BERNARD MALGRANGE

Appendice Sur le théorème de Cartan-Kähler

Cours de l'institut Fourier, tome 8 (1971-1972), p. 52-58

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1971-1972__8__52_0>

APPENDICE

Sur le théorème de Cartan-Kähler

1. Introduction.

Le but de cet appendice est de donner une démonstration rapide du théorème d'existence des solutions d'une équation différentielle dans le cas analytique, une fois obtenus les résultats formels nécessaires, que nous ne reprendrons pas ici. Nous nous appuierons pour cela sur une majoration de Grauert [1], plutôt que sur les majorations pour la "δ-cohomologie", à la Spencer (Sweeney [1], Ehrenpreis-Guillemin-Sternberg [1]) ; d'ailleurs ces dernières avec un choix convenable de normes, sont essentiellement un cas particulier du théorème de Grauert.

2. Polydisques distingués.

Soit $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ un système de n nombres > 0, et soit P_ρ le polydisque de $\mathbb{C}^n$ défini par les équations $|z_i| < \rho_i$. Soit $H^1(P_\rho)$ l'espace des fonctions holomorphes sur P_ρ, $F = \Sigma f_\alpha \rho^\alpha$ pour lesquelles on a

$$\|F\|_\rho = \Sigma |f_\alpha| \rho^\alpha < +\infty ;$$

si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, on le munira d'une norme $|\cdot|_E$, et pour $F = \Sigma f_\alpha z^\alpha \in E \otimes H^1(P_\rho)$, on posera encore

$$\|F\|_\rho = \Sigma |f_\alpha|_E \rho^\alpha .$$

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, de dimension finie, et soit $U = \Sigma u_\alpha z^\alpha$, $u_\alpha \in L(E,E_1)$ une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^n$, à valeurs dans $L(E,E_1)$; pour ρ suffisamment petit l'application $U_\rho : F \mapsto UF$ envoie continuement $E \otimes H^1(P_\rho)$ dans $E_1 \otimes H^1(P_\rho)$. Nous dirons par définition que " ρ <u>est</u> U-<u>privilégié</u> " si l'image de cette application est fermée, et formée de tous les $G \in E_1 \otimes H^1(P_\rho)$ qui, au voisinage de l'origine sont de la forme UF_1, F_1 holomorphe à l'origine (comme il est bien connu, il revient au même de dire qu'il existe une série formelle en 0, soit F_2, telle qu'on ait l'égalité entre séries formelles $G = UF_2$).

THÉORÈME 1.1 (Grauert). <u>Les</u> P_ρ <u>tels que</u> ρ <u>soit</u> U-<u>privilégié forment un système fondamental de voisinages de</u> 0.

Pour la démonstration, nous renvoyons à Grauert [1] (1). Notons aussi qu'un résultat analogue a été démontré par Douady [1] pour l'espace $B(P_\rho)$ des fonctions

---

(1) En fait, Grauert travaille avec la norme L^∞ et non L^1, mais la démonstration est identique.

continues sur $\bar{P}_\rho$ et holomorphe sur P_ρ , muni de la norme

$$\sup_{z \in P_\rho} |F(z)| ,$$

et que la démonstration de Douady pourrait aussi bien être adaptée à l'espace $H^1(P_\rho)$.

Si ρ est U privilégié, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $G \in \mathrm{Im}(U_\rho)$, on puisse trouver $F \in E \otimes H^1(P_\rho)$ vérifiant $UF = G$, $\|F\|_\rho \leq C\|G\|_\rho$; cela résulte du théorème "des homomorphismes" de Banach (et en fait, peut se démontrer directement en même temps que le théorème précédent).

Nous n'aurons besoin de ce résultat que dans le cas où U est un polynome homogène de degré k, auquel cas il est clair que, si G est homogène de degré $k+\ell$, et si $UF = G$, $\|F\|_\rho \leq C\|G\|_\rho$, on a encore $UF_\ell = G$, $\|F_\ell\| \leq C\|G\|$, en désignant par F_ℓ la composante homogène de degré ℓ de F (pour un degré ℓ fixé, une telle majoration est évidente ; l'essentiel est qu'ici, C <u>est indépendant de</u> ℓ).

