

# COURS DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD MALGRANGE

## Chapitre II Forme finie des équations de Lie

*Cours de l'institut Fourier*, tome 8 (1971-1972), p. 22-41

[http://www.numdam.org/item?id=CIF\\_1971-1972\\_\\_8\\_22\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CIF_1971-1972__8_22_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CHAPITRE II

### FORME FINIE DES EQUATIONS DE LIE

#### 5. TRANSFORMATIONS DIAGONALES.

Soient  $Q^k(a,b)$  (resp  $Q^k(a)$ , resp  $Q^k$ ) l'ensemble des jets d'ordre  $k$  inversibles d'applications  $X \rightarrow X$ , de source  $a$  et de but  $b$  (resp de source  $a$  et de but quelconque, resp de source et de but quelconques) ; muni de la loi de composition des jets,  $Q^k$  est un groupoïde, i.e. une petite catégorie dont les flèches sont inversibles ; d'autre part,  $Q^k$  est muni naturellement d'une structure de variété différentiable. Sauf mention expresse du contraire, nous considérerons  $Q^k$  comme fibré sur  $X$  par la projection "source". Nous noterons alors  $\underline{Q}_a^k$  l'ensemble de ses germes de sections en  $a$ , et  $\underline{Q}^k = \cup \underline{Q}_a^k$  le faisceau de ses sections.

Soit d'autre part  $f$  une application  $X^2 \rightarrow X$ , et posons  $f^0(x) = f(x,x)$  l'application  $F = (f^0, f) : X^2 \rightarrow X^2$  est  $pr_1$ -projetable et laisse stable  $\Delta$  ; nous dirons que  $F$  est diagonale si en outre, pour tout  $x \in X$ , le germe en  $x$  de l'application  $x' \mapsto f(x,x')$  est inversible ; le composé de deux applications diagonales est encore diagonal ; pour qu'une application diagonale  $F = (f^0, f)$  soit inversible au voisinage de  $\Delta$ , il faut et il suffit que  $f^0$  soit inversible.

Deux applications diagonales  $F$  et  $G$  ont, par définition, même partie principale d'ordre  $k$  ( $k$ , entier  $\geq 0$ ) si elles coïncident sur  $\Delta$  ainsi que leurs dérivées d'ordre  $\leq k$ , ce qui entraîne en particulier  $f^0 = g^0$  ; nous écrirons cela abusivement :  $f = g \text{ mod } \mathcal{J}^{k+1}$ . A la partie principale d'ordre  $k$  définie par  $F$ , on associe la section de  $Q^k$  suivante :  $x \mapsto \{\text{jet d'ordre } k \text{ en } x \text{ de } x' \mapsto f(x,x')\}$  ; on obtient ainsi une bijection entre  $\Gamma(X, Q^k)$  (resp.  $\underline{Q}^k$ ) et l'ensemble des parties principales (resp. des germes de parties principales)

d'ordre  $k$  d'applications diagonales  $X^2 \rightarrow X^2$  ; dans la suite, nous identifierons ces deux espaces (resp. ces deux faisceaux). Par passage au quotient à partir de la loi de composition des applications diagonales, on obtient une loi qui, à  $F \in \underline{Q}_a^k$  et  $G \in \underline{Q}_b^k$ , avec  $b = f^0(a)$ , associe  $GF \in \underline{Q}_a^k$  (bien entendu, dans chaque fibre, cette loi coïncide avec celle définie plus haut sur  $\underline{Q}^k$ ). Nous noterons  $\tilde{Q}^k$  le sous-faisceau des éléments inversibles de  $\underline{Q}^k$  ; c'est encore un groupoïde. Une section  $F$  de  $\underline{Q}^k$  est donc une section de  $\tilde{Q}^k$  si et seulement si elle est étale (i.e. localement inversible), ou encore si  $f^0$  est étale.

Soit  $\underline{\text{Aut}}(X)$  le faisceau des germes d'applications étales  $X \rightarrow X$  ; à  $f \in \underline{\text{Aut}}(X)$ , on associe le germe d'application diagonale :  $(x, x') \mapsto (f(x), f(x'))$ , dont la partie principale d'ordre  $k$  sera notée  $\tilde{j}^k f$  : moyennant l'identification faite ci-dessus cette application coïncide avec l'application "jet d'ordre  $k$  de  $f$ " usuelle. Pour  $k = 0$ , on obtient un isomorphisme  $\tilde{j}^0 : \underline{\text{Aut}}(X) \rightarrow \tilde{Q}^0$  ; dans la suite, nous identifierons ces deux faisceaux [de même que nous avons identifié  $\mathcal{J}$  et  $\tilde{j}^0(\mathcal{J})$ ].

Notons enfin que  $\tilde{j}^k(\mathcal{J})$  peut être considéré comme l'algèbre de Lie de  $\tilde{Q}^k$  ; de même que  $\mathcal{J}$  est "l'algèbre de Lie" de  $\underline{\text{Aut}}(X)$  ; de façon plus précise, on a les propriétés suivantes :

a) Soit  $F_t$  une famille à un paramètre de sections de  $\tilde{Q}^k$ , dépendant différemment de  $t$ , avec  $F_0 = \text{id}$  ; en relevant la situation à  $X^2$  on définit de manière évidente

$$\frac{d}{dt} F_t \Big|_{t=0} \in \Gamma(X, \tilde{j}^k(\mathcal{J}))$$

b) Soit  $\xi \in \Gamma(X, \tilde{j}^k(\mathcal{J}))$  ; en relevant  $\xi$  en un champ diagonal sur  $X^2$ , on définit, pour tout ouvert  $U \subset\subset X$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  voisin de 0  $\exp(t\xi)|_U \in \Gamma(U, \tilde{Q}^k)$ . Les formules usuelles sur l'exponentielle des champs de vecteurs sont encore vraies, puisque tout est défini par passage au quotient à partir de la situation usuelle sur  $X^2$  ; enfin, de la définition de  $\tilde{j}^k$  résulte que, pour  $\xi \in \Gamma(X, T)$ , on a, pour  $U \subset\subset X$  et  $t$  voisin de 0

$$(5.1) \quad \tilde{j}^k \exp(t\xi)|_U = \exp(t\tilde{j}^k \xi)|_U$$

(Dans la suite, par abus de notation, nous omettrons d'indiquer l'ouvert  $U$ ). En employant le langage géométrique utilisé précédemment, on peut donc dire que  $\tilde{Q}^k$  (resp  $\tilde{j}^k(\mathcal{J})$ ) est le faisceau des automorphismes locaux (resp infinitésimaux)  $pr_1$ -projetables de  $\Delta^{(k)}$ .

Prenons  $k \geq 0$ , et soit  $F \in \tilde{Q} = \varinjlim_{\tilde{k}} \tilde{Q}^k$ ; le théorème (3.6) amène à poser

$$(5.2) \quad \mathcal{B}F = F^{-1}(\omega)_{-\omega} .$$

En effectuant le calcul en coordonnées locales, (après avoir relevé  $F$  en une application diagonale) on trouve

$$(5.3) \quad \mathcal{B}F = dx \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x'}$$

on a donc  $\mathcal{B}F \in \mathcal{J}^* \otimes \mathcal{J}(\mathcal{J})$ ; par passage au quotient, on trouve que  $\mathcal{B}$  définit encore une application  $\mathcal{B} : \tilde{Q}^{k+1} \rightarrow \mathcal{J}^* \otimes \mathcal{J}^k(\mathcal{J})$  (Nous écrirons encore par abus de notation, pour  $F \in \tilde{Q}^{k+1} : \mathcal{B}F = F^{-1}(\omega)_{-\omega}$ ). De plus,  $\mathcal{B}F = 0$  équivaut à  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ , ou encore à  $F = \tilde{j}^{k+1}(f^0)$ .

