ISRAËL HALPERIN

Théorie des espaces hilbertiens

Cours de l'institut Fourier, tome 6 (1972)
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1972__6__1_0>

1. TERMINOLOGIE

(1.1) Scalaires numériques.

Dans l'étude de la géométrie de l'espace physique, on utilise le modèle mathématique $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire $(y|x) = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3$; dans la théorie de la relativité restreinte, on utilise le modèle $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire $(y|x) = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 - y_4x_4$. D'autres études ont inspiré les mathématiciens à étudier un espace vectoriel sur les scalaires ou réels, ou complexes, (ou bien plus généraux) muni d'une fonction $(y|x)$ qui est supposée posséder certaines propriétés à cause desquelles la fonction $(y|x)$ est appelée : produit scalaire. Dans ce livre, les scalaires sont généralement numériques, notés $\mathbb{K}$, i.e. ou $\mathbb{R}$, les nombres réels, ou $\mathbb{C}$ les nombres complexes ou $\mathbb{H}$, les nombres quaternioniques $q = a + ib + jc + kd$ $(a,b,c,d$ réels$)$. Le produit d'un vecteur v par un scalaire a s'écrit va (on n'écrit pas av, sauf quand a est scalaire central, dans d'autres conditions il y a des ennuis).

(1.2) Fonction veut dire : ensemble f de couples (y,x) avec la propriété de fonction : (y,x) et $(z,x) \in f$ entraîne $y = z$.

$(y,x) \in f$ s'écrit aussi $x \xmapsto{f} y$, $x \mapsto y$, $y = f(x)$, $y = fx$; y est appelé valeur de f à x.

L'ensemble où f est défini, $\{x | \exists y\ ,\ (y,x) \in f\}$, est noté Df. L'ensemble des valeurs de f, $\{y | \exists x\ ,\ (y,x) \in f\}$, est noté Vf. Extension g de f, et restriction f de g, veut dire : $f \subset g$. Si $M \subset Dg$ l'ensemble $\{(y,x) \in g | x \in M\}$ est une restriction de g, notée $g|M$ et appelée la restriction de g à M.

Fonctionnelle veut dire : fonction à valeurs scalaires.

(1.3) Opérateur (aussi transformation, graphe) veut dire : un triplet (f,Y,X), écrit aussi $f : X \curvearrowright Y$ ou simplement f, tel que f est une fonction, $X \supset Df$, et $Y \supset Vf$.

Opérateur défini partout (aussi *application*) écrit $f : X \to Y$, veut-dire : $X = Df$.

Extension $g : X \curvearrowright Y$ de $f : X_1 \curvearrowright Y_1$, et *restriction* f de g , veut-dire : $f \subset g$, $X_1 \subset X$ et $Y_1 \subset Y$ (le cas échéant, on insiste pour que $X_1 = X$ et $Y_1 = Y$). On écrit $f \subset g$ pour extension de fonction et aussi pour extension d'opérateur.

(1.4) Soit Y, X des espaces vectoriels. Un opérateur $f : X \curvearrowright Y$ est appelé *linéaire* si Df est un sous-espace vectoriel de X et $f(xa+y) = f(x)a + f(y)$ (autrement dit, f est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $Y \times X$), *linéaire-conjugué* si Df est un sous-espace vectoriel de X et $f(xa+y) = \bar{a}f(x)+f(y)$ (si les scalaires sont quaternioniques, on insiste pour que f soit une fonctionnelle).

Noyau de f est l'ensemble $\{x \mid f(x)=0\}$, noté Nf . Si f est linéaire ou linéaire-conjugué Nf est un sous-espace vectoriel de X .

(1.5) *Opérateur fermé* $f : X \curvearrowright Y$ veut-dire : X et Y sont des espaces topologiques et f est fermé dans l'espace topologique $Y \times X$. Si Y, X sont des espaces vectoriels normés alors f fermé est équivalent à la propriété : $x_n \to u$, $f(x_n) \to v$ entraîne que $u \in Df$ et $f(u) = v$. *Attention* : f fermé n'entraîne ni que Df ou Vf sont fermés, ni que f est continu, et f continu n'entraîne pas que f est fermé ; par contre, f est fermé si f est continu et Df est fermé, et (théorème du graphe fermé) si f est linéaire et fermé et Df est fermé alors f est continu. Si f est fermé, forcément Nf est fermé.

(1.6) *Norme de* $f : X_1 \times \ldots \times X_n \curvearrowright Y$, notée $\|f\|$, définie quand $n \geq 1$ et $X_1, \ldots, X_n$, Y sont des espaces vectoriels semi-normés, veut-dire : ∞ si $\|f(x)\| \neq 0$ pour quelque $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Df$ avec $\|x\| = \pi_m \|x_m\| = 0$, autrement $\sup(\|f(x)\|/\|x\| \mid x \in Df , \|x\| \neq 0)$. Quand f est linéaire, $\|f\| = \sup(\|f(x)\| \mid x \in Df , \|x\| \leq 1)$.

(1.7) Fonctionnelle $f : Y \times X \to \mathbb{K}$ est appelée bilinéaire si $f(y_1 b_1 + \ldots + y_m b_m, x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n) = \Sigma_{s,t} b_s f(y_s, x_t) a_t$, sesquilinéaire si $f(y_1 b_1 + \ldots + y_m b_m, x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n) = \Sigma_{s,t} \bar{b}_s f(y_s, x_t) a_t$, réel si $Y = X$ et $f(x,x)$ est réel, symétrique si $Y = X$ et $f(y,x) = f(x,y)$, hermitien-symétrique, ou simplement hermitien, si $Y = X$ et $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$. f est forcément réel si f est hermitien. $\sqrt{|f(x,x)|}$ s'écrit aussi $\|x\|$.

(1.8) Le sous-espace vectoriel engendré par une partie M d'un espace vectoriel X , i.e. $\{x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n \mid n \geq 0 , x_m \in M, a_m \in \mathbb{K}\}$ s'écrit $\operatorname{lin} M$. Le sous-espace linéaire fermé engendré par une partie M d'un espace vectoriel topologique, i.e. $(\operatorname{lin} M)^-$, est noté $[M]$.

(1.9) Produit scalaire, p.s., dans un espace vectoriel X veut-dire : fonctionnelle sesquilinéaire et hermitienne. Il est noté $(y|x)_X$, ou simplement $(y|x)$.

Orthogonal veut-dire : pour y,x que $(y|x) = 0$, noté $y \perp x$; pour y,M que $y \perp x$ pour tout $x \in M$, noté $y \perp M$; pour M,N que $y \perp N$ pour tout $y \in M$, noté $M \perp N$; pour M que $y \perp x$ pour tout $\{y,x\} \in M$, $y \neq x$, noté $(M)\perp$; pour $(x_i)_{i \in I}$ que $x_i \perp x_j$ pour $i \neq j$, noté $((x_i)_{i\in I})\perp$.

Si $M \perp N$, on écrit aussi $M \oplus N$ au lieu de $M + N$.

L'orthogonale de M , noté $M^\perp$, veut-dire : le sous-espace vectoriel $\{x | x \perp M\}$. On a $M^\perp = (\operatorname{lin} M)^\perp$, $M \subset N \Rightarrow M^\perp \supset N^\perp$, $M \subset M^{\perp\perp}$, $M^{\perp\perp\perp} = M^\perp$.

Vecteur isotrope x veut-dire : $(x|x) = 0$. Attention : les vecteurs isotropes ne forment pas en général un sous-espace vectoriel.

Vecteur dégénéré x veut-dire : $x \perp X$. Les vecteurs dégénérés forment un sous-espace vectoriel, et ceci est contenu dans chaque $M^\perp$.

L'orthogonal de M dans N , noté $N \ominus M$, veut-dire : $\{x \in N | x \perp M\}$

Normal veut-dire : pour e que $(e|e) = 1$ ou -1 , pour M que chaque $e \in M$ est normal, pour $(x_i)_{i\in I}$ que x_i est normal pour tout i .

Orthonormal, o.n., veut-dire : orthogonal et normal.

