambda}$) l'enveloppe holomorphe de K en tant qu'un compact de U (resp. U_λ). On a évidemment $\hat{K}_U \subset \hat{K}_{U_\lambda}$, d'où $\hat{K}_U \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{K}_{U_\lambda}$ et ce dernier est un compact dans $\overline{U}$. Il suffit donc de démontrer que $\bigcap_\lambda \hat{K}_{U_\lambda} \subset U$. La démonstration de a) $\Rightarrow$ b) du Théorème 2.3.5 alors montre que

$$\mathrm{dis}(\bigcap_\lambda \hat{K}_{U_\lambda}, \partial U_\lambda) \geq \mathrm{dis}(\hat{K}_{U_\lambda}, \partial U_\lambda) \geq \frac{1}{3}\,\mathrm{dis}(K, \partial U_\lambda) \geq \frac{1}{3}\,\mathrm{dis}(K, U).$$

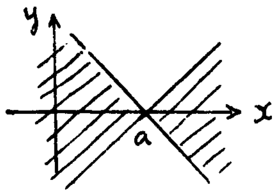
(En effet il est connu que le facteur 1/3 peut être remplacé par 1.) Ainsi $\bigcap_\lambda \hat{K}_{U_\lambda}$ ne peut pas toucher ∂U. C.Q.F.D.

Il est clair que l'image d'un ouvert de Stein par un changement de coordonnées est aussi un ouvert de Stein. Ainsi on obtient des exemples assez abondants d'ouverts de Stein à partir d'ouverts dans C et moyennant les opérations énumérées. Il faut signaler cependant que la réunion de deux ouverts de Stein n'en est plus nécessairement un. On reviendra plus tard à une situation de réunion.

4. Domaines pseudoconvexes

Pour le fondement de la théorie des hyperfonctions joue un rôle important le théorème de Grauert qui prétend qu'un sous ensemble localement fermé S de R^n admet un système de voisinages complexes fondamentaux formé d'ouverts de Stein. Pour sa démonstration nous introduisons ici une nouvelle technique de construction d'ouverts de Stein. C'est la notion d'ouverts pseudoconvexes. Nous nous limiterons au minimum nécessaire.

Remarque Il est facile de construire au moins un voisinage de Stein de S. En effet



$$\{|e^{-(z-a)^2}|<1\} = \{z=x+iy;\ (x-a)^2 > y^2\},$$

$$\{|e^{-ibz}|< M\} = \{z=x+iy;\ by < \log M\}$$

sont évidemment des ouverts de Stein. Donc en faisant parcourir a et b de façon convenable et prenant l'interieur de l'intersection de tous ces ouverts, on obtient grâce à la Proposition 2.3.7 a) un voisinage de Stein de S. Il est clair que dans le cas où S est compact cette construction nous fournit même un système de voisinages de Stein fondamentaux. J'ignore si dans le cas général on peut se débrouiller ainsi sans notion de la pseudoconvexité.

Définition 2.4.1 Soit $\varphi(z)$ une fonction à valeurs réelles de classe C^2 définie dans un ouvert de $C^n = R^{2n}$. On dit que $\varphi(z)$ est strictement plurisousharmonique (s-psh par abréviation) si la hessienne complexe $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right)$ est une matrice positive pour chaque point (i.e. si $\sum_{j,k} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\zeta_j\bar{\zeta}_k > 0$ pour tout vecteur complexe $\zeta \neq 0$).

Ici comme toujours $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$. Notons que la matrice ci-dessus est toujours hermitienne.

Lemme 2.4.2 Soit $\varphi(z)$ une fonction s-psh et soit $\chi(t)$ une fonction de classe C^2 convexe et strictement croissante ($\chi'(t) > 0$, $\chi''(t) \geq 0$) sur l'image numérique de $\varphi(z)$. Alors $\chi(\varphi(z))$ est encore s-psh.

