COURS DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD MALGRANGE

Chapitre II Forme finie des équations de Lie

Cours de l'institut Fourier, tome 8 (1971-1972), p. 22-41
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1971-1972__8__22_0>

CHAPITRE II

FORME FINIE DES EQUATIONS DE LIE

5. TRANSFORMATIONS DIAGONALES.

Soient $Q^k(a,b)$ (resp $Q^k(a)$, resp Q^k) l'ensemble des jets d'ordre k inversibles d'applications $X \to X$, de source a et de but b (resp de source a et de but quelconque, resp de source et de but quelconques) ; muni de la loi de composition des jets, Q^k est un groupoïde, i.e. une petite catégorie dont les flèches sont inversibles ; d'autre part, Q^k est muni naturellement d'une structure de variété différentiable. Sauf mention expresse du contraire, nous considérerons Q^k comme fibré sur X par la projection "source". Nous noterons alors $\underline{Q}_a^k$ l'ensemble de ses germes de sections en a, et $\underline{Q}^k = \cup \underline{Q}_a^k$ le faisceau de ses sections.

Soit d'autre part f une application $X^2 \to X$, et posons $f^o(x) = f(x,x)$ l'application $F = (f^o, f) : X^2 \to X^2$ est pr_1-projetable et laisse stable Δ ; nous dirons que F est diagonale si en outre, pour tout $x \in X$, le germe en x de l'application $x' \mapsto f(x,x')$ est inversible ; le composé de deux applications diagonales est encore diagonal ; pour qu'une application diagonale $F = (f^o, f)$ soit inversible au voisinage de Δ, il faut et il suffit que f^o soit inversible.

Deux applications diagonales F et G ont, par définition, même partie principale d'ordre k (k, entier ≥ 0) si elles coïncident sur Δ ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leq k$, ce qui entraîne en particulier $f^o = g^o$; nous écrirons cela abusivement : $f = g \bmod \mathcal{J}^{k+1}$. A la partie principale d'ordre k définie par F, on associe la section de Q^k suivante : $x \mapsto \{$jet d'ordre k en x de $x' \mapsto f(x,x')\}$; on obtient ainsi une bijection entre $\Gamma(X, Q^k)$ (resp. $\underline{Q}^k$) et l'ensemble des parties principales (resp. des germes de parties principales) d'ordre k d'applications diagonales $X^2 \to X^2$; dans la suite, nous identifierons ces deux espaces (resp. ces deux faisceaux). Par passage au quotient à partir de la loi de composition des applications diagonales, on obtient une loi qui, à $F \in \underline{Q}_a^k$ et $G \in \underline{Q}_b^k$, avec $b = f^o(a)$, associe $GF \in \underline{Q}_a^k$ (bien entendu, dans chaque fibre, cette loi coïncide avec celle définie plus haut sur Q^k). Nous noterons $\tilde{\underline{Q}}^k$ le sous-faisceau des éléments inversibles de $\underline{Q}^k$; c'est encore un groupoïde. Une section F de $\underline{Q}^k$ est donc une section de $\tilde{\underline{Q}}^k$ si et seulement si elle est étale (i.e. localement inversible), ou encore si f^o est étale.

Soit $\underline{\mathrm{Aut}}(X)$ le faisceau des germes d'applications étales $X \to X$; à $f \in \underline{\mathrm{Aut}}(X)$, on associe le germe d'application diagonale : $(x,x') \mapsto (f(x), f(x'))$, dont la partie principale d'ordre k sera notée $\tilde{j}^k f$: moyennant l'identification faite ci-dessus cette application coïncide avec l'application "jet d'ordre k de f" usuelle. Pour $k = 0$, on obtient un isomorphisme $\tilde{j}^o : \underline{\mathrm{Aut}}(X) \to \tilde{\underline{Q}}^o$; dans la suite, nous identifierons ces deux faisceaux [de même que nous avons identifié $\mathcal{T}$ et $\tilde{j}^o(\mathcal{T})$] .

Notons enfin que $\tilde{j}^k(\mathcal{T})$ peut être considéré comme l'algèbre de Lie de $\tilde{\underline{Q}}^k$; de même que $\mathcal{T}$ est "l'algèbre de Lie" de $\underline{\mathrm{Aut}}(X)$; de façon plus précise, on a les propriétés suivantes :

a) Soit F_t une famille à un paramètre de sections de $\tilde{\underline{Q}}^k$, dépendant différentiablement de t, avec $F_o = \mathrm{id}$; en relevant la situation à X^2 on définit de manière évidente

$$\frac{d}{dt} F_t|_{t=0} \in \Gamma(X, \tilde{j}^k(\mathcal{T}))$$

b) Soit $\xi \in \Gamma(X, \tilde{j}^k(\mathcal{T}))$; en relevant ξ en un champ diagonal sur X^2, on définit, pour tout ouvert $U \subset\subset X$ et tout $t \in \mathbb{R}$ voisin de 0 $\exp(t\xi)|_U \in \Gamma(U, \tilde{\underline{Q}}^k)$. Les formules usuelles sur l'exponentielle des champs de vecteurs sont encore vraies, puisque tout est défini par passage au quotient à partir de la situation usuelle sur X^2 ; enfin, de la définition de $\tilde{j}^k$ résulte que, pour $\xi \in \Gamma(X,T)$, on a, pour $U \subset\subset X$ et t voisin de 0

(5.1) $$\tilde{j}^k \exp(t\xi)|_U = \exp(t\tilde{j}^k\xi)|_U$$

(Dans la suite, par abus de notation, nous omettrons d'indiquer l'ouvert U). En employant le langage géométrique utilisé précédemment, on peut donc dire que $\tilde{Q}^k$ (resp $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$) est le faisceau des automorphismes locaux (resp infinitésimaux) pr_1-projetables de $\Delta^{(k)}$.

Prenons $k \geq 0$, et soit $F \in \tilde{Q} = \varprojlim_k \tilde{Q}^k$; le théorème (3.6) amène à poser

$$\mathcal{D}F = F^{-1}(\omega)-\omega \quad . \tag{5.2}$$

En effectuant le calcul en coordonnées locales, (après avoir relevé F en une application diagonale) on trouve

$$\mathcal{D}F = dx \, \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x'} \tag{5.3}$$

on a donc $\mathcal{D}F \in \mathcal{T}^* \otimes J(\mathcal{T})$; par passage au quotient, on trouve que $\mathcal{D}$ définit encore une application $\mathcal{D} : \tilde{Q}^{k+1} \to \mathcal{T}^* \otimes J^k(\mathcal{T})$ (Nous écrirons encore par abus de notation , pour $F \in \tilde{Q}^{k+1}$: $\mathcal{D}F = F^{-1}(\omega)-\omega)$. De plus, $\mathcal{D}F = 0$ équivaut à $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, ou encore à $F = \tilde{j}^{k+1}(f^o)$.

De $[\omega,\omega] = 0$, on tire $[F^{-1}(\omega),F^{-1}(\omega)] = 0$, ou, d'après (3.6) et (5.2) "l'équation de structure" (pour $k \geq 1$; pour $k = 0$, cette équation est vide).

$$\mathcal{D}_1 F \underset{\text{Déf.}}{=} D\mathcal{D}F + \frac{1}{2}[\mathcal{D}F,\mathcal{D}F] = 0 \quad . \tag{5.4}$$

En passant aux germes, on obtient le "complexe non-linéaire de Spencer" (1ère forme)

$$\mathrm{Aut}(X) \xrightarrow{\tilde{j}^{k+1}} \tilde{Q}^{k+1} \overset{\mathcal{D}}{\rightrightarrows} \mathcal{T}^* \otimes J^k(\mathcal{T}) \xrightarrow{\mathcal{D}_1} \Lambda^2 \mathcal{T}^* \otimes J^{k-1}(\mathcal{T}) \tag{5.5}$$

et ce complexe est exact en $\tilde{Q}^{k+1}$. Le même complexe peut aussi être obtenu en posant $\mathcal{D}F = \chi - F^{-1}(\chi)$ et en utilisant (3.7) au lieu de (3.6) (on vérifie aisément, par exemple en utilisant l'expression de χ en coordonnées locales, que les deux définitions de $\mathcal{D}F$ coïncident ; nous laissons cette question au lecteur). La théorie de l'équivalence peut en principe être faite avec ce complexe (cf Guillemin-Sternberg [1] , Quê [1]). Cependant, pour passer aux complexes "sophistiqués", (cf §7), il est préférable de travailler plutôt avec les formules (3.10), ce que nous allons faire maintenant.