De  $[\omega, \omega] = 0$ , on tire  $[F^{-1}(\omega), F^{-1}(\omega)] = 0$ , ou, d'après (3.6) et (5.2) "l'équation de structure" (pour  $k \geq 1$ ; pour  $k = 0$ , cette équation est vide).

$$(5.4) \quad \mathcal{B}_1 F \stackrel{\text{Déf.}}{=} D\mathcal{B}F + \frac{1}{2} [\mathcal{B}F, \mathcal{B}F] = 0 .$$

En passant aux germes, on obtient le "complexe non-linéaire de Spencer" (1ère forme)

$$(5.5) \quad \text{Aut}(X) \xrightarrow{\tilde{j}^{k+1}} \tilde{Q}^{k+1} \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathcal{J}^* \otimes \mathcal{J}^k(\mathcal{J}) \xrightarrow{\mathcal{B}_1} \Lambda^2 \mathcal{J}^* \otimes \mathcal{J}^{k-1}(\mathcal{J})$$

et ce complexe est exact en  $\tilde{Q}^{k+1}$ . Le même complexe peut aussi être obtenu en posant  $\mathcal{B}F = \chi_{-F^{-1}(\chi)}$  et en utilisant (3.7) au lieu de (3.6) (on vérifie aisément, par exemple en utilisant l'expression de  $\chi$  en coordonnées locales, que les deux définitions de  $\mathcal{B}F$  coïncident; nous laissons cette question au lecteur). La théorie de l'équivalence peut en principe être faite avec ce complexe (cf Guillemin-Sternberg [1], Quê [1]). Cependant, pour passer aux complexes "sophistiqués", (cf §7), il est préférable de travailler plutôt avec les formules (3.10), ce que nous allons faire maintenant.

Soit  $F \in \tilde{Q}^{k+1}$ ; alors  $F^{-1}$  opère de manière évidente sur  $\tilde{j}^k(\mathcal{J})$ ,

et, par conséquent, sur  $\Lambda \check{J}^k(\mathcal{J})^* \otimes \check{J}^k(\mathcal{J})$  ; considérant alors la classe de  $\bar{\chi}$  dans ce dernier espace, classe que nous noterons encore  $\bar{\chi}$ , nous poserons :

$$(5.6) \quad \bar{\mathcal{B}}F = \bar{\chi} - F^{-1}(\bar{\chi}) \quad .$$

Désignant, comme au §3, par  $\check{\nu}$  le projecteur  $\check{J}(\mathcal{J}) \rightarrow \check{J}(\mathcal{J})$  parallèlement aux vecteurs horizontaux, en vertu de la formule  $i'(\bar{\chi}) = \check{\nu} - \text{id}$ , on a la formule suivante, analogue "fini" de (3.11):

$$(5.7) \quad i'(\bar{\mathcal{B}}F) = \check{\nu} - F^{-1}(\check{\nu}) \quad .$$

Cette application est à valeurs dans  $\check{J}^k(\mathcal{J})$ , puisque cet espace est évidemment stable par  $F^{-1}$ ; d'autre part elle s'annule sur  $\check{J}^k(\mathcal{J})$ ; par suite, on a

$$\bar{\mathcal{B}}F \in J^0(\mathcal{J})^* \otimes \check{J}^k(\mathcal{J}) \quad .$$

Il est facile de trouver la relation qui existe entre  $\mathcal{B}F$  et  $\bar{\mathcal{B}}F$ ; en effet, en restreignant l'application (5.7) à  $J(\mathcal{J})$ , on trouve

$$(5.8) \quad i'(\bar{\mathcal{B}}F)|_{J^k(\mathcal{J})} = \nu^{-1} - F^{-1}(\nu^{-1}) \quad .$$

D'autre part, un calcul analogue avec  $\chi$  au lieu de  $\bar{\chi}$  donne la relation

$$(5.9) \quad i'(\mathcal{B}F)|_{\check{J}^k(\mathcal{J})} = F^{-1}(\nu) - \nu \quad .$$

Par conséquent, l'application  $\nu^{-1} - i'(\bar{\mathcal{B}}F) : J^k(\mathcal{J}) \rightarrow \check{J}^k(\mathcal{J})$  a pour inverse l'application  $\nu + i'(\mathcal{B}F)$ ; on en déduit d'abord que  $\bar{\mathcal{B}}F = 0$  équivaut à  $\mathcal{B}F = 0$ , donc à  $F = j^{\check{k}+1}(f^0)$ . On en déduit ensuite l'expression de  $\bar{\mathcal{B}}F$  en coordonnées locales.

En effet, pour  $\xi = a(x, x') \frac{\partial}{\partial x'} + a(x, x) \frac{\partial}{\partial x} \in \check{J}^k(T)$ , posons  $\eta = b(x, x') \frac{\partial}{\partial x'} = \nu \xi + \xi \wedge \mathcal{B}F$ ; d'après 5.3, on a

$$b(x, x') = a(x, x') + a(x, x) \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right)^{-1}$$

d'où

$$b(x, x) = a(x, x) \left[ I + \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right)^{-1} (x, x) \right] = a(x, x) \frac{df^0}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right)^{-1} (x, x)$$

(parce que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial x'}(x, x) = \frac{df^0}{dx}$ ). D'où finalement

$$a(x, x') = b(x, x') - b(x, x)M(x, x') \quad ,$$

avec

$$M(x, x') = \frac{\partial f}{\partial x'}(x, x) \left( \frac{df^0}{dx} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \right)^{-1}$$

et, par conséquent

$$(5.10) \quad \bar{\mathcal{D}}F = \bar{dx} \otimes [M(x, x') \frac{\partial}{\partial x'} + M(x, x) \frac{\partial}{\partial x}] .$$

Cette formule m'avait été donnée par C. Buttin dans un état antérieur de la théorie.

Finalement, de  $[\bar{\chi}, \bar{\chi}] = 0$  et de (3.10), on tire "l'équation de structure" (2e forme)

$$(5.11) \quad \bar{D} \bar{\mathcal{D}}F - \frac{1}{2} \pi_{k-1} [\bar{\mathcal{D}}F, \bar{\mathcal{D}}F] = 0$$

(on écrit ici  $\pi_{k-1}$  pour  $\text{id} \otimes \pi_{k-1}$ ).

D'où une deuxième forme du "complexe non-linéaire" de Spencer

$$(5.12) \quad \underline{\text{Aut}}(X) \xrightarrow{j^k} \tilde{Q}^{k+1} \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}} J^0(\mathcal{J})^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{J}) \xrightarrow{\bar{\mathcal{D}}^{-1}} \Lambda^2 J^0(\mathcal{J})^* \otimes \tilde{J}^{k-1}(\mathcal{J})$$

avec  $\mathcal{D}_1 u = \bar{D}u - \frac{1}{2} \pi_{k-1} [u, u]$  ; ce complexe est encore exact en  $\tilde{Q}^{k+1}$ .