Nous allons transposer ces résultats ; soit Σ_ℓ l'espace des polynomes homogènes de degré ℓ à n variables sur $\mathbb{C}$; son dual peut être identifié à Σ_ℓ au moyen du produit scalaire

$$< F,F'> = \sum_{|\beta|=\ell} f_\beta f'_\beta ;$$

si l'on munit Σ_ℓ de la norme $\|\cdot\|_\rho$, la norme duale est alors :

$$\|F'\|'_r = \sup_\beta |f_\beta| r^\beta$$

avec $r_i = \frac{1}{\rho_i}$ (ce que nous écrirons brièvement : $r = \frac{1}{\rho}$). On définit de même la norme $\|\cdot\|'_r$ sur $E^* \otimes \Sigma_\ell$ (E^*, dual de E, muni de la norme duale). La transposée de $U(\ell)$, restriction de $F \mapsto UF$ à $E \otimes \Sigma_\ell$ est l'application

$$U(\ell)^* : E_1^* \otimes \Sigma_{k+\ell} \to E^* \otimes \Sigma_\ell$$

ainsi définie :

si $F = \sum_{|\alpha|=k+\ell} f_\alpha z^\alpha$, $U(\ell)^*F = \sum_{|\beta|=\ell} g_\beta z^\beta$, avec $g_\beta = \sum_{|\alpha|=k} u^*_\alpha f_{\alpha+\beta}$

(u^*_α , le transposé de u_α).

En transposant les résultats précédents, on obtient donc le

COROLLAIRE 1.2. <u>Etant donné</u> $U \in L(E,E_1) \otimes \Sigma_k$, <u>il existe</u> $r = (r_1,\dots,r_n)$, $r_i > 0$ <u>et</u> $C > 0$ <u>possédant la propriété suivante</u> :

<u>Pour tout</u> $\ell \in \mathbb{N}$ <u>et tout</u> $G \in \operatorname{Im} U(\ell)^*$, <u>on peut trouver</u> $F \in E_1^* \otimes \Sigma_{k+\ell}$ <u>tel qu'on ait</u> $U(\ell)^*F = G$, $\|F\|_r' \leq C\|G\|_r'$.

Nous dirons alors que r est U-<u>distingué</u> ; dans ce cas, pour $\lambda > 0$, λ_r est évidemment encore U-distingué, avec C remplacé par $C\lambda^k$.

3. <u>La norme "de Laplace" formelle</u>.

Pour des raisons de commodité, nous permuterons dans la suite les rôles de E et E^* ; pour

$$F = \sum_{|\alpha|=\ell} f_\alpha z^\alpha \in E \otimes \Sigma_\ell ,$$

nous poserons

$$\mathcal{L}F = \sum \frac{\alpha!}{|\alpha|!} f_\alpha z^\alpha$$ ($\mathcal{L}$ est plus ou moins une transformation de Laplace-Borel),

et

$$|F|_r = \|\mathcal{L}F\|_r' .$$

Si F est une série formelle à n variables sur $\mathbb{C}$ (à coefficients dans E), nous noterons F_ℓ sa composante homogène de degré ℓ , et nous poserons

$$F^\ell = F_0 + \dots + F_\ell$$

$$|F|_r = \sum_{\ell \geq 0} |F_\ell|_r .$$

Pour $X = (X_1, \dots, X_n)$, on a

$$(X_1 + \dots + X_n)^\ell = \sum_{|\alpha|=\ell} \frac{\ell!}{\alpha!} X^\beta ,$$

d'où en faisant $X_i = 1$:

$$\frac{\ell!}{\alpha!} \leq n^\ell ;$$

on en déduit que, si l'on a $|F|_r < +\infty$, F est convergent au voisinage de l'origine ; inversement, de l'inégalité évidente $\alpha! \leq |\alpha|!$, on déduit que, si F est convergente au voisinage de P_r , on a $|F|_r < +\infty$.

Si $F_0 = 0$, on a immédiatement

(3.1) $$|F|_r \leq \sum r_i \left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right|_r .$$

Si F est homogène de degré ℓ , on a

$$\left|\frac{\partial F}{\partial z_i}\right|_r \leq \frac{\ell}{r_i} |F|_r ,$$

d'où par récurrence

$$(3.2) \qquad |D^{\alpha}F|_r \leq \frac{\ell!}{(\ell-|\alpha|)!}\,\frac{1}{r^{\alpha}}\,|F|_r \;.$$

PROPOSITION 3.3. <u>Si</u> F <u>et</u> G <u>sont à valeurs scalaires, on a</u> $|FG|_r \leq |F|_r|G|_r$.