Soit $F \in \tilde{Q}^{k+1}$; alors F^{-1} opère de manière évidente sur $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$, et, par conséquent, sur $\Lambda\check{J}^k(\mathcal{T})^*\otimes\check{J}^k(\mathcal{T})$; considérant alors la classe de $\bar{\chi}$ dans ce dernier espace, classe que nous noterons encore $\bar{\chi}$, nous poserons :

(5.6) $$\bar{\mathcal{B}}F = \bar{\chi} - F^{-1}(\bar{\chi}) \quad .$$

Désignant, comme au § 3, par $\check{\nu}$ le projecteur $\check{J}(\mathcal{T}) \to \tilde{J}(\mathcal{T})$ parallèlement aux vecteurs horizontaux, en vertu de la formule $i'(\bar{\chi}) = \check{\nu} - \mathrm{id}$, on a la formule suivante, analogue "fini" de (3.11):

(5.7) $$i'(\bar{\mathcal{B}}F) = \check{\nu} - F^{-1}(\check{\nu}) \quad .$$

Cette application est à valeurs dans $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$, puisque cet espace est évidemment stable par F^{-1} ; d'autre part elle s'annule sur $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$; par suite, on a

$$\bar{\mathcal{B}}F \in J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{J}^k(\mathcal{T}) \; .$$

Il est facile de trouver la relation qui existe entre $\mathcal{B}F$ et $\bar{\mathcal{B}}F$; en effet, en restreignant l'application (5.7) à $J(\mathcal{T})$, on trouve

(5.8) $$i'(\bar{\mathcal{B}}F)\,|_{J^k(\mathcal{T})} = \nu^{-1} - F^{-1}(\nu^{-1}) \quad .$$

D'autre part, un calcul analogue avec χ au lieu de $\bar{\chi}$ donne la relation

(5.9) $$i'(\mathcal{B}F)\,|_{\tilde{J}^k(\mathcal{T})} = F^{-1}(\nu) - \nu \; .$$

Par conséquent, l'application $\nu^{-1} - i'(\bar{\mathcal{B}}F) : J^k(\mathcal{T}) \to \tilde{J}^k(\mathcal{T})$ a pour inverse l'application $\nu + i'(\mathcal{B}F)$; on en déduit d'abord que $\bar{\mathcal{B}}F = 0$ équivaut à $\mathcal{B}F = 0$, donc à $F = \tilde{j}^{k+1}(f^o)$. On en déduit ensuite l'expression de $\bar{\mathcal{B}}F$ en coordonnées locales.

En effet, pour $\xi = a(x,x')\dfrac{\partial}{\partial x'} + a(x,x)\dfrac{\partial}{\partial x} \in \tilde{J}^k(T)$, posons $\eta = b(x,x')\dfrac{\partial}{\partial x'} = \nu\xi + \xi \barwedge \mathcal{B}F$; d'après 5.3, on a

$$b(x,x') = a(x,x') + a(x,x)\,\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^{-1}$$

d'où

$$b(x,x) = a(x,x)\,\left[I + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^{-1}(x,x)\right] = a(x,x)\,\frac{df^o}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^{-1}(x,x)$$

(parce que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial f}{\partial x'}(x,x) = \dfrac{df^o}{dx}$). D'où finalement

$$a(x,x') = b(x,x') - b(x,x)M(x,x') \quad ,$$

avec

$$M(x,x') = \frac{\partial f}{\partial x'}(x,x)\left(\frac{df^o}{dx}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^{-1}$$

et, par conséquent

$$\bar{\mathcal{D}}F = \bar{d}x \otimes \left[M(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} + M(x,x)\frac{\partial}{\partial x}\right] \quad . \tag{5.10}$$

Cette formule m'avait été donnée par C. Buttin dans un état antérieur de la théorie.

Finalement, de $[\bar{\chi},\bar{\chi}] = 0$ et de (3.10), on tire "l'équation de structure" (2e forme)

$$\bar{D}\bar{\mathcal{D}}F - \frac{1}{2}\pi_{k-1}[\bar{\mathcal{D}}F,\bar{\mathcal{D}}F] = 0 \tag{5.11}$$

(on écrit ici π_{k-1} pour $id\otimes\pi_{k-1}$) .

D'où une deuxième forme du "complexe non-linéaire" de Spencer

$$\underline{\mathrm{Aut}}(X) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \tilde{\underline{Q}}^{k+1} \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}} J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{J}^k(\mathcal{T}) \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}_1} \Lambda^2 J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{J}^{k-1}(\mathcal{T}) \tag{5.12}$$

avec $\mathcal{D}_1 u = \bar{D}u - \frac{1}{2}\pi_{k-1}[u,u]$; ce complexe est encore exact en $\tilde{\underline{Q}}^{k+1}$.

Remarque (5.13) : (Analogue de 3.13) Pour $\alpha \in \Lambda\mathcal{T}^*$, posons $\bar{\alpha} = \nu^{*-1}\alpha$ et $\mathrm{Ad}\,F^{-1}(\alpha) = \nu^* F^{-1}(\bar{\alpha})$. Pour calculer $\mathrm{Ad}\,F^{-1}(\alpha)$, notons qu'il coïncide avec $F^{-1}(\alpha)$ pour α de degré 0 , et que d'autre part $\mathrm{Ad}\,F^{-1}$ commute au produit extérieur. Il suffit donc de faire le calcul pour $\deg\alpha = 1$; on a alors : $\bar{\alpha} = \bar{\chi}\,\bar{\wedge}\,\alpha$, d'où $F^{-1}(\bar{\alpha}) = F^{-1}(\bar{\chi})\,\bar{\wedge}\,F^{-1}(\alpha) = \bar{\chi}\,\bar{\wedge}\,F^{-1}(\alpha) - \bar{\mathcal{D}}F\,\bar{\wedge}\,F^{-1}(\alpha)$ d'après (5.6). En posant $\mathcal{D}'F = (\nu^*\otimes id)\,\bar{\mathcal{D}}F$, on obtient finalement, pour α de degré 1 :

$$\mathrm{Ad}\,F^{-1}(\alpha) = F^{-1}(\alpha) - \mathcal{D}'F\,\bar{\wedge}\,F^{-1}(\alpha)$$

(comparer avec Spencer [1],[2] où cette formule est prise comme définition de $\mathrm{Ad}\,F^{-1}$).

Pour terminer ce paragraphe, introduisons les analogues "finis" des notions considérées à la fin du § 4 . Considérons une application $F : X^3 \to X^3$ qui possède les propriétés suivantes

i) F laisse stable $\overset{-1}{pr}_{23}(\Delta)$;

ii) F est pr_{12}-projetable, et $pr_{12}(F)$ est diagonale.

Autrement dit : F peut s'écrire $y'' = f(x,x',x'')$; $y' = f(x,x',x')$; $y = f(x,x,x)$, f étant une application $X^3 \to X$ telle que, pour tout $x \in X$, le germe en x de l'application $x' \to y'$ soit inversible.

Nous dirons que F est <u>bidiagonale</u> si outre i) et ii), elle possède la propriété suivante

iii) Pour tout $x \in X$, le germe en (x,x) de l'application $(x',x'') \mapsto (y',y'')$ est inversible. (D'après le théorème des fonctions implicites, il revient au même de supposer que le germe en x de l'application $y'' \mapsto f(x,x,x'')$ est inversible).