(1.10) Produit scalaire positif, négatif, strictement positif, strictement négatif, veut-dire respectivement : $(x|x) \geq 0$, $(x|x) \leq 0$, $(x|x) > 0$, $(x|x) < 0$ pour $x \neq 0$.
Produit scalaire défini, strictement défini, veut-dire respectivement : positif ou négatif, strictement positif ou strictement négatif. Un p.s. est strictement défini si, et seulement si, 0 est le seul vecteur isotrope.
Produit scalaire indéfini, strictement indéfini veut-dire : il existe une représentation $X = X_1 \oplus X_2$ telle que $(x|x) \geq 0$ pour tout $x \neq 0$, $x \in X_1$, ≤ 0 pour tout $x \neq 0$, $x \in X_2$, respectivement avec $>$, $<$ au lieu de $\geq$, $\leq$.

(1.11) Somme. Soit $\mathfrak{F} = (F,G,\ldots)$ un ensemble ordonné filtrant à droite et $(x_F)_{F\in\mathfrak{F}}$ une famille d'éléments d'un espace topologique X . On dit que la famille est convergente à limite x dans X si pour chaque voisinage $V(x)$ de x il existe $F_{V(x)} \in \mathfrak{F}$ tel que $F \geq F_{V(x)} \Rightarrow x_F \in V(x)$ (si X est séparé la limite x est unique). On dit que la famille est Cauchy si X est un espace uniforme et pour chaque entourage V il existe $F_V \in \mathfrak{F}$ tel que $F \geq F_V$, $G \geq F_V$ entraînent $(x_F, x_G) \in V$.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un espace vectoriel X . Pour $F = \{i_1,\ldots,i_m\} \subset I$ on pose $x_F = x_{i_1}+\ldots+x_{i_m}$. Un élément x d'un espace vectoriel topologique X est appelé somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$, notée $x = \Sigma_{i\in I}\, x_i$ si x est limite de la famille $(x_F)_{F\in\mathfrak{F}}$, où $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des parties finies de I , ordonné par inclusion. Si X est un espace vectoriel semi-normé on a $x = \Sigma_{i\in I}\, x_i$ si, et seulement si, l'ensemble $\{i \| x_i \| \neq 0\}$ étant noté I' , on a :

- ou (i) I' est fini et $x - x_{I'}$ est un vecteur isotrope
- ou (ii) il existe une application bijective $\varphi : \mathbb{N} \to I'$ et pour chaque application de cette sorte, on a :

$$x = \lim_{n\to\infty}(x_{\varphi(1)}+\ldots+x_{\varphi(n)}) .$$

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments dans $\mathbb{R}^+$. Si les a_F ne sont pas bornés, on écrit $\Sigma_{i\in I}\, a_i = \infty$.

2. EGALITES ET INEGALITES DANS UN ESPACE VECTORIEL A PRODUIT SCALAIRE

(2.1) Polarisation.

$$\Re(y|x) = \frac{1}{4}((y+x|y+x) - (y-x|y-x)) .$$

$$\begin{aligned}(y|x) &= \frac{1}{4}((y+x|y+x) - (y-x|y-x)) && \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} ,\\ &= \frac{1}{4}(((y+x|y+x) - (y-x|y-x)) \\ &\quad + ((yi+x|yi+x) - (yi-x|yi-x))i && \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} ,\\ &= \frac{1}{4}(((y+x|y+x) - (y-x|y-x)) \\ &\quad + ((yi+x|yi+x) - (yi-x|yi-x))i \\ &\quad + ((yj+x|yj+x) - (yj-x|yj-x))j \\ &\quad + ((yk+x|yk+x) - (yk-x|yk-x))k) && \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{H} .\end{aligned}$$

Corollaire. Pour deux p.s. $(y|x)$ et $(y||x)$ sur X on a $(y|x) = (y||x)$ pour tous les y,x si $(x|x) = (x||x)$ pour tous les x. En particulier, $(y|x) = 0$ pour tous les y,x si $(x|x) = 0$ pour tous les x.

(2.2) Parallélogramme.

$$(y+x|y+x) + (y-x|y-x) = 2((y|y) + (x|x)) .$$

Corollaire. Si le p.s. est défini $\|y+x\|^2 + \|y-x\|^2 = 2(\|y\|^2+\|x\|^2)$.

(2.3) Pythagore.

$$(x_1 \oplus \ldots \oplus x_n | x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) = (x_1|x_1) + \ldots + (x_n|x_n) .$$

Corollaire. Si le p.s. est défini $\|x_1 \oplus \ldots \oplus x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$.

(2.4) Représentation orthogonale.

Soit x non-isotrope. Il existe pour chaque y une représentation unique

$$y = xa \oplus u \quad , \quad a \text{ scalaire} , \quad x \perp u .$$

Forcément, $a = (x|y)/(x|x)$ et $u = y - xa$.

(2.5) <u>Soit le p.s. défini</u>. <u>Chaque vecteur isotrope est dégénéré</u>.

<u>Démonstration</u>.

Supposons le p.s. positif et $(x|x) = 0$. Pour chaque y , $0 \le (ya-x|ya-x) = \bar{a}(y|y)a - 2\mathfrak{R}((x|y)a)$. Le choix $a = (y|x)t$, $t > 0$ démontre que $(y|x) = 0$.

(2.6) <u>Schwarz</u>. <u>Soit le p.s. défini</u>. <u>On a</u> :

$$|(y|x)| \le \|y\| \, \|x\|$$

égalité si, et seulement si, ou x est un vecteur isotrope ou $y = xa \oplus u$, a scalaire et u un vecteur isotrope.

<u>Démonstration</u>.

A cause de (2.5) et (2.4) on peut supposer que x est non-isotrope et que $y = xa \oplus u$, $x \perp u$. Ensuite, par Pythagore,

$$\|y\|^2 = \|x\|^2 |a|^2 + \|u\|^2 \ge \|x\|^2 |a|^2 = |(y|x)|^2/\|x\|^2$$

égalité si, et seulement si, $\|u\| = 0$.

(2.7) <u>Minkowski</u>. <u>Soit le p.s. défini</u>. <u>On a</u> :

$$\|y+x\| \le \|y\| + \|x\|$$

égalité si, et seulement si, ou x est un vecteur isotrope ou $y = xa \oplus u$, $a \ge 0$ et u un vecteur isotrope.

<u>Corollaire</u>. $\|\cdot\|$ est une semi-norme dans X , une norme si le p.s. est strictement défini.

<u>Démonstration</u>.

$(y+x|y+x) = (y|y) + 2\mathfrak{R}(y|x) + (x|x)$, $\|y+x\|^2 \le \|y\|^2 + 2\|y\| \, \|x\| + \|x\|^2$ égalité si, et seulement si, pour p.s. positif $(y|x) = \|y\| \, \|x\|$, et pour p.s. négatif $(y|x) = -\|y\| \, \|x\|$.

(2.8) <u>Espace hilbertien</u> X veut-dire : le p.s. est strictement positif et X est complet pour la norme $\|\cdot\|$.

Soit M un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel à p.s. quelconque et supposons que la restriction du p.s. à M soit strictement positive. Alors si M est complet pour la norme $\|\cdot\|$, en particulier si M est de dimension finie, M est un sous-espace hilbertien.

Espace pontrjagien X veut dire : X est un espace hilbertien pour un autre p.s. $[\cdot|\cdot]$ et possède une décomposition $X = X_1 \oplus X_2$ pour ce p.s. telle que, en écrivant $x = x_1 \oplus x_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ on a : $(y|x) = [y_1|x_1] - [y_2|x_2]$ (le cas échéant, on insiste pour qu'un de ces X_1, X_2 soit de dimension finie).

Le mathématicien russe L.S. Pontrjagin étudia le cas que $\dim X_1 = n < \infty$. En supposant que l'opérateur linéaire $T : X \to X$ est borné pour la norme hilbertienne et $(Ty|x) = (y|Tx)$ pour tous les $y, x \in X$ pour le p.s. indéfini, Pontrjagin a démontré en 1944, qu'il existe un sous-espace vectoriel $M \subset X$ à $\dim M = n$ tel que la restriction du p.s. à M est positif et $TM \subset M$. M.G. Krein, M.A. Naimark, I.S. Iochvidov, M. Brodskii, H. Langer et d'autres ont développé ce thème (voir : M.A. Naimark, On commuting unitary operators in spaces with indefinite metrics, Acta Sc. Math. Szeged, 24 (1963), 177-189).

