BERNARD MALGRANGE

Chapitre III Problèmes d'équivalence

Cours de l'institut Fourier, tome 8 (1971-1972), p. 42-51
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1971-1972__8__42_0>

CHAPITRE III

PROBLEMES D'EQUIVALENCE

8. GENERALITES.

Soit Y une variété de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $\dim Y = \dim X = n$; soit $Q'^k = Q^k_{X,Y}$ l'ensemble des jets d'ordre k inversibles d'applications $X \to Y$; nous utiliserons dans cette nouvelle situation les mêmes notions que dans le cas $X = Y$, sans expliciter les définitions. Soient R^k une équation de Lie formellement intégrable sur X, avec $k \geq 1$, $P^k \subset Q^k$ sa forme finie, et soit $\underline{P'}^k$ une sous-variété de Q'^k. Posons $P^k(.,a) = \{F \in P^k \mid \text{but } F = a\}$, $a \in X$ et définissons de même $P'^k(.,b)$, $b \in Y$. La définition suivante est classique.

<u>Définition (8.1).</u>

<u>Nous dirons que</u> P'^k <u>est une</u> P^k-<u>structure</u> (<u>ou une</u> $\tilde{R}^k$-<u>structure</u>) <u>si les conditions suivantes sont vérifiées</u>

i) <u>Sur</u> P'^k, <u>les projections</u> "<u>source</u>" <u>et</u> "<u>but</u>" <u>sont des submersions</u>.

ii) P^k <u>opère principalement sur</u> P'^k, <u>au sens suivant</u> : <u>soit</u> $F \in P'^k$, <u>de source</u> a, <u>et de but</u> b ; <u>alors un voisinage de</u> F <u>dans</u> $P'^k(.,b)$ <u>est formé par l'ensemble des</u> FG, $G \in P^k(.,a)$, G <u>voisin de</u> $I_k(a)$.

La première condition équivaut à ceci : par tout $F \in P'^k$ passe un germe de section étale de P'^k ; en fait, parmi les $F_1 \in J^1(P'^k)$, de projection F^σ, l'ensemble de ceux qui sont inversibles forme un ouvert dense.

Cette condition étant supposée vérifiée, la seconde équivaut à ceci : soit $P''^k = \{F \in Q^k_{Y,X} \mid F^{-1} \in P'^k\}$; alors, pour tout $F \in P''^k$ de source b et de but a, on a $V(P''^k)(F) = \tilde{R}^k(a)F$.

En considérant Q'^k comme un ensemble de jets de sections du fibré trivial $X \times Y \to X$, on interprète P'^k comme une équation différentielle d'ordre

k dans ce fibré qui est l'analogue d'une équation linéaire avec second membre, P^k étant l'analogue d'une équation homogène. Donnons quelques mots d'explication, sans entrer dans des définitions "en forme" ; une telle équation intervient lorsqu'on cherche à comparer deux "structures infinitésimales" σ sur X et σ' sur Y (par exemple deux tenseurs, deux opérateurs différentiels, etc... ; cf l'exemple (4.2)) : R^k (resp P^k) est alors l'équation des automorphismes infinitésimaux (resp des automorphismes) de σ, et P'^k l'équation des difféomorphismes $X \to Y$ qui transforment σ en σ' ; trouver des germes de solutions de P'^k revient à montrer l'équivalence locale σ et σ' ; si $X = Y$, trouver une solution inversible de P'^k revient à montrer l'équivalence globale de σ et σ' (mais nous n'aborderons pas ce problème ici).

Soit $F \in P'^k$, de source a, et soit $G \in \underline{\tilde{P}}'^k_a$; avec $G(a) = F$; l'application $\xi \mapsto G\tilde{\xi}$ $(\xi \in R^k(a)$, $\tilde{\xi} = v^{-1}\xi)$ permet, en raisonnant comme en (6.14) et (6.15), de définir un isomorphisme du complexe $(6.12)_{k+\ell}$ $(\ell \geq 0)$ sur le complexe de δ-cohomologie de P'^k en F. D'autre part, on a le résultat suivant

<u>Proposition (8.2)</u>.