Pour $X = (X_1,\dots,X_n)$, $Y = (Y_1,\dots,Y_n)$, on a la formule du binôme

$$(X+Y)^{\gamma} = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!}X^{\alpha}Y^{\beta} \;.$$

Prenons les X_i égaux à x, et les Y_i à 1 ; on a alors $(X+Y)^{\gamma} = (x+1)^{|\gamma|}$; en calculant de deux manières le coefficient de x^{ℓ} ($\ell \leq |\gamma|$) dans cette dernière expression, il vient

$$(3.4) \qquad \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma\\ |\alpha|=\ell}} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} = \frac{|\gamma|!}{\ell!(|\gamma|-\ell)!} \;.$$

Démontrons maintenant (3.3) ; il suffit de traiter le cas où F et G sont homogènes, disons de degrés ℓ et m .

On a alors

$$FG = \sum_{|\gamma|=\ell+m}\Big(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} f_{\alpha}g_{\beta}\Big)z^{\gamma} \;.$$

D'où, d'après (3.4) :

$$\frac{\gamma!}{|\gamma|!}\Big|\sum_{\alpha+\beta} f_{\alpha}g_{\beta}\Big|r^{\gamma} \leq |F|_r|G|_r \frac{\gamma!}{|\gamma|!}\sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma\\ |\alpha|=\ell}}\frac{\ell!}{\alpha!}\,\frac{m!}{\beta!} = |F|_r|G|_r$$

ce qui démontre la proposition.

La norme introduite ici étant "homogène", les inégalités précédentes peuvent être interprétées en termes de séries majorantes : si l'on a $F = \Sigma f_{\alpha}z^{\alpha}$, $f_{\alpha}\in E$, $g = \Sigma g_{\alpha}z^{\alpha}$, $g_{\alpha} \geq 0$, nous écrirons $F \ll G$; si l'on a, pour tout α : $|f_{\alpha}|_E \leq g_{\alpha}$; nous dirons alors que G est une majorante de F .

Soit alors X une indéterminée ; posons $|F|_{X_r} = \Sigma|F_{\ell}|_r X^{\ell}$; les inégalités (3.1), (3.2) et (3.3) seront encore vraies avec r remplacé par X_r , et le signe $\leq$ par $\ll$. Soient d'autre part

$$\Phi \in \mathbb{C}[[Y_1,\dots,Y_p]] \;, \qquad \text{et} \qquad F^{(1)},\dots,F^{(p)} \in \mathbb{C}[[z_1,\dots,z_n]] \;,$$

les $F^{(i)}$ étant sans terme constant ; il résulte de (3.3), interprété en termes de séries majorantes que, si $\bar{\Phi}$ est une majorante de Φ, on a

$$(3.5) \qquad |\Phi(F^{(1)},\ldots,F^{(p)})|_{X_r} \ll \bar{\Phi}(|F^{(1)}|_{X_r},\ldots,|F^{(p)}|_{X_r}) \;;$$

si $F^{(1)},\ldots,F^{(p)}$ sont à valeurs dans des espaces vectoriels de dimension finie, disons $F^{(i)}$ à valeurs dans $E^{(i)}$, et si Φ est une série formelle sur $E^{(1)} \times\ldots\times E^{(p)}$, en choisissant convenablement les normes dans les $E^{(i)}$ (ce qui ne change essentiellement rien), on voit qu'on pourra encore trouver une série $\bar{\Phi} \in \mathbb{C}[[Y_1,\ldots,Y_p]]$; à coefficients $\geqq 0$, qui vérifie (3.5) quels que soient les $F^{(i)}$; si Φ est convergente, on pourra supposer $\bar{\Phi}$ convergente (nous laissons les détails au lecteur).