(2.9) Pythagore pour une famille orthogonale quelconque.

Soient le p.s. défini et $(x_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale. Pour $F = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$, posons $x_F = x_{i_1} \oplus \ldots \oplus x_{i_n}$. La famille (x_F) est Cauchy si, et seulement si, $\sum_{i\in I}\|x_i\|^2 < \infty$. Si la somme $\sum_{i\in I} x_i$ existe et $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale, on écrit aussi $\sum_{i\in I} \oplus x_i$, et on a (Pythagore) $\|\sum_i \oplus x_i\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$.

Démonstration.

$x - x_F \perp x_F$, $x = x_F \oplus (x - x_F)$, $\|x - x_F\|^2 = \|x\|^2 - \|x_F\|^2$.

(2.10) Inégalité de Bessel.

Soit le p.s. défini et $(e_i)_{i\in I}$ une famille o.n. Pour chaque x , on a :

$$\sum_{i\in I} |(e_i|x)|^2 \leq \|x\|^2$$

égalité si, et seulement si, $x = \sum_{i\in I} e_i(e_i|x)$ (p.s. positif) et $x = \sum_{i\in I} -e_i(e_i|x)$ (p.s. négatif).

Démonstration.

Posons $x_i = e_i(e_i|x)$ si le p.s. est positif et $-e_i(e_i|x)$ si le p.s.

est négatif. On a : $x-x_F \perp e_i$, $i \in F$, alors

$$x = x_F \oplus (x-x_F) , \|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x-x_F\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{i\in F} |(e_i|x)|^2 ,$$

enfin,

$$\sum_{i\in I} |(e_i|x)|^2 \leq \|x\|^2 , \quad \|x-x_F\|^2 = \|x\|^2 - \|x_F\|^2$$

Corollaire 1.

$x_F \in \mathrm{lin}\{e_i|i\in I\}$ pour chaque F . La famille $\{x_F|F\subset I , F \text{ finie}\}$ est Cauchy et $\lim_F(x_F)$, s'il existe, $\in [e_i|i\in I]$.

Corollaire 2.

Soit X complet pour la semi-norme. Alors, chaque $x \in X$ possède une représentation $x = x_I \oplus (x-x_I)$ telle que $x_I \in [e_i|i\in I]$ et $(x-x_I) \perp [e_i|i\in I]$. Soit $x = x_1 \oplus x_2$ une telle autre représentation, on a : $x_I - x_1$ isotrope.

(2.11) Base orthonormale et égalité de Parseval.

Soient le p.s. défini et $(e_i)_{i\in I}$ une famille o.n. La famille est appelée une base o.n. pour X , si $[e_i|i\in I] = X$, ce qui se tient, si, et seulement si, (Parseval) : $\|x\|^2 = \sum_i |(e_i|x)|^2$ pour chaque x (utilisez le corollaire 1 de (2.10)).

Une base o.n. est forcément une famille o.n. maximale, mais attention : si X n'est pas complet pour la semi-norme, il existe toujours une famille o.n., maximale qui n'est pas une base o.n.

(2.12) Théorème.

Soient X complet pour la semi-norme et $(e_i)_{i\in I}$ une famille o.n. maximale. Alors, la famille est une base o.n.

Démonstration.

En utilisant le corollaire 2 de (2.10), on voit, si $[e_i|i\in I] \neq X$, il existe x_2 non-isotrope, $x_2 \perp [e_i|i\in I]$; avec $x_2|(x_2,x_2)|^{-1/2}$ au lieu de x_2 , on a aussi x_2 normal, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $(e_i)_{i\in I}$ est o.n. maximale.

Corollaire 1.

Si le p.s. est défini et si X est complet pour la semi-norme, alors X possède une base o.n.

Corollaire 2.

Si le p.s. est défini, et si M est un sous-espace vectoriel hilbertien de X, on a pour chaque x une représentation $x = x_M \oplus x'$, $x_M \in M$, $x' \perp M$.

3. THEOREME DE JORDAN ET VON NEUMANN

(3.1) Théorème.

Soit X un espace vectoriel semi-normé. Pour que la semi-norme de X coïncide avec la semi-norme d'un p.s. positif dans X, il faut et il suffit que l'égalité du parallélogramme se vérifie.

Démonstration.

Nous donnons la démonstration pour le cas de scalaires complexes. En définissant la fonctionnelle

$$(y|x) = \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i(\|yi+x\|^2 - \|yi-x\|^2))$$

il suffit de démontrer que cette fonctionnelle est un produit scalaire (il est évident que $(x|x) = \|x\|^2 \geq 0$).

On vérifie facilement, même sans utiliser l'égalité du parallélogramme, que $(x|y) = \overline{(y|x)}$.

Il reste seulement à démontrer que la fonctionnelle $(y|x)$ est linéaire en x . Il suffit de démontrer que la fonctionnelle

$$\varphi(y,x) = \|y+x\|^2 - \|y-x\|^2$$

est linéaire en x . Or, pour voir l'additivité de φ en x , on note, en utilisant l'égalité du parallélogramme, que

$$\begin{aligned}\varphi(y,x_1+x_2) &= \|y+x_1+x_2\|^2 - \|y-x_1-x_2\|^2 \\ &= 2(\|\tfrac{y}{2}+x_1\|^2 + \|\tfrac{y}{2}+x_2\|^2) - \|(\tfrac{y}{2}+x_1)-(\tfrac{y}{2}+x_2)\|^2 \\ &\quad - 2(\|\tfrac{y}{2}-x_1\|^2 + \|\tfrac{y}{2}-x_2\|^2) + \|(\tfrac{y}{2}-x_1)-(\tfrac{y}{2}-x_2)\|^2 \;;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(y,x_1+x_2) &= 2(\|\tfrac{y}{2}+x_1\|^2 + \|\tfrac{y}{2}+x_2\|^2 - \|\tfrac{y}{2}-x_1\|^2 - \|\tfrac{y}{2}-x_2\|^2) \\ &= 2(\|\tfrac{y}{2}+x_1\|^2 - \|\tfrac{y}{2}-x_1\|^2) + 2(\|\tfrac{y}{2}+x_2\|^2 - \|\tfrac{y}{2}-x_2\|^2) \\ &= \varphi(y,x_1+0) + \varphi(y,0+x_2) = \varphi(y,x_1) + \varphi(y,x_2) \;.\end{aligned}$$

Pour voir l'homogénéité de $(y|x)$ en x , on vérifie $(y|0) = 0$, $(y|-x) = -(y|x)$, $(y|xi) = (y|x)i$; et pour $r = \frac{m}{n}$ rationnel, en utilisant l'additivité, on a : $n\varphi(y,xr) = \varphi(y,xm) = m\varphi(y,x)$ et par suite,

$\varphi(y,xr) = \varphi(y,x)r$; finalement, pour $c > 0$, il existe r_n rationnel convergent à c et on a, en utilisant la définition de $(y|x)$:

$$(y|xc) = \lim_{n\to\infty} (y|xr_n) = \lim_{n\to\infty} ((y|x)r_n) = (y|x)c \ .$$

Corollaire 1.

La norme d'un espace de Banach coïncide avec celle d'un espace hilbertien si, et seulement si, elle vérifie l'égalité du parallélogramme.

Corollaire 2.

Un espace de Banach est un espace hilbertien si, et seulement si, chaque sous-espace vectoriel de dimension 2 est hilbertien.

4. EXISTENCE DU POINT LE PLUS PROCHE ET EXISTENCE DU PROJECTEUR

(4.1) Soit M une partie non-vide, convexe, d'un espace vectoriel X à p.s. Supposons la restriction du p.s. à M strictement positif, et M complet pour la norme de cette restriction. Alors, pour $x \in X$, il existe $x_M \in M$ tel que pour chaque $y \in M$, $y \neq x$, on a $\|x-x_M\| < \|x-y\|$ et $\Re(x-x_M|y-x_M) \leq 0$ et pour chaque $z \in X$, on a : $\|x_M - z_M\| \leq \|x-z\|$.