<u>Soit</u> $F \in P'^k$; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u>.

i) <u>Il existe</u> $F_1 \in (P'^k)^{(1)}$, <u>avec</u> $\pi_k F_1 = F$;

ii) <u>Pour un</u> (<u>ou, pour tout</u>) $F_2 \in \tilde{J}^1(P'^k)$, <u>avec</u> $\pi_1 F_2 = F$, <u>on a</u> $p_1(\hat{\mathscr{D}})F_2 \in C^{k,1}$.

Supposons qu'il existe un $F_2 \in \tilde{J}^1(P'^k)$, qui vérifie ii) ; on a en fait $p_1(\hat{\mathscr{D}})F_2 \in \hat{C}^{k,1}$; d'après (7.10), il existe $G \in \tilde{J}^1_o(P^k)(a)$, avec $p^1(\hat{\mathscr{D}})F_2 = p^1(\hat{\mathscr{D}})G$; on a alors $G^{-1}F_2 \in \tilde{J}^1(P'^k)$ et $p_1(\hat{\mathscr{D}})(G^{-1}F_2) = 0$, donc par (7.5), $G^{-1}F_2 \in \lambda^1 Q'^{k+1} \cap \tilde{J}^1(P'^k)$ et par conséquent $(\lambda^1)^{-1}G^{-1}F_2 \in (P'^k)^{(1)}$. L'implication i) $\Rightarrow$ ii) se démontre en renversant le calcul.

De là, en raisonnant comme en (6.16), on déduit le théorème suivant :

<u>Théorème (8.3)</u> ("2e théorème fondamental").

<u>Supposons que</u> R^k <u>soit 2-acyclique et que</u>, <u>en tout point</u> $F \in P'^k$, <u>la condition d'intégrabilité</u> (8.2.ii) <u>soit satisfaite</u>. <u>Alors</u> P'^k <u>est formellement intégrable</u>.

Dans le cas analytique (i.e. si X , Y , P^k et P'^k sont analytiques), on en déduit, par le théorème de Cartan-Kähler-Kuranishi l'existence, pour tout $F \in P'^k$, d'une solution f de P'^k au voisinage de a = source F vérifiant $\tilde{j}^k f(a) = F$ (voir, par exemple Kuranishi [1] ou l'appendice du présent article).

<u>Définition (8.4).</u>

<u>Nous dirons que</u> P'^k <u>est intégrable s'il est formellement intégrable et si, pour tout</u> $F \in P'^k$, <u>il existe</u> $f \in \underline{\mathrm{Diff}}(X,Y)$ (= <u>le faisceau des germes de difféomorphismes de</u> X <u>dans</u> Y) <u>vérifiant</u> $\tilde{j}^k f \in \underline{\tilde{P}}'^k$ <u>et</u> $\tilde{j}^k f(a) = F$ (a = <u>source</u> F).

Etudier l'intégrabilité de P'^k revient à étudier la 1-cohomologie du complexe (7.9) ; pour le voir, il est commode de travailler dans les germes en un point fixé (ce qui revient à étudier les problèmes d'équivalence locaux "avec points marqués"). Le germe de variété (P'^k, F) , avec a = source F sera appelé un "germe de P^k-structure en a ; deux tels germes (P'^k, F) et (P''^k, G) , avec $P''^k \subset Q^k_{X,Z}$ (Z une variété de dimension n) sont dits "équivalents" si la condition suivante est satisfaite : notons b (resp c) le but de F (resp G) ; alors il existe un germe de difféomorphisme $\varphi : (Y,b) \to (Z,c)$ vérifiant $\tilde{j}^k\varphi(P'^k, F) = (P''^k, G)$. Soit $H^1(\underline{P}^k_a)$ l'ensemble des classes d'équivalences de germes en a de P^k-structures formellement intégrables ; pour qu'un germe (P'^k, F) soit équivalent à $(P^k, I_k(a))$ il faut et il suffit que P'^k soit "intégrable en F" , i.e. qu'il existe $f \in \underline{\mathrm{Diff}}(X,Y)_a$, avec $\tilde{j}^k f(a) = F$, $\tilde{j}^k f \in \underline{\tilde{P}}'^k$.