Remarque (5.13) : (Analogie de 3.13) Pour  $\alpha \in \Lambda \mathcal{J}^*$ , posons  $\bar{\alpha} = \nu^{*-1} \alpha$  et  $\text{Ad } F^{-1}(\alpha) = \nu^* F^{-1}(\bar{\alpha})$ . Pour calculer  $\text{Ad } F^{-1}(\alpha)$ , notons qu'il coïncide avec  $F^{-1}(\alpha)$  pour  $\alpha$  de degré 0, et que d'autre part  $\text{Ad } F^{-1}$  commute au produit extérieur. Il suffit donc de faire le calcul pour  $\text{deg } \alpha = 1$ ; on a alors :  $\bar{\alpha} = \bar{\chi} \wedge \alpha$ , d'où  $F^{-1}(\bar{\alpha}) = F^{-1}(\bar{\chi}) \wedge F^{-1}(\alpha) = \bar{\chi} \wedge F^{-1}(\alpha) - \bar{\mathcal{D}}F \wedge F^{-1}(\alpha)$  d'après (5.6). En posant  $\mathcal{D}'F = (\nu^* \otimes \text{id}) \bar{\mathcal{D}}F$ , on obtient finalement, pour  $\alpha$  de degré 1 :

$$\text{Ad } F^{-1}(\alpha) = F^{-1}(\alpha) - \mathcal{D}'F \wedge F^{-1}(\alpha)$$

(comparer avec Spencer [1], [2] où cette formule est prise comme définition de  $\text{Ad } F^{-1}$ ).

Pour terminer ce paragraphe, introduisons les analogues "finis" des notions considérées à la fin du § 4. Considérons une application  $F : X^3 \rightarrow X^3$  qui possède les propriétés suivantes

- i)  $F$  laisse stable  $\text{pr}_{23}^{-1}(\Delta)$  ;
- ii)  $F$  est  $\text{pr}_{12}$ -projetable, et  $\text{pr}_{12}(F)$  est diagonale.

Autrement dit :  $F$  peut s'écrire  $y'' = f(x, x', x'')$  ;  $y' = f(x, x', x')$  ;  $y = f(x, x, x)$  ,  $f$  étant une application  $X^3 \rightarrow X$  telle que, pour tout  $x \in X$  , le germe en  $x$  de l'application  $x' \rightarrow y'$  soit inversible.

Nous dirons que  $F$  est bidiagonale si outre i) et ii), elle possède la propriété suivante

iii) Pour tout  $x \in X$  , le germe en  $(x, x)$  de l'application  $(x', x'') \mapsto (y', y'')$  est inversible. (D'après le théorème des fonctions implicites, il revient au même de supposer que le germe en  $x$  de l'application  $y'' \mapsto f(x, x, x'')$  est inversible).

On dira que deux applications bidiagonales ont même partie principale d'ordre  $(\ell, k)$  si, en coordonnées locales, leurs composantes coïncident modulo  $\mathcal{J}^{(\ell+1, k+1)}$  ; on définit ainsi le faisceau  $\underline{Q}^{(\ell, k)}$  des germes de parties principales d'ordre  $(\ell, k)$  d'applications bidiagonales ; il s'identifie au faisceau des sections (pour la fibration "source") du fibré  $Q^{(\ell, k)}$  des jets d'ordre  $\ell$  de sections étales de  $\underline{Q}^k$  (i.e. de sections de  $\tilde{Q}^k$ ) ; muni de la loi de composition des jets,  $Q^{(\ell, k)}$  est un groupoïde . On désigne enfin par  $\tilde{Q}^{(\ell, k)}$  le sous-faisceau des section étales de  $\underline{Q}^{(\ell, k)}$  , i.e. des sections  $F$  telles que  $x \mapsto f(x, x, x)$  soit étale ; c'est encore un groupoïde, et  $\tilde{j}^{(\ell, k)}(\mathcal{U})$  peut être considéré comme son "algèbre de Lie" dans le même sens que  $\tilde{j}^k(\mathcal{U})$  est l'algèbre de Lie de  $\tilde{Q}^k$  (nous laissons les détails au lecteur). Les applications  $\tilde{j}^\ell : \tilde{Q}^k \rightarrow \tilde{Q}^{(\ell, k)}$  et  $\tilde{\lambda}^\ell : \tilde{Q}^{k+\ell} \rightarrow \tilde{Q}^{(\ell, k)}$  se définissent ainsi : si  $F$  est une application diagonale définie par  $y' = f(x, x')$  ,  $y = f(x, x)$  ,  $\tilde{j}^\ell F$  est défini par  $y'' = f(x', x'')$  ;  $y' = f(x', x')$  ;  $y = f(x, x)$  et  $\tilde{\lambda}^\ell F$  est défini par  $y'' = f(x, x'')$  ;  $y' = f(x', x')$  ;  $y = f(x, x)$  et  $\tilde{\lambda}^\ell F$  est défini par  $y'' = f(x, x'')$  ;  $y' = f(x, x')$  ;  $y = f(x, x)$  . De là résultent les propriétés suivantes :

(5.14)  $\tilde{j}^\ell$  est un homomorphisme de groupoïdes.

(5.15)  $\tilde{\lambda}^\ell$  est un homomorphisme de groupoïdes ; de plus  $\tilde{\lambda}^\ell$  est défini "fibre par fibre", donc définit un homomorphisme de groupoïdes des  $Q^{k+\ell} \rightarrow Q^{(\ell, k)}$  que nous noterons  $\lambda^\ell$  .

(5.16)  $\tilde{j}^\ell$  et  $\tilde{\lambda}^\ell$  commutent à l'exponentielle des champs de vecteurs.

6. EQUATIONS DE LIE : FORME FINIE.

Soit  $I_k(a) \in Q^k(a, a)$  le jet d'ordre  $k$  en  $a$  de l'identité, et soit  $I_k$  la section de  $Q^k$   $a \mapsto I_k(a)$ . Soit  $\xi \in \Gamma(X, \tilde{J}^k(T))$ ; et soit  $F_t \in \Gamma(X, \tilde{Q}^k)$ , avec  $F_0 = I_k$ ,  $\frac{d}{dt} F_t|_{t=0} = \xi$  ( $t \in \mathbb{R}$ , voisin de 0); on peut aussi considérer  $\frac{d}{dt} F_t(a)|_{t=0}$  en tant que vecteur de  $Q_k(a)$  en  $I_k(a)$ , et l'on s'assure aisément que ce vecteur ne dépend que de  $\xi$ ; d'où un isomorphisme entre  $\tilde{J}^k(T)(a)$  et l'espace des vecteurs de  $Q^k(a)$  en  $I_k(a)$ . Désignant par  $V(Q^k)$  l'espace des vecteurs verticaux de  $Q^k$  pour la projection "source", cela revient à dire qu'on a un isomorphisme  $\tilde{J}^k(T)(a) \simeq V(Q^k)(I_k(a))$ .