Démonstration.

Posons $d = \inf(\|x-y\| \mid y \in M)$. Il existe $y_n \in M$ tels que $d \leq \|x-y_n\| \leq d+\frac{1}{n}$. La famille (y_n) est Cauchy, car

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2 &= \|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2 \\ &= 2(\|y_n-x\|^2+\|y_m-x\|^2) - \|y_n+y_m-2x\|^2 \\ &\leq 4(d+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m})^2 - 4\|\tfrac{y_n+y_m}{2}-x\|^2 \\ &\leq 4(d+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m})^2 - 4d^2 \to 0 \quad \text{quand} \quad n,m \to \infty .\end{aligned}$$

Puisque M est complet $y_n \to x_M$ pour quelque $x_M \in M$. Ensuite $\|x-x_M\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d$; $\|x-y\| = d$, $y \neq x_M$ impliquent $\|x-\frac{y+x_M}{2}\| < d$, contradiction ; pour $0 < t < 1$, on a :

$0 \leq \|x-(x_M+t(y-x_M))\|^2 - \|x-x_M\|^2 = t^2\|y-x_M\|^2 - 2t\Re(x-x_M|y-x_M)$,

$\Re(x-x_M|y-x_M) \leq 0$. Finalement,

$$\begin{aligned}\|x_M-z_M\|^2 &= [(x_M-x|x_M-z_M) + (x-z|x_M-z_M) + (z-z_M|x_M-z_M)] \\ &= \Re[\ldots] \leq \Re(x-z|x_M-z_M) \leq \|x-z\| \, \|x_M-z_M\| ,\end{aligned}$$

$$\|x_M-z_M\| \leq \|x-z\| .$$

Corollaire.

Si M est aussi un sous-espace vectoriel, on a : $x-x_M \perp M$.

Démonstration.

(Une autre démonstration a été donnée dans le corollaire 2 de (2.12)). Pour chaque $y \in M$, on a $\Re(x-x_M|y) = \Re(x-x_M|(y+x_M)-x_M) \leq 0$.

Avec $y(y|x-x_M)$ au lieu de y on voit que $(x-x_M|y) = 0$.

(4.2) Définition.

Soit X un espace vectoriel à p.s. strictement positif. Un opérateur $T : X \curvearrowright X$ est appelé symétrique si $(Ty|x) = (y|Tx)$ pour tous les $y, x \in DT$, idempotent si $T(DT) \subset DT$ et $T^2 = T$. Une application $T : X \to X$ est appelée projecteur sur TX et noté P_{TX} , si T est symétrique et idempotent.

(4.3) Théorème.

Soit T un projecteur. Alors, T est linéaire ; TX est linéaire et fermé ; si $T \neq 0$, on a : $\|T\| = 1$; $x - Tx \perp TX$ pour tous les $x \in X$; si $Tx \neq x$, on a : $\|Tx\| < \|x\|$; $Tx = x$ si et seulement si $x \in TX$; $Tx = 0$ si et seulement si $x \perp TX$.

Démonstration.

T est linéaire, car pour chaque $z \in X$,

$$(T(x+y) - Tx - Ty|z) = ((x+y) - x - y|Tz) = 0 ,$$
$$(T(x\alpha) - (Tx)\alpha|z) = (x\alpha|Tz) - \bar{\alpha}(x|Tz) = 0 .$$

Pour chaque $y \in X$, $(Ty|x-Tx) = (y|T(x-Tx)) = 0$, $x - Tx \perp TX$. Ensuite, $\|x\|^2 = \|Tx \oplus (x-Tx)\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x-Tx\|^2$, $\|Tx\| \leq \|x\|$ et $\|Tx\| < \|x\|$ si $Tx \neq x$. Aussi, si $y = Tx \neq 0$, on a : $\|Ty\| = \|y\| \neq 0$, $\|T\| = 1$. Finalement, $TX = N(1-T)$ est fermé puisque $1 - T$ est linéaire et borné.

(4.4) Théorème.

Soit $T : X \curvearrowright X$ idempotent et symétrique. Pour que T soit projecteur, il faut et il suffit que T soit fermé, DT linéaire et $[DT] = X$.

Démonstration.

Il suffit de démontrer que $DT = X$. Or, NT est linéaire, fermé, e.g. $y, x \in NT$ entraînent que $y + x \in DT$ et, pour $z \in DT$, $(T(y+x)|z) = (y+x|Tz) = (Ty|z) + (Tx|z) = 0$, par conséquence $T(y+x) \perp DT$,

$T(y+x) = 0$. De la même façon $TX = N(I-T)$ est linéaire, fermé, et $NT \perp TX$. Finalement, pour chaque $x \in DT$, on a : $x = (x-Tx) \oplus Tx$ de sorte que $X = [DT] = [NT \oplus TX] = [NT] \oplus [TX] = NT \oplus TX = DT$.

(4.5) Théorème.

Soit T une application : $X \to X$. Pour que T soit projecteur, il est nécessaire et suffisant que chaque $x \in X$ possède une représentation $x = x_1 \oplus x_2$, $x_1 \in TX$, $x_2 \perp TX$, $Tx = x_1$ (la représentation est forcément unique).

Démonstration.

Pour voir l'unicité de la représentation, supposons $x = u \oplus v$, $u \in TX$, $v \perp TX$; alors, $(v-x_2) \perp TX$, $(v-x_2) \perp u$, $(v-x_2) \perp x_1$, $(v-x_2) \perp (x_1-u) = v-x_2$, $v = x_2$, $u = x_1$. De cette unité, on voit que, pour $x = Ty$, on a : $x = Ty \oplus 0$, $Tx = Ty$, c'est-à-dire $T^2y = Ty$, $T^2 = T$. Ensuite, T est symétrique, car $(Ty|x) = (y_1|x_1 \oplus x_2) = (y_1|x_1) = (y|Tx)$.

Corollaire.

Soit M un sous-espace vectoriel complet pour la norme du p.s. strictement positif. Alors, il existe un projecteur T avec $TX = M$, appelé projecteur sur M , noté P_M (forcément unique). Le projecteur existe également si $M^\perp$ est complet, même si M n'est pas complet. Si X est complet, alors P_M existe si, et seulement si, M est fermé.

5. DEUX THEOREMES DE F. RIESZ ET LES OPERATEURS ADJOINTS DES OPERATEURS LINEAIRES BORNES

(5.1) Théorème.

Soit X un espace hilbertien et $\varphi \in X^*$ (c'est-à-dire φ est une fonctionnelle linéaire dans X et φ est continue, autrement dit bornée). Il existe $y_\varphi \in X$ telle que :

$$\varphi(x) = (y_\varphi | x)$$

pour tous les $x \in X$ (forcément, $\|y_\varphi\|_X = \|\varphi\|$).

Démonstration.

Posons $M = N\varphi$. Si $M = X$, $y_\varphi = 0$. Si $M \neq X$, il existe un vecteur $y \in M^\perp$, $y \neq 0$. Posons $y_\varphi = ya$ avec $a = \overline{\varphi(y)}/\|y\|^2$. Alors, $\varphi(x) = (y_\varphi | x)$ pour $x = y_\varphi$, pour $x \in M$, et par conséquence pour chaque $x \in X$.

Corollaire 1.

L'application $h : X^* \to X$, $h(\varphi) = y_\varphi$ est un bijection linéaire-conjugué et isométrique.

Corollaire 2.

Il existe une bijection $\psi : X^* \to X$ qui est linéaire et isométrique, autrement dit, un espace hilbertien est auto-dual.

Démonstration.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base o.n. pour X et soit $J : X \to X$ l'application $J(\Sigma_i e_i a_i) = \Sigma_i e_i \bar{a}_i$. Posons $\psi = J \circ h$.

(5.2) Attention.

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ et $T \in \mathcal{L}(Y,X)$, l'opérateur aT n'est pas défini sauf si $TX \subset \mathbb{K}$, ou $a \in \mathbb{R}$.

(5.3) Soit Y,X des espaces de Banach. Notons par $\mathcal{L}(Y,X)$ l'espace de Banach de toutes les applications linéaires, bornées : $X \to Y$ (espace de Banach sur les scalaires : centre de $\mathbb{K}$), et par $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre de Banach de toutes les applications linéaires, bornées : $X \to X$ (algèbre de Banach sur les scalaires : centre de $\mathbb{K}$).