Soit $\underline{\tilde{P}}^k_{a,o}$ l'ensemble des $F \in \underline{\tilde{P}}^k_a$, avec $F(a) = I_k(a)$; c'est un groupe qui, d'après (7.14) et (7.15) opère à droite dans l'ensemble $\underline{\hat{Z}}^{k,1}_a$ des $u \in \hat{C}^{k,1}_a$ vérifiant $\hat{\mathcal{D}}_1 u = 0$; posons $\hat{H}^1(\underline{P}^k_a) = \underline{\hat{Z}}^{k,1}_a / \underline{\tilde{P}}^k_{a,o}$.

Supposons R^k 2-acyclique, et soit (P'^k, F) un germe de P^k-structure formellement intégrable (ou, ce qui revient au même, vérifiant (8.2.ii) en tout point G voisin de F). Soit $H \in \underline{\tilde{P}}'^k_a$, avec $H(a) = F$, et soit u la classe de $\hat{\mathcal{D}}H$ dans $\hat{H}^1(\underline{P}^k_a)$; cette classe ne dépend pas de H choisi ; en effet, si l'on en prend un autre, soit H' , on aura $H' = HG$, avec $G \in \underline{\tilde{P}}^k_{a,o}$; d'où, par (7.13) $\hat{\mathcal{D}}H' = (\hat{\mathcal{D}}H)^G$; si l'on prend $\varphi \in \underline{\mathrm{Diff}}(Y,Z)_b$,

$b = \text{but } F$, de $\hat{\mathcal{D}}(\tilde{j}^k\varphi.H) = \hat{\mathcal{D}}H$, on déduit que l'image du germe $\tilde{j}^k\varphi(P'^k, F)$ dans $\hat{H}^1(\underline{P}_a^k)$ est la même que celle de (P'^k, F) . On obtient ainsi une application $H^1(\underline{P}_a^k) \to \hat{H}^1(\underline{P}_a^k)$, dont on voit qu'elle est injective en renversant les calculs précédents ; la proposition (7.6) montre qu'elle est surjective. En résumé, on a le théorème suivant :

<u>Théorème (8.5)</u>.

<u>Si</u> R^k <u>est 2-acyclique</u>, <u>l'application précédente</u> $H^1(\underline{P}_a^k) \to \hat{H}^1(\underline{P}_a^k)$ <u>est un isomorphisme</u>.

Si l'on se place dans la catégorie des variétés et morphismes analytiques, ou formels, ce résultat, joint au théorème (8.3) montre qu'on a $\hat{H}^1(\underline{P}_a^k) = 0$. Ce résultat aurait d'ailleurs pu être obtenu directement, par une étude de l'équation $\hat{\mathcal{D}}F = u$ analogue à celle faite par Goldschmidt [1] dans le cas linéaire.

9. <u>GENERALISATION DU THEOREME DE NEWLANDER-NIRENBERG</u>.

Nous nous plaçons ici dans la "catégorie C^∞ " ; l'équation R^k sera dite analytique si elle provient d'une équation analytique sur X (supposé analytique-réel) par "oubli de la structure analytique".

<u>Théorème (9.1).</u>

<u>Soit</u> R^k <u>une équation de Lie 2-acyclique</u>, <u>analytique</u>, <u>et elliptique</u>. <u>En tout point</u> $a \in X$, <u>on a</u> $H^1(\underline{P}_a^k) = 0$.

Autrement dit : dans les hypothèses précédentes, soit $P'^k \subset Q^k(X,Y)$ une P^k-structure de classe C^∞ , vérifiant la condition d'intégrabilité (8.2.ii) ; alors P'^k est intégrable. Ce résultat avait été conjecturé par Spencer [1] .