On dira que deux applications bidiagonales ont même partie principale d'ordre (ℓ,k) si, en coordonnées locales, leurs composantes coïncident modulo $\mathcal{J}^{(\ell+1,k+1)}$; on définit ainsi le faisceau $\underline{Q}^{(\ell,k)}$ des germes de parties principales d'ordre (ℓ,k) d'applications bidiagonales ; il s'identifie au faisceau des sections (pour la fibration "source") du fibré $Q^{(\ell,k)}$ des jets d'ordre ℓ de sections étales de $\underline{Q}^k$ (i.e. de sections de $\tilde{\underline{Q}}^k$) ; muni de la loi de composition des jets, $Q^{(\ell,k)}$ est un groupoïde . On désigne enfin par $\tilde{\underline{Q}}^{(\ell,k)}$ le sous-faisceau des section étales de $\underline{Q}^{(\ell,k)}$, i.e. des sections F telles que $x \mapsto f(x,x,x)$ soit étale ; c'est encore un groupoïde, et $\tilde{J}^{(\ell,k)}(\mathcal{T})$ peut être considéré comme son "algèbre de Lie" dans le même sens que $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$ est l'algèbre de Lie de $\tilde{\underline{Q}}^k$ (nous laissons les détails au lecteur). Les applications $\tilde{j}^\ell : \tilde{\underline{Q}}^k \to \tilde{\underline{Q}}^{(\ell,k)}$ et $\tilde{\lambda}^\ell : \tilde{\underline{Q}}^{k+\ell} \to \tilde{\underline{Q}}^{(\ell,k)}$ se définissent ainsi : si F est une application diagonale définie par $y' = f(x,x')$, $y = f(x,x)$, $\tilde{j}^\ell F$ est défini par $y'' = f(x',x'')$; $y' = f(x',x')$; $y = f(x,x)$ et $\tilde{\lambda}^\ell F$ est défini par $y'' = f(x,x'')$; $y' = f(x',x')$; $y = f(x,x)$ et $\tilde{\lambda}^\ell F$ est défini par $y'' = f(x,x'')$; $y' = f(x,x')$; $y = f(x,x)$. De là résultent les propriétés suivantes :

(5.14) $\tilde{j}^\ell$ est un homomorphisme de groupoïdes.

(5.15) $\tilde{\lambda}^\ell$ est un homomorphisme de groupoïdes ; de plus $\tilde{\lambda}^\ell$ est défini "fibre par fibre", donc définit un homomorphisme de groupoïdes des $Q^{k+\ell} \to Q^{(\ell,k)}$ que nous noterons λ^ℓ .

(5.16) $\tilde{j}^\ell$ et $\tilde{\lambda}^\ell$ commutent à l'exponentielle des champs de vecteurs.

6. EQUATIONS DE LIE : FORME FINIE.

Soit $I_k(a) \in Q^k(a,a)$ le jet d'ordre k en a de l'identité, et soit I_k la section de Q^k $a \mapsto I_k(a)$. Soit $\xi \in \Gamma(X, \tilde{J}^k(T))$; et soit $F_t \in \Gamma(X, \tilde{Q}^k)$, avec $F_o = I_k$, $\frac{d}{dt} F_t|_{t=0} = \xi$ ($t \in \mathbb{R}$, voisin de 0) ; on peut aussi considérer $\frac{d}{dt} F_t(a)|_{t=0}$ en tant que vecteur de $Q_k(a)$ en $I_k(a)$, et l'on s'assure aisément que ce vecteur ne dépend que de ξ ; d'où un isomorphisme entre $\tilde{J}^k(T)(a)$ et l'espace des vecteurs de $Q^k(a)$ en $I_k(a)$. Désignant par $V(Q^k)$ l'espace des vecteurs verticaux de Q^k pour la projection "source", cela revient à dire qu'on a un isomorphisme $\tilde{J}^k(T)(a) \simeq V(Q^k)(I_k(a))$.

Soit $F \in Q^k(a,b)$; l'application $G \mapsto GF$ est un isomorphisme $Q^k(b) \to Q^k(a)$; cet isomorphisme fait correspondre à ξ, vecteurs de $Q^k(b)$ en G (= vecteur vertical de Q^k en G) un vecteur de $Q^k(a)$ en GF, que nous noterons ξF ; en particulier, si l'on prend $G = I_k(b)$, on obtient une application $\xi \mapsto \xi F : \tilde{J}^k(T)(b) \to V(Q^k)(F)$. Soit $\xi \in \Gamma(X, \tilde{J}^k(T))$; pour $F \in Q^k$, posons $\xi F = \xi(b)F$, b = but F ; l'application $F \to \xi F$ définit un champ invariant à droite sur Q^k, que nous noterons $\tau^k(\xi)$; il revient au même de construire τ^k ainsi : considérons pour un instant Q^k comme fibré sur X par la projection "but" ; si g est un automorphisme de X, associons-lui l'automorphisme de Q^k (qui, pour tout a, est un automorphisme de $Q^k(a)$) : $F \to (\tilde{j}^k g)(b)F$, avec b = but F ; en passant aux automorphismes infinitésimaux, on obtient une structure de prolongement d'ordre k sur X de Q^k qui définit précisément τ^k ; en particulier, τ^k est un morphisme d'algèbres de Lie. Soit maintenant R^k une équation de Lie ; les $\tilde{R}^k F$, $F \in Q^k$ forment un système de Pfaff complètement intégrable et transverse à I_k, puisque formé de vecteurs verticaux ; l'ensemble des sous-variétés intégrables passant par I_k définit donc un germe de sous-variété de Q^k au voisinage de I_k, que nous noterons P^k ; nous désignerons aussi par P^k un représentant du germe précédent, que l'on sera amené à restreindre au besoin pour que les propriétés qui suivent soient vraies.

Il résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites que la restriction à P^k de l'application "source", et de l'application "but" sont des submersions ; par contre, la restriction à P^k de l'application (source,but) est une submersion si et seulement si R^k est formellement transitif, ce qui, par définition signifie que la projection $\tilde{R}^k \to T$ est surjective (dans le cas général, on ne peut absolument rien dire ; nous n'avons même pas supposé $\tilde{R}^k \to T$ de rang constant). On démontre, comme dans la théorie des groupes de Lie, que P^k est un germe de sous-groupoïde de Q^k le long de I_k, c'est-à-dire que si l'on a $F \in P^k$, $G \in P^k$, source (G) = but (F), et si F et G sont assez voisins de I_k, on a $F^{-1} \in P^k$ et $FG \in P^k$ (nous laissons les détails au lecteur). Comme Q^k, P^k sera muni sauf mention explicite du contraire de la projection "source" ; nous noterons alors P^k le faisceau de ses sections, et $\tilde{P}^k$ le faisceau de ses sections étales. Dans la suite nous supposerons $k \geq 1$, le cas $k = 0$ étant trivial par Frobenius.

On peut considérer P^k comme une équation différentielle (non linéaire) d'ordre k dans les germes d'applications $X \to X$; nous allons donc utiliser dans ce cas particulier la théorie formelle des équations différentielles non-linéaires, en prenant pour référence Goldschmidt [2]. Dans toute la suite de cet article, nous supposerons que R^k est une équation de Lie formellement intégrable.

Commençons par rappeler une proposition connue (cf Quê [1]). Pour $F \in Q^{(1,k)}$ et $\xi \in \Gamma(X, \tilde{J}^{(1,k)}(T))$, on peut définir ξF, vecteur vertical de $Q^{(1,k)}$ en F de la même manière que nous avons défini τ^k ci-dessus ; désignons par $J^1(P^k)$ (resp $\tilde{J}^1(P^k) \subset Q^{(1,k)}$) l'ensemble des jets d'ordre 1 de sections (resp de sections étales) de P^k ; il est facile de voir que, au voisinage de $\tilde{J}^1 I_k = \tilde{\lambda}^1 I_{k+1}$, $\tilde{J}^1(P^k)$ peut être construit au moyen du système de Pfaff $F \to \tilde{J}^1(\tilde{R}^k)F$ de la même manière que P^k a été construit au moyen de $\tilde{R}^k$; d'autre part, du fait que $\tilde{\lambda}^1 : Q^{k+1} \to Q^{(1,k)}$ est un homomorphisme de groupoïdes, résulte que $\tilde{\lambda}^1$ commute à l'opération $(\xi, F) \to \xi F$; ces faits, joints à l'égalité $\tilde{R}^{k+1} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1}\tilde{J}^1(\tilde{R}^k)$ entrainent, au voisinage de I_{k+1}, la relation $P^{k+1} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1}\tilde{J}^1(P^k)$.