4. Equations différentielles.

Soient E et E_1 deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{C}$; considérons une fonction Φ holomorphe au voisinage de

$$(z_o,y^o_\alpha) \in \mathbb{C}^n \times \prod_{|\alpha|\leqq k} E$$

à valeurs dans E_1 , avec $\Phi(z_o,y^o_\alpha) = 0$ et considérons l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \Phi(z,D^\alpha F(z)) = 0 \,.$$

Soit

$$F = \sum_{|\alpha|\leqq k+\ell} f_\alpha (z-z_o)^\alpha$$

un polynome de degré $\leqq k+\ell$, à valeurs dans E , avec $(\alpha! f_\alpha =) D^\alpha F(z_o) = y^o_\alpha$, pour $|\alpha| \leqq k$; nous dirons que F est un jet d'ordre $k+\ell$ de solution de E , prolongeant le jet

$$F^k = \sum_{|\alpha|\leqq k} f_\alpha (z-z_o)^\alpha$$

si le développement de $\Phi(z,D^\alpha F(z))$ en z_o ne contient pas de termes de degré $\leqq \ell$, ce que nous écrirons $\Phi(z,D^\alpha F(z)) \equiv 0 \bmod (z-z_o)^\alpha$. Pour $\ell' > \ell$, et F' jet de solution d'ordre $k+\ell'$, nous dirons de même que F' prolonge F si les coefficients d'ordre $\leqq k+\ell$ de F' sont ceux de F.

DÉFINITION (4.1). Nous dirons que F^k est fortement prolongeable si, $\forall\, \ell > 0$, tout jet de solution d'ordre $k+\ell$ qui prolonge F^k est lui-même prolongeable à l'ordre $k+\ell+1$.

La partie analytique du théorème de Cartan-Kähler (compte non tenu des questions de données de Cauchy) est contenue dans le théorème suivant :

THÉORÈME (4.2). Si $F^{(k)}$ est fortement prolongeable, il existe une série $F = \Sigma f_\alpha(z-z_0)^\alpha$, convergente au voisinage de 0, avec $D^\alpha F(z_0) = y^0_\alpha$, $|\alpha| \leq k$, qui soit solution de l'équation (E).

On peut toujours se ramener au cas où $z_0 = 0$, $y^0_\alpha = 0$, ce que nous supposerons. Posons, pour $\alpha = k$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_\alpha}(0) = u_\alpha \in L(E,E_1) \ , \qquad \text{et} \qquad \Psi(z,y_\alpha) = \sum_{|\alpha|=k} u_\alpha y_\alpha - \Phi \ .$$

Supposons trouvé un jet $F^{k+\ell-1}$ d'ordre $k+\ell-1$ de solution de E, et cherchons à le prolonger à l'ordre $k+\ell$; dans l'équation que nous devons résoudre les termes $D^\alpha F_{k+\ell}$ n'interviennent que linéairement, et, en posant

$$F_{k+\ell} = \sum_{|\alpha|=k+\ell} f_\alpha z^\alpha \ ,$$

notre équation s'écrit :

$$\sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |\beta|=\ell}} u_\alpha f_{\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta)!}{\beta!} z^\beta = \Psi(z,D^\alpha F^{k+\ell-1})_\ell \ .$$

Par hypothèse, un tel $F_{k+\ell}$ existe. Posons $U = \Sigma u^*_\alpha z^\alpha$, et choisissons une fois pour toutes un $r = (r_1,\dots,r_n)$ qui soit U-distingué. Il résulte alors de (1.2) que, si l'on pose

$$\Psi(z,D^\alpha F^{k+\ell-1})_\ell = \sum_{|\beta|=\ell} g_\beta z^\beta \ ,$$

on pourra trouver $F_{k+\ell}$ vérifiant

$$\sup_{|\alpha|=k+\ell} \alpha! \, |f_\alpha| r^\alpha \leq C \sup_{|\beta|=\ell} \beta! \, |g_\beta| r^\beta$$

ce qui s'écrit encore

$$|F_{k+\ell}|_r \leq C \frac{\ell!}{(k+\ell)!} |\Psi(z,D^\alpha F^{k+\ell-1})_\ell|_r$$

d'où, d'après (3.2)

$$|D^\alpha F_{k+\ell}|_r \leq C_1 |\Psi(z,D^\beta F^{k+\ell-1})_\ell|_r \qquad \text{avec} \quad |\alpha| \leq k \ , \quad C_1 = \sup_{|\alpha|\leq k} \frac{C}{r^\alpha} \ .$$