En vertu du théorème (8.5) , il suffit pour cela de démontrer le résultat suivant : soit $u \in \underline{\hat{C}}_a^{k,1}$, vérifiant $\hat{\mathcal{D}}_1 u = 0$; il existe $F \in \underline{\tilde{P}}_{a,o}^k$ vérifiant $\hat{\mathcal{D}}F = u$. Nous allons démontrer ce résultat par une généralisation de la méthode employée dans Malgrange [2] pour démontrer le théorème de Newlander-Nirenberg [1] (qui en est le cas particulier suivant : $X = \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$,

$k = 1$, P^1 est l'équation des germes d'automorphismes holomorphes de $\mathbb{C}^n$, considérés comme germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^{2n}$, et R^1 est donc l'équation des automorphismes infinitésimaux de $\mathbb{C}^n$, en tant que variété analytique-complexe. Alors, P'^1 est une structure presque-complexe et (8.2.ii) sa condition d'intégrabilité).

Le théorème étant local, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et qu'on a $a = 0$; on peut aussi, en restreignant au besoin X , choisir une trivialisation analytique $X\times L \simeq \tilde{R}^k$ (resp $X\times M \simeq C^{k,1}$, resp $X\times N \simeq C^{k,2}$) du fibré vectoriel R^k (resp $C^{k,1}$, resp $C^{k,2}$, voir remarque (7.11)) sur X , où L , M et N sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie ; dans la suite, nous identifierons $\tilde{R}^k$ etc... à leurs trivialisations, on peut alors choisir des adjoints à coefficients analytiques des opérateurs différentiels $\hat{D} : \underline{\tilde{R}}^k \to \underline{C}^{k,1}$ et $\underline{C}^{k,1} \to \underline{C}^{k,2}$, adjoints qui sont respectivement un (M,L) et un (N,M) opérateur différentiel linéaire sur X d'ordre 1 , et seront tous deux notés D^* .

Soit $z = (z_1,\dots,z_\ell)$ un système linéaire de coordonnées dans L ; soit d'autre part α la projection "source" : $P^k \to X$; comme α est une submersion, et compte-tenu des isomorphismes $X\times L \simeq \tilde{R}^k \simeq V(P^k)(L_k)$, on peut, pour tout ouvert $U \subset\subset X$, avec $0 \in U$, trouver un ouvert $W \subset L$, avec $0 \in W$ et un isomorphisme analytique de fibrés sur U , $\varphi : U\times W \to$ (un voisinage de I_k dans) $\alpha^{-1}(U)$ possédant les propriétés suivantes :

1) $\varphi(U\times\{0\}) = I_k$;

2) pour tout $x \in U$, l'isomorphisme $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,0) : L \to V(P^k)(I_k(x))$ coïncide avec l'isomorphisme ci-dessus.

Les sections de P^k au-dessus de U (et assez voisines de I_k) s'identifient donc aux applications $x \mapsto Z(x)$ de U dans W , ceci dans le cas analytique comme dans le cas C^∞ ; en restreignant au besoin W , on peut supposer que les sections qui vérifient, pour tout $x \in U$ et pour $i = 1,\dots,n$: $\frac{\partial Z}{\partial x_i}(x) \in W$ sont étales (puisque toute section de P^k , C^1-voisine de I_k est étale).

Cela posé, revenons à notre problème ; comme l'équation $\hat{\mathcal{D}}F = u$, $F(0) = I_k(0)$ admet une solution formelle en 0 , on peut par une transformation préliminaire se ramener au cas où $j^1u(0) = 0$ (on pourrait même supposer que u s'annule en 0 à un ordre arbitrairement grand, voire infini, en 0 , mais peu importe). En restreignant au besoin X , U , etc..., on peut supposer que u est défini sur X entier et y vérifie $\hat{\mathcal{D}}_1 u = 0$; enfin, en remplaçant F par F^{-1} , on remplace l'équation $\hat{\mathcal{D}}F = u$ par $u^F = 0$. Nous allons démontrer d'abord le résultat suivant, en apparence plus faible :

<u>Proposition (9.2)</u>.