D'autre part, Q^{k+1} s'identifie naturellement au prolongement d'ordre 1 de Q^k (puisque $k \geq 1$, un jet d'ordre $k+1$ d'application $X \to X$ dont la projection d'ordre k est inversible, est lui-même inversible) ; par le même argument, on a aussi $\tilde{J}^1(P^k) \cap \tilde{\lambda}^1(Q^{k+1}) = J^1(P^k) \cap \tilde{\lambda}^1(Q^{k+1})$. Par conséquent, $(P^k)^{(1)} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1}\tilde{J}^1(P^k)$ est le prolongement d'ordre 1 de P^k, et l'on a le résultat suivant :

Proposition (6.1).

Au voisinage de I_{k+1} , on a $P^{k+1} = (P^k)^{(1)}$; en particulier la projection $(P^k)^{(1)} \to P^k$ est surjective.

Le dernier point résulte du théorème des fonctions implicites, et de l'hypothèse " R^{k+1} est un fibré, et $\pi_k : R^{k+1} \to R^k$ est surjectif".

Dans la suite, nous noterons $(\underline{P}^k)^{(1)}$ [resp $(\underline{\tilde{P}}^k)^{(1)}$] le faisceau des sections (resp des sections étales) de $(P^k)^{(1)}$, considéré comme sous-fibré de Q^{k+1} .

La fin de ce paragraphe sera consacrée à l'étude du complexe de Spencer de P^k . Pour cela nous aurons besoin de reprendre les considérations qui conduisent d'habitude à la définition de la "forme fondamentale sur les espaces de repères" (cf notamment Bernard [1] , Guillemin-Sternberg [1]), et de donner leur lien avec le formalisme développé au § 3.

Soit G une section de $\underline{\tilde{Q}}^k$; pour $a \in X$, l'application $F \to G(b)F$ ($F \in Q^k(a)$, but $F = b$) est un automorphisme de $Q^k(a)$; cet automorphisme transforme $\xi \in V(Q^k)(F)$ en un vecteur de $V(Q^k)(G(b)F)$ que nous noterons $G\xi$; en particulier, prenant $F = I_k(a)$, l'application $\xi \to G\xi$ est une bijection $\tilde{J}^k(T)(a) = V(Q^k)(I_k(a)) \to V(Q^k)(G(a))$. On vérifie que l'action à gauche des automorphismes diagonaux définie ici sur $V(Q^k)$ commute à l'action à droite définie au début de ce paragraphe ; alors la bijection $\tilde{J}^k(T)(a) \to \tilde{J}^k(T)(b)$ définie par $\xi \mapsto G\xi G(a)^{-1}$ (que nous écrirons aussi $\xi \mapsto G\xi G^{-1}$) provient de l'action naturelle des automorphismes diagonaux sur les champs diagonaux : pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, si F_t est une famille à un paramètre de sections de $\underline{\tilde{Q}}^k$, avec $F_o = I_k$, $\frac{d}{dt} F_t|_{t=0}(a) = \xi$, on a $\frac{d}{dt} GF_tG^{-1}|_{t=0}(a) = G\xi G^{-1}$. Nous poserons $G\xi G^{-1} = G(\xi)$, ou quelquefois $G[\xi]$ pour éviter les confusions.

On vérifie aisément que $G\xi$ ne dépend que de ξ et du jet d'ordre 1 de G en a ; d'où une application

$$\underline{Q}^{(1,k)} \underset{X}{\times} \tilde{J}^k(T) \to V(Q^k)$$

que nous noterons encore $(H,\xi) \to H\xi$.

Prenons maintenant $H_1 \in Q^{k+1}(a)$, et posons $H = \pi_k H_1 \in Q^k(a)$, $b = \text{but } H$; nous allons calculer $(\lambda^1 H_1)\xi$, pour $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$; pour cela prenons un germe $f \in \underline{\mathrm{Aut}}(X)_a$, avec $\tilde{j}^{k+1} f(a) = H_1$; par définition de λ^1 , on a $\tilde{j}^1\tilde{j}^k f(a) = \lambda^1 H_1$, d'où, par définition de $(\lambda^1 H_1)\xi$: $(\lambda^1 H_1)\xi = (\tilde{j}^k f)\xi$; par suite, on a $(\lambda_1 H_1)\xi H^{-1} = (\tilde{j}^k f)\xi(\tilde{j}^k f)^{-1} = (\tilde{j}^k f)(\xi)$, l'action naturelle de $\tilde{j}^k f$ sur ξ ; mais $\tilde{j}^k f$ est la partie principale d'ordre k de l'application diagonale F définie par $y' = f(x')$, $y = f(x)$; comme F préserve la structure de produit de X^2 , donc commute à ν , on a aussi $(\tilde{j}^k f)(\xi) = F(\xi) = \nu^{-1}F(\nu\xi) = \nu^{-1}(\tilde{j}^{k+1} f)(\nu\xi)$, cette dernière égalité résultant du fait (déjà noté au § 5) que l'action d'une transformation diagonale sur $\tilde{J}^k(T)$ ne dépend que de sa partie principale d'ordre $k+1$; or cette dernière action s'effectue fibre par fibre sur les deux facteurs, comme on le vérifie immédiatement. Finalement, on trouve la formule suivante :

$$(\lambda_1 H_1)\xi H^{-1} = \nu^{-1} H_1(\nu\xi) \quad . \tag{6.2}$$

On en déduit la proposition suivante :

<u>Proposition (6.3)</u>.

<u>Soit</u> $F_1 \in \tilde{Q}_a^{k+1}$, <u>avec</u> $\pi_k F_1 = F$, <u>et soit</u> $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$; <u>on a</u> $F^{-1}(\tilde{\lambda}^1 F_1)\xi = \xi - (\nu\xi) \barwedge \bar{\mathcal{D}} F_1$.

En effet, on a $F^{-1}(\tilde{\lambda}^1 F_1)\xi = F^{-1}(\tilde{\lambda}^1 F_1)\xi F^{-1} F = F^{-1}\nu^{-1} F_1(\nu\xi) F$ par (6.2), et le dernier terme est encore égal à $F^{-1}[\nu^{-1} F_1(\nu\xi)]$; la formule résulte alors immédiatement de (5.8).

Du fait que $\nu^{-1} - i'(\bar{\mathcal{D}}F)$ et $\nu + i'(\mathcal{D}F)$ sont inverses l'un de l'autre, on déduit de (6.3) qu'on a aussi

$$(\tilde{\lambda}^1 F_1)^{-1} F\xi = \xi + \nu(\xi \barwedge \mathcal{D}F_1) = \xi + \xi \barwedge \mathcal{D}' F_1 \tag{6.4}$$

où $\mathcal{D}'$ est défini par (5.13).

A noter que, dans (6.3) et (6.4) , on aurait pu aussi bien écrire dans le terme de gauche $\tilde{j}^1 F$ au lieu de F ; à noter aussi que, pour a fixé , $Q^{k+1}(a)$ est "l'espace des repères d'ordre $k+1$ de source a " et que l'application qui à $\xi \in V(Q^{k+1})(F)$, $F \in Q^{k+1}(a)$ fait correspondre $\nu(\lambda^1 F)^{-1}\pi_k \xi$ définit sur $Q^{k+1}(a)$ une forme à valeurs dans $J^k(T)(a)$, qui est précisément la forme fondamentale de Cartan sur $Q^{k+1}(a)$.