(5.4) Théorème.

Soit Y,X des espaces hilbertiens et φ une fonctionnelle sesqui-linéaire, bornée dans $Y \times X$. Il existe $T_\varphi \in \mathcal{L}(X,Y)$ tel que $\varphi(y,x) = (T_\varphi y|x)_X$ pour toutes les $y,x \in Y \times X$ (forcément, $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|$).

Démonstration.

Pour y fixe, la fonctionnelle $\varphi(y,x)$ est linéaire en x et bornée. Par (5.1), il existe un unique $y' \in X$ tel que $\varphi(y,x) = (y'|x)_X$. Notons T_φ l'application $y \mapsto y'$, $y \in Y$.

Corollaire.

Pour $T \in \mathcal{L}(Y,X)$, il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(X,Y)$ appelé l'adjoint de T , tel que $(y|Tx) = (T^*y|x)$ pour tous les $(y,x) \in Y \times X$.

L'application $* : \mathcal{L}(Y,X) \to \mathcal{L}(X,Y)$ est une bijection, isométrique ; $T^{**} = T$, $(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$, $(aT)^* = T^*\bar{a}$ si a est un scalaire central ou T est une fonctionnelle ; si $T_1 \in \mathcal{L}(Z,Y)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(Y,X)$ on a : $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

(5.5) Théorème.

Soient X un espace hilbertien et $T : X \to X$ une application symétrique. Alors T est forcément linéaire, bornée, et auto-adjointe.

Démonstration.

Pour voir que T est linéaire, notons que pour chaque $y \in X$, on a :

$$(y|T(xa+x') - (Tx)a - Tx') = (Ty|xa+x'-xa-x') = 0 .$$

Supposons que T ne soit pas bornée. Notons $B_r(x)$ la boule $\{y \mid \|y-x\| < r\}$. Alors,

i) il existe pour chaque $a > 0$ dans chaque boule $B_r(x)$, $r > 0$ un vecteur y tel que $\|Ty\| > a$.

ii) si $\|Tx\| > a$, il existe $r > 0$ tel que $\|Ty\| > a$ pour tous les $y \in B_r(x)$.

Par conséquence, il existe une suite de boules $B_{r_1}(x_1) \supset B_{r_2}(x_2) \supset \ldots$ telle que $\|Ty\| > n$ pour $y \in B_{r_n}(x_n)$, $\|x_{n+1}-x_n\| < r_n$ et $r_{n+1} < r_n - \|x_{n+1}-x_n\|$. La famille (x_n) est Cauchy, la limite $x \in B_{r_n}(x_n)$, $\|Tx\| > n$ pour chaque n (absurde).

6. LE CALCUL DES PROJECTEURS DANS UN ESPACE HILBERTIEN

(6.1) Soit X un espace hilbertien et M, N des sous-espaces vectoriels fermés. On dit que M, N sont relativement orthogonaux si $(M \ominus M \wedge N) \perp (N \ominus M \wedge N)$ (autrement dit, $(M \ominus M \wedge N) \perp N)$.

(6.2) Théorème.

Soit $P_{M_1}, \ldots, P_{M_n}$ des projecteurs. La somme $P_{M_1} + \ldots + P_{M_n}$ est un projecteur (forcément sur $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$) si, et seulement si, $M_i \perp M_j$ pour $i \neq j$, si et seulement si, $P_{M_i} P_{M_j} = 0$ pour $j \neq i$.

Démonstration.

Supposons que la somme soit un projecteur P . Alors, pour $x \in M_i$, on a :

$$\|x\|^2 \geq \|Px\|^2 = (Px|x) = (P_{M_1} x|x) + \ldots + (P_{M_n} x|x)$$
$$= \|P_{M_1} x\|^2 + \ldots + \|P_{M_n} x\|^2 ,$$

$\|P_{M_i} x\|^2 = \|x\|^2$ et ceci entraînent que $P_{M_j} x = 0$ si $j \neq i$; $P_{M_j} P_{M_i} = 0$ pour $j \neq i$.

(6.3) Théorème.

Soient P_M, P_N des projecteurs. On a $P_M P_N$ un projecteur, si et seulement si, $P_M P_N = P_N P_M$ (forcément, $= P_{M \wedge N}$) et si, et seulement si M, N sont relativement orthogonaux.

Démonstration.

$P_M P_N$ est auto-adjoint et idempotent si, et seulement si, $P_M P_N = P_N P_M$. $P_M P_N x = x$ si et seulement si $x \in N$ et $x \in M$. Si $x \in M \ominus (M \wedge N)$ et $y \in N$ et $P_M P_N = P_N P_M$, on a : $P_N P_M x \in M \wedge N$, $P_N P_M x = 0$, $(y|x) = (P_N y | P_M x) = (y | P_N P_M x) = 0$.

(6.4) <u>Théorème</u>.

Soient P_M, P_N des projecteurs. $P_M - P_N$ est un projecteur (forcément, sur $M \ominus N$) si, et seulement si, $M \supset N$, si et seulement si $P_M P_N = P_N$.

7. EXTENSION PAR LINEARITE ET PAR CONTINUITE

(7.1) Théorème.

Soient Y,X des espaces vectoriels. Un opérateur $T : X \curvearrowright Y$ possède une extension linéaire si, et seulement si,

$$x_1,\dots,x_m \in DT \;,\; x_1a_1+\dots+x_ma_m = 0 \;\Rightarrow\; (Tx_1)a_1+\dots+(Tx_m)a_m = 0 \;.$$

Autrement dit, $\operatorname{lin} T$, le sous-espace vectoriel de $Y \times X$, est une fonction. En ce cas, $\operatorname{lin} T : X \curvearrowright Y$ est la plus petite extension linéaire de T. On a : $D(\operatorname{lin} T) = \operatorname{lin}(DT)$; $x \in D(\operatorname{lin} T)$ si, et seulement si, $x = x_1a_1+\dots+x_ma_m$, $x_1,\dots,x_m \in DT$ et
$(\operatorname{lin} T)(x_1a_1+\dots+x_ma_m) = (Tx_1)a_1 +\dots+ (Tx_m)a_m$.

(7.2) Théorème.

Soient Y,X des espaces topologiques. Un opérateur $T : X \curvearrowright Y$ possède une extension fermée si, et seulement si, le sous-espace fermé T^- de $Y \times X$ est une fonction. En ce cas, $T^- : X \curvearrowright Y$ est la plus petite extension fermée de T et T est appelé fermable ; $D(T^-) \subset (DT)^-$.

(7.3) Théorème.

Soient Y,X des espaces vectoriels semi-normés, Y normé et supposons que $T : X \curvearrowright Y$ soit un opérateur linéaire. On a : $[T] = T^-$; si T est fermable, alors $[T]$ est la plus petite extension linéaire et fermée de T. Pour que T soit fermable, il est nécessaire et suffisant que $x_n \in DT$, $x_n \to 0$, $Tx_n \to v \Rightarrow v = 0$.

Si T est fermable, $x \in D([T])$ et $[T]x = v$ si, et seulement si, pour quelque suite $x_n \in DT$, on a : $x_n \to x$, $Tx_n \to v$. Si T est linéaire et borné, forcément $[T]$ est un opérateur linéaire, borné, et $\|[T]\| = \|T\|$.

8. ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT

(8.1) Théorème.

Soit X un espace vectoriel à p.s. strictement positif. Soient $x_1, x_2, \ldots$ une suite finie ou infinie de vecteurs de X, indépendante, c'est-à-dire : $x_1 \neq 0$ et pour chaque $n \geq 1$, $x_{n+1} \notin \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Il existe $e_1, e_2, \ldots$ o.n. et, pour chaque $n \geq 1$ des scalaires $a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$, tels que $a_{n,n} > 0$, $x_n = e_1 a_{1,n} + \ldots + e_n a_{n,n}$; forcément $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$, les $e_n, a_{i,n}$ sont uniques, et e_n s'exprime : $e_n = x_1 b_{1,n} + \ldots + x_n b_{n,n}$, les $b_{i,n}$ étant des scalaires uniques, $b_{n,n} = a_{n,n}^{-1} > 0$.