Soit  $F \in Q^k(a, b)$ ; l'application  $G \mapsto GF$  est un isomorphisme  $Q^k(b) \rightarrow Q^k(a)$ ; cet isomorphisme fait correspondre à  $\xi$ , vecteurs de  $Q^k(b)$  en  $G$  (= vecteur vertical de  $Q^k$  en  $G$ ) un vecteur de  $Q^k(a)$  en  $GF$ , que nous noterons  $\xi F$ ; en particulier, si l'on prend  $G = I_k(b)$ , on obtient une application  $\xi \mapsto \xi F : \tilde{J}^k(T)(b) \rightarrow V(Q^k)(F)$ . Soit  $\xi \in \Gamma(X, \tilde{J}^k(T))$ ; pour  $F \in Q^k$ , posons  $\xi F = \xi(b)F$ ,  $b = \text{but } F$ ; l'application  $F \mapsto \xi F$  définit un champ invariant à droite sur  $Q^k$ , que nous noterons  $\tau^k(\xi)$ ; il revient au même de construire  $\tau^k$  ainsi: considérons pour un instant  $Q^k$  comme fibré sur  $X$  par la projection "but"; si  $g$  est un automorphisme de  $X$ , associons-lui l'automorphisme de  $Q^k$  (qui, pour tout  $a$ , est un automorphisme de  $Q^k(a)$ ):  $F \mapsto (j^k g)(b)F$ , avec  $b = \text{but } F$ ; en passant aux automorphismes infinitésimaux, on obtient une structure de prolongement d'ordre  $k$  sur  $X$  de  $Q^k$  qui définit précisément  $\tau^k$ ; en particulier,  $\tau^k$  est un morphisme d'algèbres de Lie. Soit maintenant  $R^k$  une équation de Lie; les  $\tilde{R}^k F$ ,  $F \in Q^k$  forment un système de Pfaff complètement intégrable et transverse à  $I_k$ , puisque formé de vecteurs verticaux; l'ensemble des sous-variétés intégrables passant par  $I_k$  définit donc un germe de sous-variété de  $Q^k$  au voisinage de  $I_k$ , que nous noterons  $P^k$ ; nous désignerons aussi par  $P^k$  un représentant du germe précédent, que l'on sera amené à restreindre au besoin pour que les propriétés qui suivent soient vraies.

Il résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites que la restriction à  $P^k$  de l'application "source", et de l'application "but" sont des submersions; par contre, la restriction à  $P^k$  de l'application (source, but) est une submersion si et seulement si  $R^k$  est formellement transitif, ce qui,



par définition signifie que la projection  $\tilde{R}^k \rightarrow T$  est surjective (dans le cas général, on ne peut absolument rien dire ; nous n'avons même pas supposé  $\tilde{R}^k \rightarrow T$  de rang constant). On démontre, comme dans la théorie des groupes de Lie, que  $P^k$  est un germe de sous-groupoïde de  $Q^k$  le long de  $I_k$ , c'est-à-dire que si l'on a  $F \in P^k$ ,  $G \in P^k$ , source  $(G) = \text{but}(F)$ , et si  $F$  et  $G$  sont assez voisins de  $I_k$ , on a  $F^{-1} \in P^k$  et  $FG \in P^k$  (nous laissons les détails au lecteur). Comme  $Q^k$ ,  $P^k$  sera muni sauf mention explicite du contraire de la projection "source" ; nous noterons alors  $P^k$  le faisceau de ses sections, et  $\tilde{P}^k$  le faisceau de ses sections étales. Dans la suite nous supposerons  $k \geq 1$ , le cas  $k = 0$  étant trivial par Frobenius.

On peut considérer  $P^k$  comme une équation différentielle (non linéaire) d'ordre  $k$  dans les germes d'applications  $X \rightarrow X$  ; nous allons donc utiliser dans ce cas particulier la théorie formelle des équations différentielles non-linéaires, en prenant pour référence Goldschmidt [2]. Dans toute la suite de cet article, nous supposerons que  $R^k$  est une équation de Lie formellement intégrable.

Commençons par rappeler une proposition connue (cf Quê [1]). Pour  $F \in Q^{(1,k)}$  et  $\xi \in \Gamma(X, \tilde{J}^{(1,k)}(T))$ , on peut définir  $\xi F$ , vecteur vertical de  $Q^{(1,k)}$  en  $F$  de la même manière que nous avons défini  $\tau^k$  ci-dessus ; désignons par  $J^1(P^k)$  (resp  $\tilde{J}^1(P^k) \subset Q^{(1,k)}$ ) l'ensemble des jets d'ordre 1 de sections (resp de sections étales) de  $P^k$  ; il est facile de voir que, au voisinage de  $\tilde{J}^1 I_k = \tilde{\lambda}^1 I_{k+1}$ ,  $\tilde{J}^1(P^k)$  peut être construit au moyen du système de Pfaff  $F \rightarrow \tilde{J}^1(\tilde{R}^k)F$  de la même manière que  $P^k$  a été construit au moyen de  $\tilde{R}^k$  ; d'autre part, du fait que  $\tilde{\lambda}^1 : Q^{k+1} \rightarrow Q^{(1,k)}$  est un homomorphisme de groupoïdes, résulte que  $\tilde{\lambda}^1$  commute à l'opération  $(\xi, F) \rightarrow \xi F$  ; ces faits, joints à l'égalité  $\tilde{R}^{k+1} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1} \tilde{J}^1(\tilde{R}^k)$  entraînent, au voisinage de  $I_{k+1}$ , la relation  $P^{k+1} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1} \tilde{J}^1(P^k)$ .

D'autre part,  $Q^{k+1}$  s'identifie naturellement au prolongement d'ordre 1 de  $Q^k$  (puisque  $k \geq 1$ , un jet d'ordre  $k+1$  d'application  $X \rightarrow X$  dont la projection d'ordre  $k$  est inversible, est lui-même inversible) ; par le même argument, on a aussi  $\tilde{J}^1(P^k) \cap \tilde{\lambda}^1(Q^{k+1}) = J^1(P^k) \cap \tilde{\lambda}^1(Q^{k+1})$ . Par conséquent,  $(P^k)^{(1)} = (\tilde{\lambda}^1)^{-1} \tilde{J}^1(P^k)$  est le prolongement d'ordre 1 de  $P^k$ , et l'on a le

résultat suivant :

Proposition (6.1).

Au voisinage de  $I_{k+1}$ , on a  $P^{k+1} = (P^k)^{(1)}$  ; en particulier la projection  $(P^k)^{(1)} \rightarrow P^k$  est surjective.

Le dernier point résulte du théorème des fonctions implicites, et de l'hypothèse " $R^{k+1}$  est un fibré, et  $\pi_k : R^{k+1} \rightarrow R^k$  est surjectif".

Dans la suite, nous noterons  $(\underline{P}^k)^{(1)}$  [resp  $(\underline{P}^k)^{(1)}$ ] le faisceau des sections (resp des sections étales) de  $(P^k)^{(1)}$ , considéré comme sous-fibré de  $Q^{k+1}$ .

La fin de ce paragraphe sera consacrée à l'étude du complexe de Spencer de  $P^k$ . Pour cela nous aurons besoin de reprendre les considérations qui conduisent d'habitude à la définition de la "forme fondamentale sur les espaces de repères" (cf notamment Bernard [1], Guillemin-Sternberg [1]), et de donner leur lien avec le formalisme développé au §3.

Soit  $G$  une section de  $\tilde{Q}^k$  ; pour  $a \in X$ , l'application  $F \rightarrow G(b)F$  ( $F \in Q^k(a)$ , but  $F = b$ ) est un automorphisme de  $Q^k(a)$  ; cet automorphisme transforme  $\xi \in V(Q^k)(F)$  en un vecteur de  $V(Q^k)(G(b)F)$  que nous noterons  $G\xi$  ; en particulier, prenant  $F = I_k(a)$ , l'application  $\xi \rightarrow G\xi$  est une bijection  $\tilde{J}^k(T)(a) = V(Q^k)(I_k(a)) \rightarrow V(Q^k)(G(a))$ . On vérifie que l'action à gauche des automorphismes diagonaux définie ici sur  $V(Q^k)$  commute à l'action à droite définie au début de ce paragraphe ; alors la bijection  $\tilde{J}^k(T)(a) \rightarrow \tilde{J}^k(T)(b)$  définie par  $\xi \mapsto G\xi G(a)^{-1}$  (que nous écrirons aussi  $\xi \mapsto G\xi G^{-1}$ ) provient de l'action naturelle des automorphismes diagonaux sur les champs diagonaux : pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que, si  $F_t$  est une famille à un paramètre de sections de  $\tilde{Q}^k$ , avec  $F_0 = I_k$ ,  $\frac{d}{dt} F_t|_{t=0}(a) = \xi$ , on a  $\frac{d}{dt} G F_t G^{-1}|_{t=0}(a) = G\xi G^{-1}$ . Nous poserons  $G\xi G^{-1} = G(\xi)$ , ou quelquefois  $G[\xi]$  pour éviter les confusions.