Les formules précédentes peuvent s'écrire un peu autrement. Soit $J^1(Q^k)$ l'espace des jets d'ordre 1 de sections de Q^k ; on a une injection canonique $Q^{(1,k)} \to J^1(Q^k)$ l'image étant formée des éléments inversibles de $J^1(Q^k)$; soit $J^1_o(Q^k)$ le sous-ensemble des $F \in J^1(Q^k)$ qui se projettent dans Q^k sur I_k , et posons encore $Q_o^{(1,k)} = J^1_o(Q^k) \cap Q^{(1,k)}$; on sait (cf Goldschmidt [2]) que $J^1(Q^k)$ est un fibré affine sur Q^k , de fibré vectoriel associé $T^*\otimes V(Q^k)$; par un point $F \in J^1_o(Q^k)$ passe une section canonique, à savoir $\tilde{j}^1 I_k$, d'où un isomorphisme

$$\partial : J^1_o(Q^k) \xrightarrow{\sim} T^*\otimes \tilde{J}^k(T) .$$

<u>Proposition (6.5)</u>.

<u>Pour</u> $F \in Q_o^{(1,k)}(a)$ <u>et</u> $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$, <u>on a</u> $F\xi = \xi + \xi \,\overline{\wedge}\, \partial F$.

Prenons G , section de $\tilde{Q}^k$ au voisinage de a , avec $\tilde{j}^1 G(a) = F$; en coordonnées locales, G est défini par $y' = g(x,x')$, $y = g(x,x)$, modulo $(x'-x)^{k+1}$; on a $G(a) = I_k(a)$, donc $g(a,x') = x'$ modulo $(x'-a)^{k+1}$; à l'ordre 1 au voisinage de a , i.e. modulo $(x-a)^2$, $(x'-x)^{k+1}$, on peut alors écrire $g(x,x') = x' + \sum (x_i - a_i) h_i(a,x')$, les a_i étant définis modulo $(x'-a)^{k+1}$; on vérifie alors facilement, en développant g suivant les $(x'-x)^\alpha$, puis les coefficients $g_\alpha(x)$ suivant les puissances de $(x-a)$ que l'on a

$$(6.6) \qquad (id\otimes\nu)\partial G = \sum dx_i \otimes h_i(a,x') \frac{\partial}{\partial x'} = dx \otimes \frac{\partial g}{\partial x}(a,x') \frac{\partial}{\partial x'} .$$

Soit alors H_t une famille à un paramètre de sections de $\tilde{Q}^k$, avec $H_o = I_k$, $\frac{d}{dt} H_t|_{t=0}(a) = \xi$; en coordonnées locales, H_t est défini par $y' = h_t(x,x')$, $y = h_t(x,x) = h_t^o(x)$, avec $h_o(x,x') = x'$, et

$$\xi = \left(\frac{dh_o^o}{dt}(a), \frac{dh_o}{dt}(a,x')\right) .$$

Alors $G\circ H_t$ est défini par

$$y'_t = g(h_t^o(x), h_t(x,x')) \quad , \quad y_t = g(h_t^o(x), h_t^o(x))$$

et l'on a

$$\nu(G\xi) = \frac{dy'_t}{dt}\Big|_{t=0,x=a} = \frac{dh^o_o}{dt}(a)\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,x') + \frac{dh_o}{dt}(a,x')\ \frac{\partial g}{\partial x'}(a,x')$$

comme $\frac{\partial g}{\partial x'}(a,x')$ = identité, le second terme vaut $\frac{dh_o}{dt}(a,x') = \nu\xi$; et, d'après les formules donnant ∂G et ξ , le premier vaut $\nu(\xi \mathbin{\overline{\wedge}} \partial G)$; d'où le résultat.

<u>Corollaire (6.7)</u>.

<u>Soit</u> $F_1 \in \underset{\sim}{\tilde{Q}}^{k+1}$, <u>et posons</u> $\pi_k F_1 = F$; <u>on a</u>

$$\partial[(\tilde{j}^1F)^{-1}(\tilde{\lambda}^1F_1)] = -(\nu^*\otimes \mathrm{id})\bar{\mathcal{D}}F_1 \quad (= \mathcal{D}'F_1) \quad .$$

Cela résulte immédiatement de (6.3) et de (6.5) : on déduit aussi de (6.4) et de (6.5) qu'on a, sous les mêmes hypothèses

$$(6.8) \qquad \partial[(\lambda^1F_1)^{-1}(\tilde{j}^1F)^{-1}] = (\mathrm{id}\otimes\nu^{-1})\mathcal{D}F_1$$

(cf Quê [1], où cette dernière formule est prise comme définition de $\mathcal{D}F_1$) .

A noter que ces formules peuvent facilement se vérifier en coordonnées locales en utilisant (5.3), (5.10) et l'expression de ∂ , qu'on obtient en remplaçant dans (6.6) (a,x,x') par (x,x',x") . A noter aussi qu'elles sont l'analogue "non linéaire" de la formule (4.5).

<u>Proposition (6.9)</u>.

<u>Soit</u> $F \in \underset{\sim}{\tilde{Q}}^{k+1}$, <u>avec</u> $\pi_k F \in \underset{\sim}{\tilde{P}}^k$; <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

i) $F \in (\underset{\sim}{\tilde{P}}^k)^{(1)}$;

ii) $\mathcal{D}F \in \mathcal{T}^*\otimes \underset{\sim}{R}^k$;

iii) $\bar{\mathcal{D}}F \in J^o(\mathcal{T})^*\otimes \underset{\sim}{\tilde{R}}^k$.

En effet, $J^1(P^k)$ est un sous-fibré affine de $J^1(Q^k)$ (restreint à P^k) , de fibré vectoriel associé $V(P^k)$; par suite, on a $\partial J^1_o(P^k) = T^*\otimes\tilde{R}^k$. Alors, la formule (6.7) montre que iii) équivaut à $\tilde{\lambda}^1F \in J^1(\underset{\sim}{P}^k)$, donc a i). L'équivalence i) ⇔ ii) s'établit de même, en utilisant (6.8). On peut aussi démontrer directement l'équivalence ii) ⇔ iii) en utilisant le fait que $\nu + i'(\mathcal{D}F)$ et

ν^{-1}-$i'(\bar{\mathcal{D}}F)$ sont inverses l'un de l'autre, et la remarque élémentaire suivante : soient E un espace vectoriel, F un sous-espace de E, u une application linéaire $E \to E$, avec $u(E) \subset F$, $I+u$ inversible, alors, si l'on pose $(I+u)^{-1} = I-\tilde{u}$, on a encore $\tilde{u}(E) \subset F$.

De la proposition précédente résulte que le complexe (5.12) donne par restriction un complexe

$$\text{-6.10)}\quad (\mathrm{Sol}) \overset{\tilde{j}^{k+1}}{\to} (\underline{\tilde{P}}^k)^{(1)} \overset{\bar{\mathcal{D}}}{\to} J^o(\mathcal{T})\otimes\underline{\tilde{R}}^k \overset{\bar{\mathcal{D}}_1}{\to} \Lambda^2 J_o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{J}^{k-1}(\mathcal{T})$$

où (Sol) désigne le faisceau des $f \in \underline{\mathrm{Aut}}(X)$ vérifiant $\tilde{j}^k f \in \underline{\tilde{P}}^k$ (c'est un germe au voisinage de I_k, dans la topologie fine C^k, de sous-groupoïde de $\underline{\mathrm{Aut}}(X)$, que l'on désigne souvent sous le nom de "pseudogroupe de Lie"). Ce complexe est exacte en $(\underline{\tilde{P}}^k)^{(1)}$; par ailleurs, si R^k est contenu dans le prolongement d'ordre 1 d'une équation de Lie R^{k-1}, on peut remplacer le dernier terme par $\Lambda^2 J^o(\mathcal{T})^*\otimes\underline{\tilde{R}}^{k-1}$. De même, le complexe (5.5) donne par restriction un complexe analogue, que nous n'écrirons pas.

<u>Remarque (6.11)</u>. Les considérations qui conduisent à (6.3) se "restreignent" à P^k ; en particulier, si $F \in \underline{\tilde{P}}^k$, on aura $F(\underline{\tilde{R}}^k) = \underline{\tilde{R}}^k$; si $F \in (\underline{\tilde{P}}^k)^{(1)}$, on aura $F(\underline{R}^k) = \underline{R}^k$ (cette dernière égalité ayant aussi un sens "fibre par fibre") ; nous laissons les détails au lecteur.