Démonstration.

Définissons $a_{1,1} = \|x_1\|^{-1} > 0$, $e_1 = x_1 a_{1,1}$; pour $n \geq 1$, par récurrence, $e_1, \ldots, e_n$ étant définis,

$$a_{n+1,n+1} = \Big\|x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} e_i (e_i | x_{n+1})\Big\|^{-1} > 0$$

$$a_{i,n+1} = -(e_i | x_{n+1}) a_{n+1,n+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

$$e_{n+1} = \Big(x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} e_i (e_i | x_{n+1})\Big) a_{n+1,n+1} \quad .$$

Corollaire.

Soit M un sous-espace vectoriel séparable de X, c'est-à-dire : il existe $x_1, x_2, \ldots$ tels que $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset M \subset [x_1, x_2, \ldots]$ (on peut même supposer que (x_i) est une famille indépendante). Alors, M possède une base o.n., bien que M ne soit pas supposé complet.

9. TOPOLOGIES SUR X ET SUR $\mathcal{L}(X)$

Soit X un espace de Banach.

(9.1) Théorème.

Supposons E un espace vectoriel et $(p_i)_{i\in I}$ une famille de semi-normes sur E. Pour $F \subset I$, F fini, $x \in E$, et $r > 0$, nous posons

$$B_r(x;F) = \{y\in E \mid p_i(y-x)<r \text{ pour tout } i\in F\} .$$

Les réunions des ensembles de la forme $B_r(x;F)$ forment une topologie sur E, appelée topologie déterminée par les semi-normes $(p_i)_{i\in I}$.

(9.2) La topologie sur X déterminée par la seule semi-norme $\{p\}$, $p(x) = \|x\|$, autrement dit, la topologie de la norme, est appelée : topologie normique. La topologie sur X déterminée par les semi-normes $\{p_\varphi \mid \varphi\in X^*,\ p_\varphi(x) = |\varphi(x)|\}$ est appelée : topologie faible (top. faible).

La topologie sur $\mathcal{L}(X)$ déterminée par les semi-normes $\{p_x \mid x\in X,\ p_x(T) = \|Tx\|\}$ est appelée : topologie opératorielle forte (top. op. forte).

La topologie sur $\mathcal{L}(X)$ déterminée par les semi-normes $\{p_{x,\varphi} \mid x\in X,\ \varphi \in X^*,\ p_{x,\varphi}(T) = |\varphi(Tx)|\}$ est appelée : topologie opératorielle faible (top. op. faible).

La topologie sur $\mathcal{L}(X)$ déterminée par les semi-normes (nous écrivons $\|x\| = \sqrt{\Sigma_n\|x_n\|^2}$, $\|\varphi\| = \sqrt{\Sigma_n\|\varphi_n\|^2}$ si $x = (x_1,x_2,\dots)$, $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\dots)$ avec $x_n \in X$, $\varphi_n \in X^*$) $\{p_x \mid \|x\|<\infty,\ p_x(T) = (\Sigma_n\|Tx_n\|^2)^{1/2}\}$ est appelée : topologie opératorielle ultraforte (top. op. uforte).

La topologie sur $\mathcal{L}(X)$ déterminée par les semi-normes $\{p_{x,\varphi} \mid \|x\|<\infty,\ \|\varphi\|<\infty,\ p_{x,\varphi}(T) = |\Sigma_n\varphi_n(Tx_n)|\}$ est appelée : topologie opératorielle ultrafaible (top. op. ufaible).

(9.3) Théorème.

On a :

top. faible $\subset$ top. normique ,

$$\text{top. op. faible} \subset \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{top. op. forte}\\ \text{top. op. ufaible}\end{array}\right\} \subset \text{top. op. uforte} \\ \text{top. faible}\end{array}\right\} \subset \text{top. normique}$$

(9.4) Théorème.

Soit I une famille filtrant à droite. On a $x_i \to x$ pour la top. faible si, et seulement si, $\varphi(x-x_i) \to 0$ pour chaque $\varphi \in X^*$.

On a $T_i \to T$:

- pour la top. op. forte si, et seulement si, $\|(T_i-T)x\| \to 0$ pour tout $x \in X$;
- pour la top. op. faible si, et seulement si, $\varphi((T_i-T)x) \to 0$ pour tout $x \in X$ et tout $\varphi \in X^*$;
- pour la top. op. uforte si, et seulement si, $\Sigma_n \|(T_i-T)x_n\|^2 \to 0$ pour tout $x = (x_n)$ avec $\|x\| < \infty$;
- pour la top. op. ufaible si, et seulement si, $\Sigma_n \varphi_n((T_i-T)x_n) \to 0$ pour tout $x = (x_n)$, $\varphi = (\varphi_n)$ avec $\|x\| < \infty$, $\|\varphi\| < \infty$.

Soit $\sup_i \|T_i\| < \infty$. En ce cas, on a $T_i \to T$: pour la top. op. uforte si, et seulement si, $T_i \to T$ pour la top. op. forte ; pour la top. op. ufaible si, et seulement si, $T_i \to T$ pour la top. op. faible.

Si $T_n \to T$, $n \geq 1$ (c'est le cas $I = \mathbb{N}$) pour une de ces six topologies sur $\mathcal{L}(X)$, forcément $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Si $x_n \to x$, $n \geq 1$, pour la top. normique ou pour la top. faible, forcément $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

(9.5) Théorème.

Si $x_i \to x$ pour la top. faible sur X , on a $\|x\| \leq \lim\inf \|x_i\|$; si $x_i \to x$ pour la top. normique sur X on a $\|x\| = \lim \|x_i\|$.

Si $T_i \to T$ pour une de ces six topologies sur $\mathcal{L}(X)$ on a : $\|T\| \leq \lim\inf \|T_i\|$.

(9.6) On définit, sur $\mathcal{L}(Y,X)$ les topologies op. forte, op. faible, op. uforte, op. ufaible par les semi-normes :

$$p_x(T) = \|Tx\| \ , \quad x \in X$$

$$p_{x,\varphi}(T) = |\varphi(Tx)| \ , \quad x \in X \ , \quad \varphi \in Y^*$$

$$p_x(T) = \sqrt{\Sigma_n \|Tx_n\|^2} \ , \quad x = (x_n) \ , \quad x_n \in X \ , \quad \Sigma_n \|x_n\|^2 < \infty$$

$$p_{x,\varphi}(T) = |\Sigma_n \varphi_n(Tx_n)| \ , \quad x = (x_n) \ , \quad x_n \in X \ , \quad \Sigma_n \|x_n\|^2 < \infty \ ,$$
$$\varphi = (\varphi_n) \ , \quad \varphi_n \in Y^* \ , \quad \Sigma_n \|\varphi_n\|^2 < \infty \ .$$

10. CALCUL AVEC LES MATRICES INFINIES POUR LES OPERATEURS LINEAIRES BORNES

(10.1) Théorème.

Soit X_i , $i \in I$ une famille des espaces hilbertiens et notons $\ell_2 = \ell_2(X_i\ , i\in I)$ l'espace vectoriel des familles $(x_i)_{i\in I}$, $x_i \in X_i$, $\Sigma_i \|x_i\|^2 < \infty$. Notons $(y|x)$ le produit scalaire dans ℓ_2 : pour $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I}$

$$(y|x) = \Sigma_{i\in I}(y_i|x_i) \ .$$

Alors, ℓ_2 est un espace hilbertien.

Si $X_i = X$ pour tout $i \in I$, nous écrivons $\ell_2 = \ell_2(X,I)$, le cas $X = \mathbb{K}$, $I = \mathbb{N}$ étant le cas de l'espace hilbertien classique.

(10.2) Théorème.

Soit X un espace hilbertien et $(X_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale des sous-espaces vectoriels fermés de X . Alors, $\{x | x = \Sigma_i \oplus x_i\ , x_i \in X_i\}$, noté X_I , $\Sigma_i \oplus X_i$, est un sous-espace vectoriel fermé qui coïncide avec $[X_i\ , i\in I]$. On a :

$$P_{X_I} = \Sigma_i P_{X_i}$$

(la somme à droite pour la top. op. forte sur $\mathcal{L}(X)$) autrement dit (puisque $F \subset I$, F fini entraînent que $\|P_{X_F}\| \leq 1$)

$$P_{X_I} x = \Sigma_i \oplus P_{X_i} x \quad \text{pour tout} \quad x \in X$$

(la somme à droite pour la top. normique sur X).