En effet on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \chi(\varphi(z)) = \chi''(\varphi(z)) \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_k} + \chi'(\varphi(z)) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}.$$

Proposition 2.4.3 Soit $\varphi(z)$ une fonction s-psh. Soit $z = z(t)$ une application holomorphe non constante de $\{t \in \mathbb{C};\ |t| \leq \varepsilon\}$ dans le domaine de définition de φ. Alors $\varphi(z(t))$ satisfait à $\Delta \varphi(z(t)) \geq 0$ (où Δ est le laplacien en Re t et Im t) et à

$$\varphi(z(0)) < \sup_{|t|=\varepsilon} \varphi(z(t)) \quad \text{(principe de maximum)}$$

Démonstration On a

$$\frac{1}{4} \Delta \varphi(z(t)) = \partial_t \partial_{\bar{t}} \varphi(z(t)) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} z_j'(t) \overline{z_k'(t)} \geq 0,$$

où l'inégalité stricte a lieu sauf un nombre fini de valeurs de t. On a donc en vertu de la formule de Green

$$0 < \int_{|t| \leq \varepsilon} \frac{1}{2\pi} \log\frac{\varepsilon}{|t|} \Delta \varphi(z(t)) d(\mathrm{Re}\ t) d(\mathrm{Im}\ t)$$
$$= -\varphi(z(0)) + \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{|t|=\varepsilon} \varphi(z(t)) |dt|. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Définition 2.4.4 Un domaine borné U qui s'écrit à la forme de $U = \{\varphi(z) < 0\}$ avec une fonction s-psh au voisinage de $\overline{U}$ est dit fortement pseudoconvexe. Un domaine est dit pseudoconvexe s'il est approché par une suite croissante de sous domaines fortement pseudoconvexes. On utilisera le même adjectif pour un ouvert non nécessairement connexe ayant cette propriété.

Exercice Un domaine d'holomorphie est pseudoconvexe. (Modifier un polyèdre analytique $D = \{ |f_j(z)| < 1,\ j=1,\dots,N\}$ à un domaine fortement pseudoconvexe: On a $\left\{ \sum_{j=1}^{N} |f_j(z)|^2 + \varepsilon |z|^2 < 1 \right\} \subset D \subset \left\{ \sum_{j=1}^{N} |f_j(z)|^{2k} + \varepsilon |z|^2 < N+R \right\} \subset\subset U$, où $|z|^2 = |z_1|^2 +$

$|z_2|^2+\ldots+|z_n|^2$, $R = \sup\{\varepsilon|z|^2;\ z\in D\}$ et $k \gg 1$.)

Réciproquement un domaine pseudoconvexe est un domaine d'holomorphie. C'est comme on dit le problème de E.E.Levi, posé par lui sous une forme un peu différente et résolu pour la première fois par K.Oka. Nous reviendrons à ce problème ultérieurement et pour le moment nous contentrons de la réciproque partielle suivante:

Théorème 2.4.5 Soit $U = \{\varphi(z) < 0\}$ un domaine fortement pseudoconvexe. Il existe alors $r > 0$ tel que pour tout point $a \in \partial U$ $U \cap \{|z-a| < r\}$ soit un domaine d'holomorphie.

Démonstration Soit $b \in \partial U \cap \{|z-a| \le r\}$. En supposant r assez petit, nous allons construire un polynôme quadratique $f(z)$ tel que

$$\{f(z) = 0\} \cap \bar{U} \cap \{|z-a| \le r\} = \{b\}.$$

Ainsi $1/f(z)$ étant un élément de $\mathcal{O}(U \cap \{|z-a| < r\})$ non prolongeable au voisinage de b, cela achèvera la démonstration. Posons $\zeta = z - b$. Ecrivons d'après Taylor

$$\varphi(b+\zeta) = 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(b)\zeta_j + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(b+\theta\zeta)\zeta_j\zeta_k\right\} + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(b+\theta\zeta)\zeta_j\bar{\zeta}_k,$$

où $0 < \theta < 1$. Puisque φ est s-psh, il existe $M > 0$ tel que

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}(b+\theta\zeta)\zeta_j\bar{\zeta}_k \ge M|\zeta|^2.$$

D'autre part les dérivées secondes de φ sont uniformément continues dans un voisinage compact de U. Donc si on choisit r suffisamment petit, pour b, z dans $\{|z-a| \le r\}$ on obtient

$$\left|\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(b+\theta\zeta)\zeta_j\zeta_k - \sum\frac{\partial\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(b)\zeta_j\zeta_k\right| \le \frac{M}{2}|\zeta|^2.$$

On a donc dans $\{|z-a| \le r\}$

$$\varphi(b+\zeta) \ge 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(b)\zeta_j + \sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_j\partial z_k}(b)\zeta_j\zeta_k\right\} + \frac{M}{2}|\zeta|^2.$$

Prenons donc comme $f(z)$ le polynôme quadratique dans le paranthèse avec ζ remplacé par $z - b$. Alors $f(z) = 0$ pour $z \ne b$ dans $\{|z-a| \le r\}$ impliquera $\varphi(z) \ge \frac{M}{2}|z-b|^2 > 0$. C.Q.F.D.