On vérifie aisément que  $G\xi$  ne dépend que de  $\xi$  et du jet d'ordre 1 de  $G$  en  $a$  ; d'où une application

$$\underset{X}{Q}^{(1,k)} \times \tilde{J}^k(T) \rightarrow V(Q^k)$$

que nous noterons encore  $(H, \xi) \rightarrow H\xi$ .

Prenons maintenant  $H_1 \in Q^{k+1}(a)$ , et posons  $H = \pi_k H_1 \in Q^k(a)$ ,  $b = \text{but } H$ ; nous allons calculer  $(\lambda^1 H_1)\xi$ , pour  $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$ ; pour cela prenons un germe  $f \in \underline{\text{Aut}}(X)_a$ , avec  $\tilde{j}^{k+1} f(a) = H_1$ ; par définition de  $\lambda^1$ , on a  $\tilde{j}^1 \tilde{j}^k f(a) = \lambda^1 H_1$ , d'où, par définition de  $(\lambda^1 H_1)\xi$ :  $(\lambda^1 H_1)\xi = (\tilde{j}^k f)\xi$ ; par suite, on a  $(\lambda^1 H_1)\xi H^{-1} = (\tilde{j}^k f)\xi (\tilde{j}^k f)^{-1} = (\tilde{j}^k f)(\xi)$ , l'action naturelle de  $\tilde{j}^k f$  sur  $\xi$ ; mais  $\tilde{j}^k f$  est la partie principale d'ordre  $k$  de l'application diagonale  $F$  définie par  $y' = f(x')$ ,  $y = f(x)$ ; comme  $F$  préserve la structure de produit de  $X^2$ , donc commute à  $\nu$ , on a aussi  $(\tilde{j}^k f)(\xi) = F(\xi) = \nu^{-1} F(\nu\xi) = \nu^{-1} (\tilde{j}^{k+1} f)(\nu\xi)$ , cette dernière égalité résultant du fait (déjà noté au §5) que l'action d'une transformation diagonale sur  $\tilde{J}^k(T)$  ne dépend que de sa partie principale d'ordre  $k+1$ ; or cette dernière action s'effectue fibre par fibre sur les deux facteurs, comme on le vérifie immédiatement. Finalement, on trouve la formule suivante :

$$(6.2) \quad (\lambda^1 H_1)\xi H^{-1} = \nu^{-1} H_1(\nu\xi) .$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition (6.3).

Soit  $F_1 \in \tilde{Q}_a^{k+1}$ , avec  $\pi_k F_1 = F$ , et soit  $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$ ; on a  
 $F^{-1}(\lambda^1 F_1)\xi = \xi - (\nu\xi) \wedge \bar{\mathcal{D}} F_1$ .

En effet, on a  $F^{-1}(\lambda^1 F_1)\xi = F^{-1}(\lambda^1 F_1)\xi F^{-1} F = F^{-1} \nu^{-1} F_1(\nu\xi) F$  par (6.2), et le dernier terme est encore égal à  $F^{-1}[\nu^{-1} F_1(\nu\xi)]$ ; la formule résulte alors immédiatement de (5.8).

Du fait que  $\nu^{-1} - i'(\bar{\mathcal{D}}F)$  et  $\nu + i'(\mathcal{D}F)$  sont inverses l'un de l'autre, on déduit de (6.3) qu'on a aussi

$$(6.4) \quad (\lambda^1 F_1)^{-1} F\xi = \xi + \nu(\xi \wedge \bar{\mathcal{D}} F_1) = \xi + \xi \wedge \mathcal{D}' F_1$$

où  $\mathcal{D}'$  est défini par (5.13).

A noter que, dans (6.3) et (6.4), on aurait pu aussi bien écrire dans le terme de gauche  $\tilde{j}^1 F$  au lieu de  $F$ ; à noter aussi que, pour  $a$  fixé,  $Q^{k+1}(a)$  est "l'espace des repères d'ordre  $k+1$  de source  $a$ " et que l'ap-

plication qui à  $\xi \in V(Q^{k+1})(F)$ ,  $F \in Q^{k+1}(a)$  fait correspondre  $\nu(\lambda^1 F)^{-1} \pi_k \xi$  définit sur  $Q^{k+1}(a)$  une forme à valeurs dans  $J^k(T)(a)$ , qui est précisément la forme fondamentale de Cartan sur  $Q^{k+1}(a)$ .

Les formules précédentes peuvent s'écrire un peu autrement. Soit  $J^1(Q^k)$  l'espace des jets d'ordre 1 de sections de  $Q^k$ ; on a une injection canonique  $Q^{(1,k)} \rightarrow J^1(Q^k)$  l'image étant formée des éléments inversibles de  $J^1(Q^k)$ ; soit  $J^1_0(Q^k)$  le sous-ensemble des  $F \in J^1(Q^k)$  qui se projettent dans  $Q^k$  sur  $I_k$ , et posons encore  $Q^{(1,k)}_0 = J^1_0(Q^k) \cap Q^{(1,k)}$ ; on sait (cf Goldschmidt [2]) que  $J^1(Q^k)$  est un fibré affine sur  $Q^k$ , de fibré vectoriel associé  $T^* \otimes V(Q^k)$ ; par un point  $F \in J^1_0(Q^k)$  passe une section canonique, à savoir  $j^1 I_k$ , d'où un isomorphisme

$$\delta : J^1_0(Q^k) \xrightarrow{\sim} T^* \otimes \tilde{J}^k(T).$$

Proposition (6.5).

Pour  $F \in Q^{(1,k)}(a)$  et  $\xi \in \tilde{J}^k(T)(a)$ , on a  $F\xi = \xi + \xi \wedge \delta F$ .

Prenons  $G$ , section de  $\tilde{Q}^k$  au voisinage de  $a$ , avec  $j^1 G(a) = F$ ; en coordonnées locales,  $G$  est défini par  $y' = g(x, x')$ ,  $y = g(x, x)$ , modulo  $(x'-x)^{k+1}$ ; on a  $G(a) = I_k(a)$ , donc  $g(a, x') = x'$  modulo  $(x'-a)^{k+1}$ ; à l'ordre 1 au voisinage de  $a$ , i.e. modulo  $(x-a)^2$ ,  $(x'-x)^{k+1}$ , on peut alors écrire  $g(x, x') = x' + \sum (x_i - a_i) h_i(a, x')$ , les  $a_i$  étant définis modulo  $(x'-a)^{k+1}$ ; on vérifie alors facilement, en développant  $g$  suivant les  $(x'-x)^\alpha$ , puis les coefficients  $g_\alpha(x)$  suivant les puissances de  $(x-a)$  que l'on a

$$(6.6) \quad (id_{\otimes V}) \delta G = \sum dx_i \otimes h_i(a, x') \frac{\partial}{\partial x'} = dx \otimes \frac{\partial g}{\partial x}(a, x') \frac{\partial}{\partial x'}.$$

Soit alors  $H_t$  une famille à un paramètre de sections de  $\tilde{Q}^k$ , avec  $H_0 = I_k$ ,  $\frac{d}{dt} H_t|_{t=0}(a) = \xi$ ; en coordonnées locales,  $H_t$  est défini par  $y' = h_t(x, x')$ ,  $y = h_t(x, x) = h_t^0(x)$ , avec  $h_0(x, x') = x'$ , et

$$\xi = \left( \frac{dh^0}{dt}(a), \frac{dh}{dt}(a, x') \right).$$

Alors  $G \circ H_t$  est défini par

$$y'_t = g(h_t^0(x), h_t(x, x')) \quad , \quad y_t = g(h_t^0(x), h_t^0(x))$$

et l'on a

$$\nu(G\xi) = \frac{dy'}{dt} \Big|_{t=0, x=a} = \frac{dh^0}{dt}(a) \frac{\partial g}{\partial x}(a, x') + \frac{dh^0}{dt}(a, x') \frac{\partial g}{\partial x'}(a, x')$$

comme  $\frac{\partial g}{\partial x'}(a, x') = \text{identité}$ , le second terme vaut  $\frac{dh^0}{dt}(a, x') = \nu\xi$  ; et, d'après les formules donnant  $\delta G$  et  $\xi$ , le premier vaut  $\nu(\xi \bar{\wedge} \delta G)$  ; d'où le résultat.