L'application : $\Sigma_i \oplus X_i \to \ell_2(X_i\ , i \in I)$, $\Sigma_i \oplus x_i \to (x_i)_{i\in I}$ est une bijection linéaire, dit canonique, qui conserve le p.s.

(10.3) Théorème.

Soient $Y = \Sigma_{i\in I} \oplus Y_i$, $X = \Sigma_{j\in J} \oplus X_j$ des représentations des espaces hilbertiens Y , X . Soit $T \in \mathcal{L}(Y,X)$. Soit $T_{i,j}$ l'opérateur $P_{Y_i} T P_{X_j}$. La matrice d'opérateurs $(T_{i,j})_{i\in I,\, j\in J}$ a les propriétés suivantes :

$$T_{i,j} \in \mathcal{L}(Y,X) \ , \quad \|T_{i,j}\| \leq \|T\| \ ;$$

si $x = \Sigma_j \oplus x_j$, $x_j \in X_j$, on a $Tx = \Sigma_i \oplus (Tx)_i$ où $(Tx)_i = \Sigma_{j\in J} T_{i,j} X_j$, la somme à droite étant formée pour la top. normique sur Y . La matrice $(T_{i,j})$ est dite : <u>assignée</u> à T par les familles orthogonales (Y_i) , (X_j) .

On a : $(cT)_{i,j} = c(T_{i,j})$ si c est un scalaire central, $(T^*)_{j,i} = (T_{i,j})^*$.

Soit $S \in \mathcal{L}(Y,X)$. On a $(S+T)_{i,j} = S_{i,j} + T_{i,j}$.

Soit $S \in \mathcal{L}(Z,Y)$, Z étant un espace hilbertien $Z = \Sigma_{h\in H} \oplus Z_h$. On a :

$$(ST)_{h,j} = \Sigma_{i\in I}\, S_{h,i} T_{i,j}$$

la somme à droite étant formée pour la top. op. forte sur $\mathcal{L}(Z,X)$.

<u>Corollaire 1.</u>

Soient $(f_i)_{i\in I}$, $(e_j)_{j\in J}$ des bases o.n. pour Y,X respectivement. Posons $Y_i = [f_i]$, $X_j = [e_j]$. On a $T_{i,j} e_j = f_i T^{(\mathbb{K})}_{i,j}$ avec un scalaire $T^{(\mathbb{K})}_{i,j}$ unique. Si $X = \Sigma_j \oplus e_j a_j$ et $Tx = \Sigma_i f_i b_i$ on a

$$b_i = \Sigma_j T^{(\mathbb{K})}_{i,j} a_j \ .$$

On dit que la matrice de scalaires $T^{(\mathbb{K})}_{i,j}$ est assignée à T par les bases o.n. (f_i) , (e_j) .

Avec la notation du théorème, on a :

$$(S+T)^{(\mathbb{K})}_{i,j} = S^{(\mathbb{K})}_{i,j} + T^{(\mathbb{K})}_{i,j}$$

$$(cT)^{(\mathbb{K})}_{i,j} = c(T^{(\mathbb{K})}_{i,j})$$

$$(T^*)^{\mathbb{K}}_{j,i} = \overline{T^{(\mathbb{K})}_{i,j}}$$

$$(ST)^{(\mathbb{K})}_{h,j} = \Sigma_{i\in I}\, S^{(\mathbb{K})}_{h,i}\, T^{(\mathbb{K})}_{i,j} \ .$$

<u>Corollaire 2.</u>

Soient $Y = \ell_2(Y_i \ , i\in I)$, $X = \ell_2(X_j \ , j\in J)$. Pour chaque $T \in \mathcal{L}(Y,X)$ il existe une matrice d'opérateurs $(T_{i,j})_{i\in I\ ,\ j\in J}$ unique, telle que

$T_{i,j} \in \mathcal{L}(Y_i, X_j)$, et pour tout $x = (x_j)_{j\in J} \in X$, on a $(Tx)_i = \Sigma_{j\in J} T_{i,j} x_j$ la somme à droite étant formée pour la top. normique sur Y_i . Avec les notations usuelles,

$$(S + T)_{i,j} = S_{i,j} + T_{i,j}$$

$$(cT)_{i,j} = cT_{i,j}$$

$$(T^*)_{j,i} = (T_{i,j})^*$$

$$(ST)_{h,j} = \Sigma_{i\in I} S_{h,i} T_{i,j}$$

la somme à droite étant formée pour la topologie forte sur $\mathcal{L}(Z_h, X_j)$.

11. OPERATEUR ADJOINT D'UN OPERATEUR NON-BORNE

Soient Y , X , $Y \times X$, $X \times Y$ des espaces hilbertiens.

(11.1) Pour $M \subset Y \times X$, on pose

$$M^r = \{(x,y) \mid (y,x) \in M\} \subset X \times Y$$

$$M^{(-)} = \{(-y,x) \mid (y,x) \in M\} \subset Y \times X$$

$$M^* = M^{r(-)\perp}$$

(11.2) Théorème.

$M^{(-)\perp} = M^{\perp(-)}$; $M^{r\perp} = M^{\perp r}$; si M est un sous-espace vectoriel $M^{r(-)} = M^{(-)r}$; $M^* = M^{\perp(-)r}$; $M^* = [M]^*$, $M^{**} = [M]$; $M_1 \subset M_2 \Rightarrow M_2^* \subset M_1^*$.

(11.3) Théorème.

M^* consiste précisément en tous les $(x',y') \in X \times Y$ qui satisfait à

$$(y' \mid y)_Y = (x' \mid x)_X \quad \text{pour tout} \quad (y,x) \in M .$$

(11.4) Théorème.

M^* est un opérateur : $Y \curvearrowright X$, forcément linéaire et fermé, si, et seulement si :

$$[x \mid \exists y, (y,x) \in M] = X .$$

Corollaire 1.

Si T est un opérateur : $Y \curvearrowright X$ alors T^* est un opérateur : $Y \curvearrowright X$ si, et seulement si, $[DT] = X$.

Soit $[DT] = X$. L'opérateur T^* : $Y \curvearrowright X$, appelé l'opérateur adjoint de T , est le plus grand opérateur : $Y \curvearrowright X$ pour lequel $(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)$ pour tout $x \in DT$ et tout $y \in DT^*$. Quand $T \in \mathcal{L}(Y,X)$ cette définition de l'adjoint coïncide avec celle donnée dans le corollaire de (5.4).

Corollaire 2.

Soit $T : X \curvearrowright Y$ un opérateur. Alors $[T] = T^{**}$ est un opérateur : $X \curvearrowright Y$ si, et seulement si, $[\{y \mid (x,y) \in T^*\}] = Y$.

(11.5) $T : X \curvearrowright Y$ est dit : de la classe $(*)$ si $[DT] = X$ et T est linéaire et fermé, essentiellement de la classe $(*)$ si $[T]$ est un opérateur de la classe $(*)$, c'est-à-dire $[DT] = X$ et $[T]$ est un opérateur. $T : X \curvearrowright X$ est appelé auto-adjoint si $T = T^*$, ce qui entraîne que T est de la classe $(*)$.

(11.6) Théorème.

Soit $T : X \curvearrowright Y$ essentiellement de la classe $(*)$. Alors, $T^* : Y \curvearrowright X$ est de la classe $(*)$ et $T^{**} = [T]$.

Supposons que $\|Tx\| > a \geq 0$ pour un $x \in X$. Il existe $r > 0$ tel que $\|Ty\| > a$ pour tout $y \in B_r(x)$.

Démonstration.