Corollaire 2.4.6 Soit $\varphi(z)$ une fonction s-psh. Alors pour c assez petit l'ouvert $\{\varphi(z) < c\}$ est un ouvert de Stein.

En effet il suffit que cet ensemble soit contenu dans une boule de rayon r choisi comme ci-dessus.

Théorème 2.4.7 (Grauert) Un sous ensemble localement fermé de R^n admet un système de voisinages complexes fondamentaux formé d'ouverts pseudoconvexes.

Démonstration Il suffit évidemment de démontrer pour un ouvert Ω de R^n. Soit $U \supset \Omega$ un voisinage complexe quelconque. Nous allons construire une fonction s-psh au voisinage de Ω sous la forme d'une somme $\varphi(z) + (1-\psi(z))^{-1}$.

1ère étape Construction de $\varphi(z)$. Nous choisissons d'abord une fonction $\varphi_1(z) \in C^2(U)$ telle que $\{z \in U;\ \varphi_1(z) < c\} \subset\subset U$ pour tout $c \in R$ moyennant la partition de l'unité. Soit $a(x)$ une fonction réelle positive définie dans Ω. Alors la fonction $\varphi_2(z) = a(\mathrm{Re}\ z)\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Im}\ z_j)^2$ satisfait à

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x) = a(x)\delta_{jk}, \quad \text{pour} \quad z = x \in \Omega.$$

Donc si on choisit $a(x)$ suffisamment grand vis-àvis du module des dérivées secondes de $\varphi_1(z)$ sur Ω, $\varphi(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$ deviendra s-psh dans un voisinage $V \subset U$ de Ω.

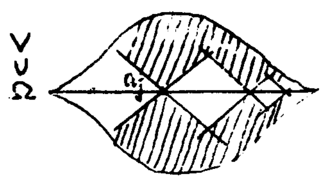
2e étape Construction de $\psi(z)$. Dorénavant nous considérons dans V. Pour $a \in \Omega$, posons

$$\psi_a(z) = \max\{0, 2\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Im}\ z_j)^2 - \sum_{j=1}^{n}(\mathrm{Re}\ z_j - a_j)^2\}.$$

Soit $\chi(t) \in C^\infty(R)$ une fonction réelle telle que $\chi(t) \equiv 0$ pour $t \leq 0$, $\chi'(t) > 0$, $\chi''(t) \geq 0$ pour $t > 0$. Alors $\chi(\psi_a(z))$ est une fonction de classe C^∞ non négative et d'après le Lemme 2.4.2 elle est s-psh où elle est non nulle. Posons

$$V_a = \{z \in V;\ \chi(\psi_a(z)) > 0\}.$$

En choisissant a_j, $j = 1,2,\ldots$ de façon convenable on peut obtenir la situation suivante: $\{V_{a_j}\}$ sont localement finis et $\partial(V \setminus \bigcup_j V_{a_j}) \cap \partial V = \partial\Omega$. Posons alors



$$\psi(z) = \sum_j c_j \chi(\psi_{a_j}(z))$$

avec $c_j > 0$ suffisamment grands. Cette fonction est alors s-psh où elle est non nulle et $\{z \in V;\ \psi(z) < 1\} \cap \partial V = \partial\Omega$.

Conclusion Posons donc $W = \{z \in V;\ \psi(z) < 1\}$. Alors W est un voisinage complexe de Ω. La fonction $\varphi(z) + (1-\psi(z))^{-1}$ est s-psh partout dans W. (Le Lemme2.4.2 s'applique à la fonction $1/(1-t)$.) Il est évident que $\{\varphi(z) + (1-\psi(z))^{-1} < c\} \subset\subset W$ pour tout $c \in R$ et que pour $c \to \infty$ il s'approche de W. C.Q.F.D.