Si U *est assez petit, il existe* $F \in \Gamma(U,\underline{\tilde{P}}^k)$, *avec* $j^1F(0) = j^1I_k(0)$, *tel qu'on ait* $D^*(u^F) = 0$.

Dans notre système de coordonnées, l'application $F \mapsto u^F$ s'écrit

$$Z \mapsto \{x \mapsto \Phi(x, Z(x), \frac{\partial Z}{\partial x_i}(x))\} ,$$

où Φ est une fonction de classe C^∞ sur $U \times W^{n+1}$, à valeurs dans M , la condition $j^1F(0) = j^1I_k(0)$ s'écrit $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$. Posons

$$D^*\Phi(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_i}) = \sum_{i \le j} A_{ij}(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + B(x, Z, \frac{\partial Z}{\partial x_k}) . \tag{9.3}$$

<u>Lemme (9.4)</u>.

L'opérateur différentiel (linéaire, de L dans L)

$$Z \mapsto \sum_{i \le j} A_{ij}(0,0,0) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j}$$

est elliptique.

Considérons l'opérateur linéarisé de $F \mapsto D^*(u^F)$ le long de I_k , i.e. prenons une famille à un paramètre F_t avec $F_o = I_k$, $\frac{d}{dt}F_t|_{t=0} = \xi \in \Gamma(U, \tilde{R}^k)$ et considérons l'application $\xi \mapsto \frac{d}{dt}D^*(u^{F_t})|_{t=0}$; on trouve immédiatement que cette application vaut $\xi \mapsto D^*\hat{D}\xi + D^*\theta(\xi)u$; comme $j^1u(0) = 0$, son symbole en $x = 0$ coïncide avec celui de $D^*\hat{D}$, qui est elliptique puisque $\hat{D}$ est elliptique (cf Quillen [1] ou Goldschmidt [1]).

D'autre part, en calculant cet opérateur linéarisé en coordonnées, à partir de (9.3), on trouve que son symbole en $x = 0$ coïncide avec celui de (9.4). D'où le lemme.

La démonstration de la proposition (9.2) est alors une application usuelle de la théorie des équations elliptiques ; il suffit même de recopier, avec des modifications mineures, un raisonnement de Agmon-Douglis-Nirenberg ([1], Théorème 12.6). Pour la commodité du lecteur, nous allons détailler un peu.

Soit $s \in]0,1[$, fixé une fois pour toutes. Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne, notée $|.|$) ; pour $k \in \mathbb{N}$, désignons par $\mathcal{C}^{s+k}(B)$ l'ensemble des fonctions sur B, à valeurs réelles, continues ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq k$, les dérivées d'ordre k vérifiant une condition de Hölder d'ordre s ; muni de la norme

$$\|f\|_{s+k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in B} |D^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| = k} \sup_{\substack{x,y \in B \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^s} ,$$

cet espace est complet. On trouve de même l'espace $\mathcal{C}^{s+k}(B) \otimes L$, qu'on notera $\mathcal{C}^{s+k}(B,L)$; dans la suite, nous supposerons B centrée en 0, et nous désignerons par $\mathcal{C}_0^{s+k}(B,L)$ le sous-espace du précédent formé des Z vérifiant $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$.

<u>Lemme (9.5)</u>.

<u>L'opérateur différentiel</u> (9.4) <u>est surjectif direct</u> (i.e. admet un inverse à droite linéaire continu) <u>de</u> $\mathcal{C}_0^{s+2}(B,L)$ <u>dans</u> $\mathcal{C}^s(B,L)$.

Soit φ une fonction $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, à support compact dans $\overset{\circ}{2B}$, avec $\varphi = 1$ au voisinage de B. Etant donné $f \in \mathcal{C}^s(B,L)$, soit $\bar{f}$ le prolongement de f défini, pour $x \notin B$, par $\bar{f}(x) = \varphi(x) f(x \frac{r^2}{|x|^2})$, r = rayon de B ; il est facile de vérifier que l'application $f \to \bar{f}$ est continue de $\mathcal{C}^s(B,L)$ dans $\mathcal{C}^s(2B,L)$; de plus, $\bar{f}$ est évidemment à support compact dans $\overset{\circ}{2B}$.