Passons à l'étude du "complexe de δ-cohomologie" de P^k ; soit γ^k le noyau de $\pi_{k-1} : J^k(T) \to J^{k-1}(T)$; à noter qu'on a un isomorphisme $\gamma^k \simeq S^k J^o(T)^*\otimes J^o(T)$ commutant aux automorphismes diagonaux de X^2. Soit d'autre part $v(Q^k)$ le sous-espace des vecteurs de $V(Q^k)$ dont la projection dans $V(Q^{k-1})$ est nulle ; soit $F \in Q^k$, de source a et de but b, avec $k \geq 1$; la théorie formelle des équations différentielles (cf Goldschmidt [2]) donne un complexe

$$(6.12)_k \qquad 0 \to v(Q^k)(F) \overset{\delta}{\to} T^*(a)\otimes v(Q^{k-1})(F) \overset{\delta}{\to} \dots \overset{\delta}{\to} \Lambda^n T^*(a)\otimes v(Q^{k-n}) \to 0 \quad .$$

D'autre part, la théorie des équations linéaires (cf §1) donne un complexe

$$(6.13)_k \qquad 0 \to \gamma^k(a) \overset{\delta}{\to} T^*(a)\otimes\gamma^{k-1}(a) \overset{\delta}{\to} \dots \overset{\delta}{\to} \Lambda^n T^*(a)\otimes\gamma^{k-n} \to 0 \; .$$

Le passage de l'un de ces complexes à l'autre peut s'effectuer ainsi : prenons $f \in \underline{\mathrm{Aut}}(X)_a$, avec $\tilde{j}^k f(a) = F$; alors l'application $\xi \to (\tilde{j}^k f)\tilde{\xi}$, $\tilde{\xi} = \nu^{-1}\xi$ envoie bijectivement $J^k(T)(a)$ sur $V(Q^k)(F)$; il est visible que la restriction de cette application à γ^k ne dépend que de F et même de $\pi_1 F$; on opère de même pour γ^ℓ , $\ell < k$; on obtient ainsi un diagramme $(6.12)_k \to (6.13)_k$.

<u>Lemme (6.14)</u>.

<u>Ce diagramme est commutatif</u>.

Tout d'abord, pour $F = I_k(a)$, la démonstration se fait immédiatement, par exemple en coordonnées , et peut être laissée au lecteur. Pour passer de là au cas général, notons pour un instant E le fibré $X^2 \to X$ défini par la projection $(x,z) \to x$, et considérons le germe d'automorphisme fibré $(x,z) \to (x,f^{-1}(z))$ de E au voisinage de (a,b) , $b = \text{but } F$; il définit un germe d'automorphisme de $J^\ell(E)$, donc de $V(J^\ell(E))$ $(0 \le \ell \le k)$ au-dessus de X ; en particulier on obtient un isomorphisme $V(J^\ell(E))(F) \simeq V(J^\ell(E))I_\ell(a)$ ou encore, dans nos notations $V(Q^\ell)(F) \tilde{\to} V(Q^\ell)(I_\ell(a)) \simeq \tilde{J}^\ell(T)(a)$, dont on vérifie (par exemple en exprimant les vecteurs à partir de familles à un paramètre) qu'il coïncide avec l'inverse de l'application $\tilde{\xi} \mapsto (\tilde{j}^k f)\tilde{\xi}$ considérée ci-dessus ; il suffit alors d'appliquer un lemme de Goldschmidt [2] qui assure que le complexe $(6.12)_k$ commute aux automorphismes fibrés de E .

Remarquons que, pour $1 \le \ell \le k$, on a $\gamma^\ell \subset J_o^\ell(T)$, donc ν^{-1} induit l'identité sur γ^ℓ ; on peut alors définir l'application $\gamma^\ell(a) \to v(Q^\ell)(F)$ par $\xi \mapsto G\xi$, avec $G \in \underset{\sim}{Q}^k(a)$, $G(a) = F$ (en effet, $G\xi$ ne dépend que de $G(a)$ si $\xi \in J_o^k(T)(a)$, puisqu'alors ξ est un vecteur de $Q^k(a,a)$ en $I_k(a)$). Par contre, cela serait faux pour $\ell = 0$ (cf formules (6.2) et suivantes).

Posons maintenant $g^k = \gamma^k \cap R^k$, $v(P^k) = V(P^k) \cap v(Q^k)$.

<u>Lemme (6.15)</u>.

<u>Soit</u> $F \in P^k$, <u>de source</u> a ; <u>l'isomorphisme précédent</u> $\gamma^k(a) \tilde{\to} v(Q^k)(F)$ <u>donne par restriction un isomorphisme</u> $g^k(a) \tilde{\to} v(P^k)(F)$.

On a $k \geq 1$, donc la remarque précédente s'applique ; soit alors $G \in \underline{\tilde{P}}^k_a$, avec $G(a) = F$; on a $G\tilde{R}^k(a) = V(P^k)(F)$, d'où par restriction $Gg^k(a) = v(P^k)(F)$, ce qui démontre le lemme.

Théorème (6.16).

Supposons g^k 2-acyclique. Alors P^k est formellement intégrable.

En effet, il résulte des lemmes précédents que $v(P^k)$ est 2-acyclique, et que $v(P^k)^{(1)} = \mathrm{Ker}\,\{T^*\otimes v(P^k) \to \Lambda^2 T^*\otimes v(Q^{k-1})\}$ est de rang constant puisqu'il est isomorphe à $g^{k+1} \underset{X}{\times} P^k$, avec $g^{k+1} = \mathrm{Ker}\,\{\pi_k : R^{k+1} \to R^k\}$.

D'autre part, on a vu que $(P^k)^{(1)} \to P^k$ est surjectif, donc $(P^k)^{(1)}$ est un fibré affine sur P^k , de fibré vectoriel associé $v(P^k)^{(1)}$. Le théorème résulte alors de Goldschmidt [2] .

Remarque (6.17) .

Puisque R^k est supposé formellement intégrable, il existe un prolongement R^ℓ $(\ell \geq k)$ qui soit 2-acyclique, ou même involutif (i.e. n-acyclique ; cf Quillen [1] , Goldschmidt [1]). Quitte à restreindre P^k une fois de plus, on déduit alors de (6.1) et (6.15) que P^ℓ est formellement intégrable, et $P^\ell \to P^k$ surjectif. D'où l'existence de solutions formelles (et, dans le cas analytique, de solutions) de l'équation P^k dont le jet d'ordre k soit n'importe quel élément donné de P^k .

7. LE COMPLEXE DE SPENCER "SOPHISTIQUE".

Rappelons d'abord la version "sophistiquée" du complexe de Spencer (Spencer [1] ou [2] ; voir aussi Quillen [1] et Goldschmidt [1] pour le cas linéaire). Soit $\bar{\delta}$ la restriction de $-\mathcal{D}$ à $\Lambda J^o(\mathcal{T})^*\otimes\underline{\gamma}^k$ $(k \geq 1)$, et posons

$$B^{k,p} = \Lambda^p J^o(T)^*\otimes\tilde{J}^k(T)/\bar{\delta}(\Lambda^{p-1}J^o(T)^*\otimes\gamma^{k+1}) \quad ; \quad B^k = \oplus\, B^{k,p} \ .$$

A noter que (toujours pour $k \geq 1$) , $\mathcal{B}^k$ (le faisceau des sections de B^k) est un faisceau d'algèbres de Lie graduées pour le crochet quotient de celui défini au § 3 sur $\Lambda J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{J}^k(\mathcal{T})$: cela résulte immédiatement de (3.12) et du fait que, pour $k \geq 2$, $\Lambda J^o(\mathcal{T})^*\otimes\gamma^k$ est un idéal de $\Lambda J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{J}^k(\mathcal{T})$ (par contre, pour $k = 1$, cette dernière propriété n'est plus vraie car $\theta(\gamma^1)$ n'opère pas trivialement sur $J^o(\mathcal{T})^*$; seul subsiste le fait que $\underline{\gamma}^1$ est un idéal de $\tilde{J}^1(\mathcal{T})$). On a alors un complexe

$$(7.1) \qquad 0 \to \mathcal{T} \xrightarrow{\tilde{j}^k} \mathcal{B}^{k,o} \xrightarrow{\hat{D}} \mathcal{B}^{k,1} \xrightarrow{\hat{D}} \cdots \xrightarrow{\hat{D}} \mathcal{B}^{k,n} \to 0$$

obtenu de la manière suivante ; soit $u \in \mathcal{B}^{k,p}$, on relève u en $u' \in \Lambda^p J^o(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^{k+1}(\mathcal{T})$, et on prend pour $\hat{D}u$ la classe de $\bar{D}u'$ dans $\mathcal{B}^{k,p+1}$ (il est immédiat qu'elle ne dépend que de u) ; il est connu que ce complexe est acyclique ; par passage au quotient, on voit que la formule (3.12) sera encore vraie ici, avec $\bar{D}$ remplacé par $\hat{D}$, le crochet étant celui de $\mathcal{B}^k$.