Corollaire (6.7).

Soit  $F_1 \in \tilde{Q}^{k+1}$ , et posons  $\pi_k F_1 = F$  ; on a

$$\delta[(j^1 F)^{-1}(\tilde{\lambda}^1 F_1)] = -(\nu^* \otimes \text{id}) \bar{\mathcal{D}} F_1 (= \mathcal{D}' F_1) .$$

Cela résulte immédiatement de (6.3) et de (6.5) : on déduit aussi de (6.4) et de (6.5) qu'on a, sous les mêmes hypothèses

$$(6.8) \quad \delta[(\lambda^1 F_1)^{-1} (j^1 F)^{-1}] = (\text{id} \otimes \nu^{-1}) \mathcal{D} F_1$$

(cf Quê [1], où cette dernière formule est prise comme définition de  $\mathcal{D} F_1$ ) .

A noter que ces formules peuvent facilement se vérifier en coordonnées locales en utilisant (5.3), (5.10) et l'expression de  $\delta$ , qu'on obtient en remplaçant dans (6.6)  $(a, x, x')$  par  $(x, x', x'')$ . A noter aussi qu'elles sont l'analogue "non linéaire" de la formule (4.5).

Proposition (6.9).

Soit  $F \in \tilde{Q}^{k+1}$ , avec  $\pi_k F \in \tilde{P}^k$  ; les propriétés suivantes sont équivalentes

- i)  $F \in (\tilde{P}^k)^{(1)}$  ;
- ii)  $\mathcal{D} F \in \mathcal{J}^* \otimes \tilde{R}^k$  ;
- iii)  $\bar{\mathcal{D}} F \in J^0(\mathcal{J})^* \otimes \tilde{R}^k$  .

En effet,  $J^1(P^k)$  est un sous-fibré affine de  $J^1(Q^k)$  (restreint à  $P^k$ ), de fibré vectoriel associé  $V(P^k)$  ; par suite, on a  $\delta J^1(P^k) = T^* \otimes \tilde{R}^k$ . Alors, la formule (6.7) montre que iii) équivaut à  $\tilde{\lambda}^1 F \in J^1(\tilde{P}^k)$ , donc a i). L'équivalence i)  $\Leftrightarrow$  ii) s'établit de même, en utilisant (6.8). On peut aussi démontrer directement l'équivalence ii)  $\Leftrightarrow$  iii) en utilisant le fait que  $\nu+i'(\mathcal{D} F)$  et

$v^{-1} \cdot i'(\overline{OF})$  sont inverses l'un de l'autre, et la remarque élémentaire suivante : soient  $E$  un espace vectoriel,  $F$  un sous-espace de  $E$ ,  $u$  une application linéaire  $E \rightarrow E$ , avec  $u(E) \subset F$ ,  $I+u$  inversible, alors, si l'on pose  $(I+u)^{-1} = I-\tilde{u}$ , on a encore  $\tilde{u}(E) \subset F$ .

De la proposition précédente résulte que le complexe (5.12) donne par restriction un complexe

$$(6.10) \quad (\text{Sol}) \quad j^{k+1} \rightarrow (\underline{P}^k)^{(1)} \xrightarrow{\bar{D}} J^0(\mathcal{J}) \otimes \underline{R}^k \xrightarrow{\bar{D}_1} \Lambda^2 J^0(\mathcal{J})^* \otimes j^{k-1}(\mathcal{J})$$

où (Sol) désigne le faisceau des  $f \in \underline{\text{Aut}}(X)$  vérifiant  $j^k f \in \underline{P}^k$  (c'est un germe au voisinage de  $I_k$ , dans la topologie fine  $C^k$ , de sous-groupe de  $\underline{\text{Aut}}(X)$ , que l'on désigne souvent sous le nom de "pseudogroupe de Lie"). Ce complexe est exacte en  $(\underline{P}^k)^{(1)}$ ; par ailleurs, si  $\underline{R}^k$  est contenu dans le prolongement d'ordre 1 d'une équation de Lie  $R^{k-1}$ , on peut remplacer le dernier terme par  $\Lambda^2 J^0(\mathcal{J})^* \otimes \underline{R}^{k-1}$ . De même, le complexe (5.5) donne par restriction un complexe analogue, que nous n'écrivons pas.

Remarque (6.11). Les considérations qui conduisent à (6.3) se "restreignent" à  $P^k$ ; en particulier, si  $F \in \underline{P}^k$ , on aura  $F(\underline{R}^k) = \underline{R}^k$ ; si  $F \in (\underline{P}^k)^{(1)}$ , on aura  $F(\underline{R}^k) = \underline{R}^k$  (cette dernière égalité ayant aussi un sens "fibre par fibre"); nous laissons les détails au lecteur.

Passons à l'étude du "complexe de  $\delta$ -cohomologie" de  $P^k$ ; soit  $\gamma^k$  le noyau de  $\pi_{k-1} : J^k(T) \rightarrow J^{k-1}(T)$ ; à noter qu'on a un isomorphisme  $\gamma^k \simeq S^k J^0(T)^* \otimes J^0(T)$  commutant aux automorphismes diagonaux de  $X^2$ . Soit d'autre part  $v(Q^k)$  le sous-espace des vecteurs de  $V(Q^k)$  dont la projection dans  $V(Q^{k-1})$  est nulle; soit  $F \in Q^k$ , de source  $a$  et de but  $b$ , avec  $k \geq 1$ ; la théorie formelle des équations différentielles (cf Goldschmidt [2]) donne un complexe

$$(6.12)_k \quad 0 \rightarrow v(Q^k)(F) \xrightarrow{\delta} T^*(a) \otimes v(Q^{k-1})(F) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Lambda^n T^*(a) \otimes v(Q^{k-n}) \rightarrow 0.$$

D'autre part, la théorie des équations linéaires (cf §1) donne un complexe

$$(6.13)_k \quad 0 \rightarrow \gamma^k(a) \xrightarrow{\delta} T^*(a) \otimes \gamma^{k-1}(a) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Lambda^n T^*(a) \otimes \gamma^{k-n} \rightarrow 0.$$

Le passage de l'un de ces complexes à l'autre peut s'effectuer ainsi : prenons  $f \in \underline{\text{Aut}}(X)_a$ , avec  $j^k f(a) = F$  ; alors l'application  $\xi \mapsto (j^k f)\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{\xi} = v^{-1}\xi$  envoie bijectivement  $J^k(T)(a)$  sur  $V(Q^k)(F)$  ; il est visible que la restriction de cette application à  $\gamma^k$  ne dépend que de  $F$  et même de  $\pi_1 F$  ; on opère de même pour  $\gamma^\ell$ ,  $\ell < k$  ; on obtient ainsi un diagramme  $(6.12)_k \rightarrow (6.13)_k$ .