Soit alors E une solution élémentaire à droite de (9.4), i.e. une distribution sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(L,L)$, vérifiant

$$\sum A_{ij}(0,0,0)\ \frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x_j} = \delta.\mathrm{id}\ ,$$

δ la masse +1 en 0 , et soit Z la restriction de $E*\bar{f}$ à B . Si l'on choisit convenablement E , il est connu qu'on a, avec $K > 0$ convenable : $Z \in C^{2+s}(B,L)$ et $\|Z\|_{2+s} \leq K\|\bar{f}\|_s$ (voir Douglis-Nirenberg [1] , démonstration du théorème 2 ; en fait, a posteriori, le choix de E est inutile, puisque deux telles solutions élémentaires diffèrent par une fonction C^∞ , et même analytique, mais peu importe ici) ; comme on a

$$\sum A_{ij}(0,0,0)\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\ (E*\bar{f}) = \bar{f}\quad ,$$

Z est un relèvement linéaire continu de (9.4) de $C^{s+2}(B,L)$ dans $C^s(B,L)$; pour ramener Z dans $C_o^{s+2}(B,L)$, il suffit alors de le remplacer par $Z-Z(0)-\sum\frac{\partial Z}{\partial x_i}(0)x_i$, puisque les polynômes de degré 1 sont annulés par (7.4); d'où le lemme.

Fixons B une fois pour toutes, avec $B \subset U$, et soit $\mathcal{B}$ une boule de $C^{s+2}(B,L)$, centrée en 0 , et telle qu'on ait, pour $Z \in \mathcal{B}$, $x \in B$: $Z(x) \in W_1$, $\frac{\partial Z}{\partial x_i} \in W_1$, avec $W_1 \subset\subset W$. Considérons l'application

$$\Psi\ :\ [0,1] \times \mathcal{B} \to C^s(B,L)$$

définie par

$$\Psi(t,Z)(x) = \sum A_{ij}(tx,t^2Z,t\frac{\partial Z}{\partial x_k})\ \ \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + B(tx,t^2Z,t\frac{\partial Z}{\partial x_k})\ .$$

Cette application possède les propriétés suivantes :

1) Elle est de classe C^1 (et même C^∞) : ceci est un exercice de calcul différentiel banachique qui peut être laissé au lecteur.

2) On a $\Psi(0,0) = 0$. En effet, on a par définition de Φ : $\Phi(x,0,0) = u(x)$, donc, puisque $j^1u(0) = 0$, $\Phi(0,0,0) = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(0,0,0) = 0$. D'autre part, si l'on pose $D^* = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a_o$ (les a_i étant des fonctions analytiques à valeurs dans $\mathrm{Hom}(M,L)$) , on a :

$$B(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x_k}) = \sum_i a_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x_k}) + \sum_i a_i \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x_k})\frac{\partial Z}{\partial x_i} + a_o\Phi(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x_k})$$

d'où

$$B(0,0,0) = \sum a_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(0,0,0) + a_o\Phi(0,0,0) = 0\ .$$

3) La dérivée partielle $\frac{\partial\Psi}{\partial Z}(0,0)$ est surjective directe, d'après (9.5).

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe, pour t voisin de 0, un $Z_t \in \mathcal{B}$ vérifiant $\Psi(t,Z_t) = 0$. Alors la fonction Z définie au voisinage de 0 par $Z(x) = t^2 Z_t(\frac{x}{t})$ satisfait (7.3), de plus, elle vérifie bien $Z(0) = \frac{\partial Z}{\partial x_i}(0) = 0$.