Soit $\bar\Psi$ une fonction holomorphe au voisinage de 0 dans

$$\mathbb{C}^n \times \prod_{|\alpha|\leq k} \mathbb{C} \ ,$$

à coefficients positifs, telle que (3.5) soit satisfaite avec Φ remplacée par $\bar\Psi$; on peut supposer qu'on a $\Psi(0) = 0$ et $\frac{\partial\bar\Psi}{\partial y_\alpha}(0) = 0$ pour $|\alpha| = k$; on aura donc, avec les notations du § 3, pour $|\alpha| \leq k$

$$|D^\alpha F_{k+\ell}|_{X_r} \ll C_1\ X^{k-|\alpha|}\ \bar{\Psi}(X_r, |D^\beta F^{k+\ell-1}|_{X_r})_\ell\ .$$

Ecrivons ces inégalités en y remplaçant successivement ℓ par $1,2,\dots,\ell$, et remarquons qu'on a évidemment, si $\ell' < \ell$:

$$|D^\beta F^{k+\ell'-1}|_{X_r} \ll |D^\beta F^{k+\ell-1}|_{X_r}\ ,$$

d'où

$$\bar{\Psi}(X_r, |D^\beta F^{k+\ell'-1}|_{X_r})_\ell \ll \bar{\Psi}(X_r, |D^\beta F^{k+\ell-1}|_{X_r})_\ell\ ;$$

en ajoutant, il vient, pour $|\alpha| \leqq k$

$$|D^\alpha F^{k+\ell}|_{X_r} \ll C_1\ X^{k-|\alpha|}\ \bar{\Psi}(X_r, |D^\beta F^{k+\ell-1}|_{X_r})\ .$$

Posons

$$A^{k+\ell}(X) = \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha F^{k+\ell}|_{X_r}\ ;$$

de (3.1) on déduit qu'on a, pour $K > 0$ convenable, indépendant de F :

$$|D^\beta F^{k+\ell-1}|_{X_r} \ll K\ X^{k-|\beta|} A^{k+\ell-1}(X)\ , \qquad |\beta| \leqq k$$

d'où finalement, avec $C_2 = C_1 \sum\limits_{|\alpha|=k} 1$

$$A^{k+\ell}(X) \ll C_2\ \bar{\Psi}(X_r, KX^{k-|\alpha|} A^{k+\ell-1}(X))\ .$$

Il existe $m > 0$ et $C_3 > 0$ tels qu'on ait, pour $|z| = \sup|z_i| \leqq m$, $|y_\alpha| \leqq m$ $(y_\alpha \in \mathbb{C})$

$$|\bar{\Psi}(z, y_\alpha)| \leqq C_3 [\,|z| + \sum_{|\alpha|\leqq k-1} |y_\alpha| + \sum_{|\alpha|=k} |y_\alpha|^2\,]\ .$$

Par suite, il existe m' et C_4, indépendants de ℓ tels qu'on ait, pour $0 < \lambda \leqq m'$, et $A^{k+\ell-1}(\lambda) \leqq m'$:

$$A^{k+\ell}(\lambda) \leqq C_4 [\lambda + \lambda A^{k+\ell-1}(\lambda) + A^{k+\ell-1}(\lambda)^2]\ .$$

Soit $A(\lambda)$ la solution de l'équation $A(\lambda) = C_4[\lambda + \lambda A(\lambda) + A(\lambda)^2]$ qui tend vers 0 avec λ ; on vérifie immédiatement qu'il existe $m'' > 0$ tel que pour $\lambda \leqq m''$, la relation $0 \leqq a \leqq A(\lambda)$ entraîne $0 \leqq C_4[\lambda + \lambda a + a^2] \leqq A(\lambda)$ (cf. méthode des approximations successives). Choisissons $\lambda \leqq \inf(m', m'')$; par récurrence, on voit que l'on a $A^{k+\ell}(\lambda) \leqq A(\lambda)$ pour tout ℓ, ce qui montre que les séries $\sum\limits_\ell D^\alpha F_{k+\ell}$, $|\alpha| = k$, et donc la série $\sum\limits_\ell F_{k+\ell}$ est convergente ; ceci démontre le théorème.