Lemme (6.14).

Ce diagramme est commutatif.

Tout d'abord, pour  $F = I_k(a)$ , la démonstration se fait immédiatement, par exemple en coordonnées, et peut être laissée au lecteur. Pour passer de là au cas général, notons pour un instant  $E$  le fibré  $X^2 \rightarrow X$  défini par la projection  $(x,z) \rightarrow x$ , et considérons le germe d'automorphisme fibré  $(x,z) \rightarrow (x, f^{-1}(z))$  de  $E$  au voisinage de  $(a,b)$ ,  $b = \text{but } F$  ; il définit un germe d'automorphisme de  $J^\ell(E)$ , donc de  $V(J^\ell(E))$  ( $0 \leq \ell \leq k$ ) au-dessus de  $X$  ; en particulier on obtient un isomorphisme  $V(J^\ell(E))(F) \simeq V(J^\ell(E))I_\ell(a)$  ou encore, dans nos notations  $V(Q^\ell)(F) \simeq V(Q^\ell)(I_\ell(a)) \simeq \tilde{J}^\ell(T)(a)$ , dont on vérifie (par exemple en exprimant les vecteurs à partir de familles à un paramètre) qu'il coïncide avec l'inverse de l'application  $\tilde{\xi} \mapsto (j^k f)\tilde{\xi}$  considérée ci-dessus ; il suffit alors d'appliquer un lemme de Goldschmidt [2] qui assure que le complexe  $(6.12)_k$  commute aux automorphismes fibrés de  $E$ .

Remarquons que, pour  $1 \leq \ell \leq k$ , on a  $\gamma^\ell \subset J_0^\ell(T)$ , donc  $v^{-1}$  induit l'identité sur  $\gamma^\ell$  ; on peut alors définir l'application  $\gamma^\ell(a) \rightarrow v(Q^\ell)(F)$  par  $\xi \mapsto G\xi$ , avec  $G \in \tilde{Q}^k(a)$ ,  $G(a) = F$  (en effet,  $G\xi$  ne dépend que de  $G(a)$  si  $\xi \in J_0^k(T)(a)$ , puisqu'alors  $\xi$  est un vecteur de  $Q^k(a,a)$  en  $I_k(a)$ ). Par contre, cela serait faux pour  $\ell = 0$  (cf formules (6.2) et suivantes).

Posons maintenant  $g^k = \gamma^k \cap R^k$ ,  $v(P^k) = V(P^k) \cap v(Q^k)$ .

Lemme (6.15).

Soit  $F \in P^k$ , de source  $a$  ; l'isomorphisme précédent  $\gamma^k(a) \simeq v(Q^k)(F)$  donne par restriction un isomorphisme  $g^k(a) \simeq v(P^k)(F)$ .

On a  $k \geq 1$ , donc la remarque précédente s'applique ; soit alors  $G \in \tilde{P}_a^k$ , avec  $G(a) = F$  ; on a  $G\tilde{R}^k(a) = V(P^k)(F)$ , d'où par restriction  $Gg^k(a) = v(P^k)(F)$ , ce qui démontre le lemme.

Théorème (6.16).

Supposons  $g^k$  2-acyclique. Alors  $P^k$  est formellement intégrable.

En effet, il résulte des lemmes précédents que  $v(P^k)$  est 2-acyclique, et que  $v(P^k)^{(1)} = \text{Ker} \{T^*_{\otimes v(P^k)} \rightarrow \Lambda^2 T^*_{\otimes v(Q^{k-1})}\}$  est de rang constant puisqu'il est isomorphe à  $g^{k+1} \times P^k$ , avec  $g^{k+1} = \text{Ker} \{\pi_k : R^{k+1} \rightarrow R^k\}$ .

D'autre part, on a vu que  $(P^k)^{(1)} \rightarrow P^k$  est surjectif, donc  $(P^k)^{(1)}$  est un fibré affine sur  $P^k$ , de fibré vectoriel associé  $v(P^k)^{(1)}$ . Le théorème résulte alors de Goldschmidt [2].

Remarque (6.17).

Puisque  $R^k$  est supposé formellement intégrable, il existe un prolongement  $R^\ell$  ( $\ell \geq k$ ) qui soit 2-acyclique, ou même involutif (i.e. n-acyclique ; cf Quillen [1], Goldschmidt [1]). Quitte à restreindre  $P^k$  une fois de plus, on déduit alors de (6.1) et (6.15) que  $P^\ell$  est formellement intégrable, et  $P^\ell \rightarrow P^k$  surjectif. D'où l'existence de solutions formelles (et, dans le cas analytique, de solutions) de l'équation  $P^k$  dont le jet d'ordre  $k$  soit n'importe quel élément donné de  $P^k$ .

7. LE COMPLEXE DE SPENCER "SOPHISTIQUE".

Rappelons d'abord la version "sophistiquée" du complexe de Spencer (Spencer [1] ou [2] ; voir aussi Quillen [1] et Goldschmidt [1] pour le cas linéaire). Soit  $\bar{\delta}$  la restriction de  $-\bar{D}$  à  $\Lambda J^0(\mathcal{J})^* \otimes_{\mathcal{Y}}^k$  ( $k \geq 1$ ), et posons

$$B^{k,p} = \Lambda^{p,0} J^0(\mathcal{T})^* \otimes_{\mathcal{J}}^k(\mathcal{T}) / \bar{\delta}(\Lambda^{p-1,0} J^0(\mathcal{T})^* \otimes_{\mathcal{Y}}^{k+1}) ; \quad B^k = \bigoplus B^{k,p} .$$

A noter que (toujours pour  $k \geq 1$ ),  $\mathcal{B}^k$  (le faisceau des sections de  $B^k$ ) est un faisceau d'algèbres de Lie graduées pour le crochet quotient de celui défini au §3 sur  $\Lambda J^0(\mathcal{J})^* \otimes_{\mathcal{J}}^k(\mathcal{J})$  : cela résulte immédiatement de (3.12) et du fait que, pour  $k \geq 2$ ,  $\Lambda J^0(\mathcal{J})^* \otimes_{\mathcal{Y}}^k$  est un idéal de  $\Lambda J^0(\mathcal{J})^* \otimes_{\mathcal{J}}^k(\mathcal{J})$  (par



contre, pour  $k = 1$ , cette dernière propriété n'est plus vraie car  $\theta(\gamma^1)$  n'opère pas trivialement sur  $J^0(\mathcal{J})^*$ ; seul subsiste le fait que  $\underline{\gamma}^1$  est un idéal de  $\tilde{J}^1(\mathcal{J})$ . On a alors un complexe

$$(7.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{\tilde{J}^k} \mathfrak{B}^{k,0} \xrightarrow{\hat{D}} \mathfrak{B}^{k,1} \xrightarrow{\hat{D}} \dots \xrightarrow{\hat{D}} \mathfrak{B}^{k,n} \rightarrow 0$$

obtenu de la manière suivante; soit  $u \in \mathfrak{B}^{k,p}$ , on relève  $u$  en  $u' \in \Lambda^p J^0(\mathcal{J})^* \otimes \tilde{J}^{k+1}(\mathcal{J})$ , et on prend pour  $\hat{D}u$  la classe de  $\bar{D}u'$  dans  $\mathfrak{B}^{k,p+1}$  (il est immédiat qu'elle ne dépend que de  $u$ ); il est connu que ce complexe est acyclique; par passage au quotient, on voit que la formule (3.12) sera encore vraie ici, avec  $\bar{D}$  remplacé par  $\hat{D}$ , le crochet étant celui de  $\mathfrak{B}^k$ .