Reste à voir que Z est de classe C^∞ au voisinage de 0 ; cela se voit par un raisonnement classique sur les équations quasi-linéaires que nous allons répéter ; posons $a_{ij}(x) = A_{ij}(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x})$, $b(x) = B(x,Z,\frac{\partial Z}{\partial x})$; alors Z vérifie l'équation linéaire

$$\sum a_{ij}(x) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} + b(x) = 0$$

comme Z est de classe C^{s+2} dans un voisinage U_1 de a, les a_{ij} et b y sont de classe C^{s+1} ; en particulier notre équation, étant elliptique en 0, est elliptique dans un voisinage U_2 de 0 ; on peut supposer $U_1 = U_2$; appliquant Douglis-Nirenberg [1], théorème 4, on trouve que Z est de classe C^{s+4} dans U_1, donc a_i et b de classe C^{s+3}, et ainsi de suite. Ceci achève la démonstration de la proposition (9.2).

Pour démontrer le théorème (9.1), posons maintenant $v = u^F$; on a $v(0) = 0$ puisque $u(0) = 0$, $j^1F(0) = j^1I_k(0)$; d'autre part, on a $D^*v = 0$ d'après (9.2) et $\hat{\mathcal{D}}_1 v = \hat{\mathcal{D}} v - \frac{1}{2}[v,v] = 0$ d'après (6.16) ; par suite, on a

(9.6) $$\hat{D}D^*v + D^*\hat{D}v - \frac{1}{2}D^*[v,v] = 0 .$$

Cette dernière équation est visiblement à coefficients analytiques en x, v, v'_i, v''_{ij} [elle est même polynomiale du second degré par rapport à (v,v'_i,v''_{ij})]. Montrons que, au voisinage de 0, v est une solution elliptique de cette équation, i.e. que l'opérateur linéarisé de (9.6) le long de v est elliptique ; ce dernier s'écrit en effet :

$$w \rightarrow \hat{D}D^*w + D^*\hat{D}w - D^*[w,v] .$$

Il suffit de vérifier l'ellipticité en 0 ; or, du fait qu'on a $v(0) = 0$, on voit facilement que cet opérateur a même symbole en 0 que $w \rightarrow \hat{D}D^*w + D^*\hat{D}w$;

on sait par ailleurs (Quillen [1] ou Goldschmidt [1]) que ce dernier est elliptique ; d'où le résultat. Il est alors connu que v est analytique au voisinage de 0 (voir par exemple Friedman [1]) ; d'après (6.19) et (6.21), il existe G, germe de section analytique $\underline{\tilde{P}}^k_{a,o}$, vérifiant $v^G = u^{FG} = 0$, d'où $\hat{\mathcal{D}}(G^{-1}F^{-1}) = u$, ce qui démontre le théorème.

<u>Remarque (9.7)</u>.

Si l'on cherche à démontrer le même résultat avec un minimum d'hypothèse de régularité sur u, la démonstration précédente doit être un peu modifiée, du fait que l'application $F \to F^{-1}(u)$ ne possèdera pas de bonnes propriétés de différentiabilité dans les espaces C^{s+k} ; on obtiendra une meilleure équation en travaillant avec $H = F^{-1}$ au lieu de F et en étudiant l'équation $H^{-1}(D^*(u^F)) = H^{-1}(D^*)(u-\hat{D}H) = 0$ au lieu de $D^*(u^F) = 0$; nous n'entrerons pas dans les détails (voir Malgrange [2], pour le cas des structures presque complexes).

Signalons pour terminer deux conséquences du théorème (9.1) que nous ne développerons pas :

1) La théorie des déformations des P^k-structures intégrables, lorsque R^k est une équation de Lie 2-acyclique, analytique et elliptique sur une variété compacte, notamment la construction de "l'espace de Kuranishi" des P^k-structures intégrables voisines d'une P^k-structure donnée. Nous renvoyons pour cela à Quê [1], où la question est traitée dans le cas transitif (le cas général est analogue).

2) L'existence de coordonnées analytiques pour une équation de Lie de classe C^∞ elliptique et formellement transitive, i.e. $R^k \to T$ surjectif (d'où résulte que, dans le cas formellement transitif, le théorème (9.1) est vrai sans faire <u>a priori</u> d'hypothèse d'analyticité). Ce résultat s'obtient en combinant (9.1) et le "troisième théorème fondamental" de E. Cartan; voir Goldschmidt [3] .