$[DT^*] = Y$ et par conséquence il existe $u \in DT^*$, $\|u\| = 1$ tel que $|(Tx|u)| > a$. Pour $r > 0$ et chaque $y \in B_r(x)$ on a :

$$\begin{aligned} \|Ty\| &\geq |(Ty|u)| \geq |(Tx|u)| - |(T(y-x)|u)| \\ &\geq |(Tx|u)| - |((y-x)|T^*u)| \\ &\geq |(Tx|u)| - r\|T^*u\| > a \end{aligned}$$

si $r < ||(Tx|u)| - a|\,\|T^*u\|^{-1}$.

(11.7) Théorème de graphe fermé pour un espace hilbertien.

Une application $T : X \to Y$ qui est linéaire et fermée est forcément bornée.

Démonstration.

Utilisez (11.6) et la méthode du théorème 5.5.

(11.8) Théorème.

Soit $T : X \curvearrowright X$ un opérateur. T est symétrique si, et seulement si, $T \subset T^*$. Si T est symétrique et $DT = X$ forcément T est auto-adjoint et borné.

(11.9) Théorème.

Soit $T : X \curvearrowright X$ symétrique. Il existe un opérateur T_1 maximal tel que $T_1 : X \curvearrowright X$ est une extension symétrique de T. Si $[DT] = X$ on a T_1 est forcément de la classe (*). Si T est auto-adjoint, T est forcément symétrique maximale, mais si $\dim X$ est infinie, il existe $T : X \curvearrowright X$ symétrique maximale, mais non auto-adjoint.

(11.10) Théorème.

Soient X, Y, Z des espaces hilbertiens et $M \subset Y \times X$, $M_1 \subset Y \times X$, $M_2 \subset Z \times Y$. Posons

$$M + M_1 = \{(y+y_1, x) \mid (y,x) \in M, (y_1, x) \in M_1\}$$

$$M_2 M = \{(z,x) \mid \exists y, (z,y) \in M_2 \text{ et } (y,x) \in M\} .$$

On a :

$$(M + M_1)^* \supset M^* + M_1^*$$

$$(M_2 M)^* \supset M^* M_2^* .$$

Si $T : Y \to Z$ est linéaire, borné, on a $(TM)^* = M^*T^*$.

(11.11) Théorème.

Soit $T : X \curvearrowright Y$ de la classe (*). Alors $1 + T^*T : X \curvearrowright X$ est injectif, $V(1+T^*T) = X$, $(1+T^*T)^{-1}$ est une application, auto-adjointe, bornée : $X \to X$, $\|(1+T^*T)^{-1}\| \leq 1$, T^*T est auto-adjoint, $(T^*Tx \mid x) \geq 0$ pour tout $x \in D(T^*T)$.

Démonstration.

$T \oplus T^{\perp} = Y \times X$. Par conséquence, pour chaque $x \in X$, $(0,x)$ a une représentation $(0,x) = (Tx_1, x_1) + (y_2, -T^*y_2)$, $x_1 \in DT$, $y_2 \in DT^*$. Cela donne $Tx_1 + y_2 = 0$, $x = x_1 - T^*y_2$, c'est-à-dire $Tx_1 \in DT^*$, $x_1 + T^*Tx_1 = x$.

Il est évident que $1 + T^*T : X \rightsquigarrow X$ est un opérateur linéaire symétrique, et $V(1+T^*T) = X$. En plus, pour $x \in D(T^*T) = D(1+T^*T)$ on a $\|(1+T^*T)x\| \, \|x\| \geq |((1+T^*T)x|x)| = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \geq \|x\|^2$, $\|(1+T^*T)x\| \geq \|x\|$.

Par conséquence, $1 + T^*T$ est injective et $\|(1+T^*T)^{-1}\| \leq 1$. Cela implique que : $(1+T^*T)^{-1}$ est fermé, $1 + T^*T$ est fermé, T^*T est fermé, T^*T est auto-adjoint.

12. OPERATEURS SPECIAUX

(12.1) Soient Y, X des opérateurs hilbertiens et $T : X \to Y$ une application linéaire. T est appelé <u>isométrique-partiel</u> de E sur F, noté $T = W(F, E)$ si E est un sous-espace vectoriel fermé de X, $F \subset Y$, $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, $Tx = 0$ pour tout $x \perp E$, $TX = TE = F$. Un tel T est appelé <u>isométrique</u> si $E = X$, <u>*-isométrique</u> si $F = Y$, <u>unitaire</u> si $E = X$ et $F = Y$.

(12.2) <u>Théorème</u>.

Soit $T : X \to Y$ isométrique-partiel, $= W(F, E)$. Alors, $F = TE$ est forcément un sous-espace vectoriel fermé, T^* a la forme $W(E, F)$, $T^*T = P_E$, $TT^* = P_F$, ou $T = 0$ ou $\|T\| = 1$.

(12.3) <u>Théorème</u>.

Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. T est isométrique-partiel si, et seulement si, T^* est isométrique-partiel, et si, et seulement si, T^*T est un projecteur. T est isométrique si, et seulement si, $T^*T = 1 (\in \mathcal{L}(X))$, *-isométrique si, et seulement si, $TT^* = 1 (\in \mathcal{L}(Y))$.

$T : X \looparrowright X$ est appelé <u>normal</u> si T est de la classe (*) et $T^*T = TT^*$.

(12.4) <u>Théorème</u>.

Soit $T : X \looparrowright X$ de la classe (*). T est normal si, et seulement si, $D(T^*T) = D(TT^*)$ et pour tout $x \in D(T^*T)$ on a $\|T^*x\| = \|Tx\|$.

13. SUPPORT D'UN OPERATEUR, SOMME ORTHOGONALE D'OPERATEURS

(13.1) Soient Y, X des espaces hilbertiens. Soit $T : X \curvearrowright Y$ un opérateur tel que pour chaque $x \in DT$, il existe une représentation $x = x_1 \oplus x_2$, $x_1 \perp NT$, $x_2 \in NT$, $x_1 \in DT$, avec $Tx = Tx_1$. Dans ce cas, le sous-espace vectoriel fermé $[DT] \ominus [NT]$ est appelé le support de T , écrit $\operatorname{supp} T$.

(13.2) Soit $T : X \curvearrowright Y$ un opérateur tel que $[T]$ est un opérateur. On a $[NT] = N[T]$, $[D[T]] = [DT]$, $\operatorname{supp} T$ existe et $= \operatorname{supp} [T]$. Si T est essentiellement de la classe (*) , on a $\operatorname{supp} T = [VT^*]$. Si T est de la classe (*) , on a $N(T^*T) = N(T)$, $\operatorname{supp}(T^*T) = \operatorname{supp} T$.

<u>Démonstration</u>.

Soit $T : X \curvearrowright Y$ essentiellement de la classe (*) . On a :

$$\begin{aligned} x \perp [VT^*] &\Leftrightarrow x \perp VT^* \\ &\Leftrightarrow (x|T^*y) = 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in DT^* \\ &\Leftrightarrow (T^{**}x|y) = 0 \quad \text{pour tout} \quad y \in DT^* \\ &\Leftrightarrow T^{**}x = 0 \\ &\Leftrightarrow [T]x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in N[T] = [NT] . \end{aligned}$$

Par conséquence $[VT^*] \oplus [NT] = X$.

(13.3) Un opérateur $T : X \curvearrowright Y$ est appelé <u>somme orthogonale</u> des $T_i : X \curvearrowright Y$, $i \in I$, écrite $T = \Sigma_{i\in I} \oplus T_i$, si $[T_i]$ existe pour tout $i \in I$, $(\operatorname{supp} T_i)_{i\in I} \perp$, $([VT_i])_{i\in I} \perp$, $DT = \{x | P_{\operatorname{supp} T_i} x \in DT_i$, $\Sigma_{i\in I} \|T_i P_{\operatorname{supp} T_i} x\|^2 < \infty\}$ et $Tx = \Sigma_i \oplus T_i(P_{\operatorname{supp} T_i} x)$ pour $x \in DT$.

(13.4) Théorème.

Soit $T = \Sigma_{i \in I} \oplus T_i$. Alors $[T]$ est un opérateur ; $[T] = \Sigma_{i \in I} \oplus [T_i]$; T est linéaire, fermé, essentiellement de la classe (*), de la classe (*) respectivement si, et seulement si, chaque T_i , $i \in I$, a cette propriété, $\|T\| = \sup_{i \in I} \|T_i\|$.