La version "non-linéaire" de (7.1) s'obtient ainsi : toujours pour $k \geq 1$, soit $Q_k^{k+1}(a)$ l'ensemble des $G \in Q^{k+1}(a)$, avec $\pi_k G = I_k(a)$; on sait que Q^{k+1} est un fibré affine sur Q^k, la fibre du fibré vectoriel associé étant $v(Q^k)$; en $I_k(a)$, ce fibré a un élément canonique, i.e. $I_{k+1}(a)$, d'où un isomorphisme $\eth : Q_k^{k+1}(a) \xrightarrow{\sim} \gamma^{k+1}(a)$, qui s'interprète d'ailleurs aussi comme un isomorphisme du groupe $Q_k^{k+1}(a)$ sur son algèbre de Lie. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif.

$$(7.2) \qquad \begin{array}{ccc} Q_k^{k+1} & \xrightarrow{\lambda^1} & Q_o^{(1,k)} \\ \eth \big\downarrow & & \big\downarrow \eth \\ \gamma^{k+1} & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes \gamma^k \end{array} \quad .$$

De là et de (6.7) on déduit ceci

(7.3) $\quad$ <u>Si</u> $G \in \underline{Q}_k^{k+1}$, <u>on a</u> $\bar{D}G = -\bar{\delta}g$, <u>avec</u> $g = \eth G$.

Soit maintenant $F \in \tilde{\underline{Q}}^k$; relevons F en $F_1 \in \tilde{\underline{Q}}^{k+1}$, et soit $\hat{\mathcal{D}}F$ la classe de $\bar{\mathcal{D}}F_1$ dans $\mathcal{B}^{k,1}$; cette classe ne dépend que de F : soit en effet F_2 un autre relèvement de F ; on a $F_2 = F_1 G$, $G \in \underline{Q}_k^{k+1}$, d'où par (5.6) et (7.3)

$$\bar{\mathcal{D}}F_2 = \bar{\mathcal{D}}G + G^{-1}(\bar{\mathcal{D}}F_1) = -\bar{\delta}g + G^{-1}(\bar{\mathcal{D}}F_1)$$

et, comme G^{-1} opère trivialement sur $J^o(\mathcal{T})^*\otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$, on trouve finalement $\bar{\mathcal{D}}F_2 = -\bar{\delta}g + \bar{\mathcal{D}}F_1$.

Pour $u \in \mathcal{B}^{k,1}$, posons maintenant $\hat{\mathcal{D}}_1 u = \hat{D}u - \frac{1}{2}[u,u]$; on obtient ainsi un complexe, exact en $\tilde{Q}^k$:

$$(7.4) \qquad \underline{\mathrm{Aut}}(X) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \tilde{Q}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \mathcal{B}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \mathcal{B}^{k,2}$$

qui est la "version sophistiquée" de (5.12).

Notons que, si nous avions voulu partir de (5.5) au lieu de (5.12), nous aurions eu des difficultés ; notamment, on aurait trouvé un quotient de $T^*\otimes J^k(T)$ par un groupe affine, et non plus par un sous-espace vectoriel, et la version "sophistiquée" de $\mathcal{D}_1$ serait alors peu maniable ; ceci est notre raison majeure de travailler avec (4.12) plutôt que (4.5).

Comme $\hat{\mathcal{D}}$ est un opérateur différentiel d'ordre 1, il définit un morphisme de fibrés $p^1(\hat{\mathcal{D}}) : Q^{(1,k)} \to B^{k,1}$, que la formule (6.7) permet facilement d'interpréter : soient $F' \in Q^{(1,k)}$, $F = \pi_o F' \in Q^k$ et F_1 un relèvement de F à Q^{k+1} ; alors $p_1(\hat{\mathcal{D}})F'$ est la classe dans $B^{k,1}$ de $-(\nu^{*-1}\otimes \mathrm{id})\partial(F'^{-1}\lambda^1 F_1)$, classe indépendante de F_1 comme on vient de le voir ; on en déduit que la relation $p_1(\hat{\mathcal{D}})F' = 0$ équivaut à $F' \in \lambda^1 Q^{k+1}$.

Soit $\hat{B}^{k,1}$ l'ensemble des $u \in B^{k,1}$ dont la projection $\pi_o u$ dans $J_o(T)^*\otimes T$ soit telle que l'application $\nu^{-1} - i'(\pi_o u) : J_o(T) \to T$ soit inversible ; l'image de $Q^{(1,k)}$ -et même l'image de $Q_o^{(1,k)}$ - dans $B^{k,1}$ par $p^1(\hat{\mathcal{D}})$ est égale à $\hat{B}^{k,1}$ (parce que $\partial Q_o^{(1,k)}$ est l'ensemble des $u \in T^*\otimes \tilde{J}^k(T)$ tels que l'application $\mathrm{id} + i'(\pi_o u) : T \to T$ soit inversible ; ce dernier fait résulte de (6.6)). En résumé :

<u>Proposition (7.5)</u>.

<u>Pour</u> $k \geq 1$, <u>la suite</u>

$$I_{k+1} \to Q^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} Q^{(1,k)} \xrightarrow{p_1(\hat{\mathcal{D}})} \hat{B}^{k,1} \to 0$$

<u>est exacte</u>, <u>au sens suivant</u> : λ^1 <u>est injectif</u>, $p_1(\hat{\mathcal{D}})$ <u>surjectif</u>, <u>et l'on a</u> $\mathrm{Im}(\lambda^1) = \mathrm{Ker}\, p^1(\hat{\mathcal{D}})$. <u>Dans le même sens</u>, <u>la suite</u>

$$I_{k+1} \to Q_k^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} Q_o^{(1,k)} \xrightarrow{p_1(\hat{\mathcal{D}})} \hat{B}^{k,1} \to 0$$

<u>est exacte</u>.

<u>Proposition (7.6)</u>.

<u>Pour</u> $k \geq 1$, <u>la suite</u> $\tilde{Q}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \hat{\mathcal{B}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \mathcal{B}^{k,2}$ <u>est exacte</u>.

Considérons, pour tout $k \geq 0$, l'assertion suivante :

$(7.7)_k$ <u>Soit</u> $u \in J^o(\mathcal{T})^* \otimes \bar{J}^k(\mathcal{T})$, <u>avec</u> $\nu^{-1} - i'(\pi_o u) : J^o(T) \to T$ <u>inversible</u>, <u>et</u> $Du - \frac{1}{2}\pi_{k-1}[u,u] = 0$; <u>alors il existe</u> $F \in \tilde{Q}^{k+1}$ <u>tel qu'on ait</u> $\bar{\mathcal{D}}F = u$.

On a d'abord $(7.7)_{k+1} \Rightarrow (7.6)_k$ puisque si $u \in \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$ vérifie $\hat{\mathcal{D}}_1 u = 0$, on pourra relever u en $u' \in J^o(\mathcal{T})^* \otimes \bar{J}^{k+1}(\mathcal{T})$ vérifiant $\bar{\mathcal{D}}_1 u' = 0$. Démontrons $(7.7)_k$ par récurrence sur k . Pour $k = 0$, cela résulte des faits suivants :

i) L'application $\partial : Q_o^1 \to T^* \otimes T$ est un isomorphisme de Q_o^1 sur le sous-ensemble des $u \in T^* \otimes T \simeq \mathrm{End}(T)$ tels que $\mathrm{id}+u$ soit inversible.

ii) Pour $F \in Q_o^1$, on a $\bar{\mathcal{D}}F = -(\nu^{*-1} \otimes \mathrm{id})\partial F$.

Si u vérifie l'hypothèse de $(7.7)_o$, on pourra même choisir $F \in Q_o^1$ tel qu'on ait $\bar{\mathcal{D}}F = u$.

Supposons maintenant $(7.7)_k$ démontré, et démontrons $(7.7)_{k+1}$; soit u comme dans l'énoncé, avec k remplacé par $k+1$, et soit $u' = \pi_k u$; prenons $F \in \tilde{Q}^{k+1}$, avec $\bar{\mathcal{D}}F' = u'$, et relevons F' en $F_1 \in \tilde{Q}^{k+2}$; cherchons $F = F_1 G$, $G \in Q_{k+1}^{k+2}$, tel qu'on ait $\bar{\mathcal{D}}F = u$; il revient au même de résoudre $\bar{\mathcal{D}}G = u - \bar{\mathcal{D}}F_1$ (cf le calcul qui suit (7.3)), ou encore $-\bar{\delta}g = u - \bar{\mathcal{D}}F_1$. Posons $v = u - \bar{\mathcal{D}}F_1$; on a $\pi_k v = 0$, donc $v \in J^o(T)^* \otimes \underline{V}^{k+1}$; de plus, on vérifie facilement qu'on a encore $\bar{D}v - \frac{1}{2}\pi_k[v,v] = 0$, ce qui s'écrit encore $\bar{\delta}v = 0$ (puisque $\pi_k[v,v] = 0$) ; le résultat est alors conséquence de l'exactitude de (1.3).

<u>Remarque (7.8)</u>.

Le raisonnement précédent montre qu'on peut en fait remplacer $\tilde{Q}^k$

dans (7.7) par $\{F \in \underset{\sim}{\tilde{Q}}^k \mid \pi_o F = I_o\} = \tilde{Q}_o^k$; d'autre part, l'application $\underset{\sim}{\tilde{Q}}_o^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$ est injective, puisque, pour F et $G \in \tilde{Q}^k$, l'égalité $\bar{\mathcal{D}}F = \bar{\mathcal{D}}G$ (ou $\hat{\mathcal{D}}F = \hat{\mathcal{D}}G$) équivaut à $FG^{-1} \in \tilde{j}^k \underline{\mathrm{Aut}}(X)$; il en résulte que la suite des sections

$$\Gamma(X,\underset{\sim}{\tilde{Q}}_o^k) \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \Gamma(X,\hat{\mathcal{B}}^{k,1}) \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \Gamma(X,\mathcal{B}^{k,2})$$

est exacte, et de même avec le premier terme remplacée par $\Gamma(X,\underset{\sim}{Q}^k)$.

Soit maintenant R^k une équation de Lie formellement intégrable (avec $k \geq 1$) ; soit $C^{k,p}$ l'image de $J^o(T)^*\otimes\tilde{R}^k$ dans $B^{k,p}$, et posons $\hat{C}^{k,1} = C^{k,1} \cap \hat{B}^{k,1}$; on a $C^{k,1} = J^o(T)^*\otimes\tilde{R}^k/\bar{\delta}g^{k+1}$; comme g^{k+1} est de rang constant, $C^{k,1}$ est aussi de rang constant ; de la surjectivité de $R^{k+1} \to R^k$, on déduit alors que $\hat{D} : \mathcal{B}^{k,o} \to \mathcal{B}^{k,1}$ envoie $\underset{\sim}{\tilde{R}}^k$ dans $\mathcal{C}^{k,1}$; de même, la surjectivité de $(P^k)^{(1)} \to P^k$ et (6.10) montrent que (7.4) donne par restriction un complexe

(7.9) $$(\mathrm{Sol}) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \underset{\sim}{\tilde{P}}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \hat{\mathcal{C}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \mathcal{B}^{k,2}$$

et que ce complexe est exact en $\underset{\sim}{\tilde{P}}^k$. La proposition (7.5) donne alors par restriction le résultat suivant :

Proposition (7.10).

Les suites

$$I_{k+1} \to (P^k)^{(1)} \xrightarrow{\lambda^1} \tilde{J}^1(P^k) \xrightarrow{p_1(\tilde{\mathcal{D}})} \hat{C}^{k,1} \to 0$$

$$I_{k+1} \to (P^k)^{(1)} \cap Q_k^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} \tilde{J}_o^1(P^k) \xrightarrow{p_1(\hat{\mathcal{D}})} \hat{C}^{k,1} \to 0$$

sont exactes (on pose $\tilde{J}_o^1(P^k) = \tilde{J}^1(P^k) \cap Q_o^{(1,k)}$)

(Pour l'analogue dans le cas linéaire, voir Goldschmidt [1]).

Remarque (7.11).

Supposons g^k 2-acyclique ; on aura alors

$$C^{k,2} = \Lambda^2 J^o(T)^*\otimes\tilde{R}^k/\bar{\delta}(J^o(T)^*\otimes g^{k+1})$$

et l'on vérifie facilement que $C^{k,2}$ est de rang constant. De la surjectivité

$R^{k+1} \to R^k$, on déduit alors qu'on a $\hat{D}\mathcal{C}^{k,1} \subset \mathcal{C}^{k,2}$, d'où $\hat{\mathcal{D}}_1\mathcal{C}^{k,1} \subset \mathcal{C}^{k,2}$, et le complexe (7.9) peut s'écrire

(7.12) $$(\mathrm{Sol}) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \underline{\tilde{P}}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \hat{\mathcal{C}}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \hat{\mathcal{C}}^{k,2} .$$

Pour terminer les généralités sur le "complexe de Spencer non-linéaire sophistiqué", notons ceci : soit $F \in \tilde{Q}^k$, avec $k \geq 1$; alors l'action de F^{-1} sur $\Lambda J^o(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$ passe au quotient pour donner une action de F^{-1} sur $\mathcal{B}^k$; pour s'en convaincre, il suffit de remarquer ceci : soit $u \in \Lambda^{p-1} J^o(\mathcal{T})^* \otimes \underline{Y}^{k+1}$, et soit F_1 un relèvement de F à $\underline{Q}^{k+1}$; alors $F_1^{-1}(u)$ ne dépend que de F ; et, en le notant $F^{-1}(n)$, on a $\overline{\delta F}^{-1}(u) = F^{-1}(\overline{\delta} u)$ (cette dernière formule résulte de (3.10.iii) et de (5.6)). Pour F et $G \in \tilde{\underline{Q}}^k$, on a alors

(7.13) $$\hat{\mathcal{D}}(FG) = \hat{\mathcal{D}}G + G^{-1}(\hat{\mathcal{D}}F)$$

qui résulte de la formule analogue pour $\overline{\mathcal{D}}$ (cette dernière résultant immédiatement de (5.6)).

Pour $u \in \mathcal{B}^{k,1}$, posons $u^F = \hat{\mathcal{D}}F + F^{-1}(u)$; on a

(7.14) $$(u^F)^G = u^{FG}$$

formule qui, pour $u = 0$, se réduit à (7.13) , et

(7.15) $$\hat{\mathcal{D}}_1 u^F = F^{-1}(\hat{\mathcal{D}}_1 u) .$$

Enfin, si $u \in \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$, on a $u^F \in \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$.

Ces résultats s'établissent comme les précédents, et nous laissons les détails au lecteur.

Notons enfin que, pour $F \in \underline{\tilde{P}}^k$, de $F^{-1}(\underline{\tilde{R}}^k) = \underline{\tilde{R}}^k$, on déduit $F^{-1}(\underline{\mathcal{C}}^{k,p}) = \underline{\mathcal{C}}^{k,p}$, d'où une "restriction" des formules précédentes à $\underline{\tilde{P}}^k$, $\mathcal{C}^{k,p}$ et $\hat{\mathcal{C}}^{k,1}$.