La version "non-linéaire" de (7.1) s'obtient ainsi: toujours pour  $k \geq 1$ , soit  $Q_k^{k+1}(a)$  l'ensemble des  $G \in Q^{k+1}(a)$ , avec  $\pi_k G = I_k(a)$ ; on sait que  $Q^{k+1}$  est un fibré affine sur  $Q^k$ , la fibre du fibré vectoriel associé étant  $v(Q^k)$ ; en  $I_k(a)$ , ce fibré a un élément canonique, i.e.  $I_{k+1}(a)$ , d'où un isomorphisme  $\delta: Q_k^{k+1}(a) \xrightarrow{\sim} \gamma^{k+1}(a)$ , qui s'interprète d'ailleurs aussi comme un isomorphisme du groupe  $Q_k^{k+1}(a)$  sur son algèbre de Lie. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif.

$$(7.2) \quad \begin{array}{ccc} Q_k^{k+1} & \xrightarrow{\lambda^1} & Q^{(1,k)} \\ \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\ \gamma^{k+1} & \xrightarrow{\delta} & T^*_{\otimes \gamma}{}^k \end{array} .$$

De là et de (6.7) on déduit ceci

$$(7.3) \quad \underline{\text{Si}} \ G \in Q_k^{k+1}, \ \underline{\text{on a}} \ \bar{D}G = -\bar{\delta}g, \ \underline{\text{avec}} \ g = \delta G .$$

Soit maintenant  $F \in \tilde{Q}^k$ ; relevons  $F$  en  $F_1 \in \tilde{Q}^{k+1}$ , et soit  $\hat{\mathcal{B}}F$  la classe de  $\bar{\mathcal{B}}F_1$  dans  $\mathfrak{B}^{k,1}$ ; cette classe ne dépend que de  $F$ : soit en effet  $F_2$  un autre relèvement de  $F$ ; on a  $F_2 = F_1 G$ ,  $G \in Q_k^{k+1}$ , d'où par (5.6) et (7.3)

$$\bar{\mathcal{B}}F_2 = \bar{\mathcal{B}}G + G^{-1}(\bar{\mathcal{B}}F_1) = -\bar{\delta}g + G^{-1}(\bar{\mathcal{B}}F_1)$$

et, comme  $G^{-1}$  opère trivialement sur  $J^0(\mathcal{J})^* \otimes J^k(\mathcal{J})$ , on trouve finalement  $\bar{\mathcal{D}}F_2 = -\bar{\delta}g + \bar{\mathcal{D}}F_1$ .

Pour  $u \in \mathfrak{B}^{k,1}$ , posons maintenant  $\hat{\mathcal{D}}_1 u = \hat{D}u - \frac{1}{2}[u, u]$ ; on obtient ainsi un complexe, exact en  $\tilde{Q}^k$ :

$$(7.4) \quad \text{Aut}(X) \xrightarrow{\tilde{j}^k} \tilde{Q}^k \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}} \mathfrak{B}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\mathcal{D}}_1} \mathfrak{B}^{k,2}$$

qui est la "version sophistiquée" de (5.12).

Notons que, si nous avions voulu partir de (5.5) au lieu de (5.12), nous aurions eu des difficultés; notamment, on aurait trouvé un quotient de  $T^* \otimes J^k(T)$  par un groupe affine, et non plus par un sous-espace vectoriel, et la version "sophistiquée" de  $\mathcal{D}_1$  serait alors peu maniable; ceci est notre raison majeure de travailler avec (4.12) plutôt que (4.5).

Comme  $\hat{\mathcal{D}}$  est un opérateur différentiel d'ordre 1, il définit un morphisme de fibrés  $p^1(\hat{\mathcal{D}}) : Q^{(1,k)} \rightarrow B^{k,1}$ , que la formule (6.7) permet facilement d'interpréter: soient  $F' \in Q^{(1,k)}$ ,  $F = \pi_o F' \in Q^k$  et  $F_1$  un relèvement de  $F$  à  $Q^{k+1}$ ; alors  $p_1(\hat{\mathcal{D}})F'$  est la classe dans  $B^{k,1}$  de  $-(v^{*-1} \otimes \text{id}) \delta(F'^{-1} \lambda^1 F_1)$ , classe indépendante de  $F_1$  comme on vient de le voir; on en déduit que la relation  $p_1(\hat{\mathcal{D}})F' = 0$  équivaut à  $F' \in \lambda^1 Q^{k+1}$ .

Soit  $\hat{B}^{k,1}$  l'ensemble des  $u \in B^{k,1}$  dont la projection  $\pi_o u$  dans  $J_o(T)^* \otimes T$  soit telle que l'application  $v^{-1} - i'(\pi_o u) : J_o(T) \rightarrow T$  soit inversible; l'image de  $Q^{(1,k)}$  - et même l'image de  $Q_o^{(1,k)}$  - dans  $B^{k,1}$  par  $p^1(\hat{\mathcal{D}})$  est égale à  $\hat{B}^{k,1}$  (parce que  $\delta Q_o^{(1,k)}$  est l'ensemble des  $u \in T^* \otimes J^k(T)$  tels que l'application  $\text{id} + i'(\pi_o u) : T \rightarrow T$  soit inversible; ce dernier fait résulte de (6.6)). En résumé:

Proposition (7.5).

Pour  $k \geq 1$ , la suite

$$I_{k+1} \rightarrow Q^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} Q^{(1,k)} \xrightarrow{p_1(\hat{\mathcal{D}})} \hat{B}^{k,1} \rightarrow 0$$

est exacte, au sens suivant:  $\lambda^1$  est injectif,  $p_1(\hat{\mathcal{D}})$  surjectif, et l'on a  $\text{Im}(\lambda^1) = \text{Ker } p^1(\hat{\mathcal{D}})$ . Dans le même sens, la suite

$$I_{k+1} \rightarrow Q_k^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} Q_o^{(1,k)} \xrightarrow{p_1(\hat{\theta})} \hat{B}^{k,1} \rightarrow 0$$

est exacte.

Proposition (7.6).

Pour  $k \geq 1$ , la suite  $\tilde{Q}^k \xrightarrow{\hat{\theta}} \hat{B}^{k,1} \xrightarrow{\hat{\theta}_1} B^{k,2}$  est exacte.

Considérons, pour tout  $k \geq 0$ , l'assertion suivante :

(7.7)<sub>k</sub> Soit  $u \in J^o(\mathcal{J})^* \otimes J^k(\mathcal{J})$ , avec  $v^{-1-i}(\pi_o u) : J^o(T) \rightarrow T$  inversible, et  
Du  $-\frac{1}{2}\pi_{k-1}[u, u] = 0$ ; alors il existe  $F \in \tilde{Q}^{k+1}$  tel qu'on ait  $\bar{\theta}F = u$ .

On a d'abord (7.7)<sub>k+1</sub>  $\Rightarrow$  (7.6)<sub>k</sub> puisque si  $u \in \hat{B}^{k,1}$  vérifie  $\hat{\theta}_1 u = 0$ , on pourra relever  $u$  en  $u' \in J^o(\mathcal{J})^* \otimes J^{k+1}(\mathcal{J})$  vérifiant  $\bar{\theta}_1 u' = 0$ .  
 Démontrons (7.7)<sub>k</sub> par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , cela résulte des faits suivants :

i) L'application  $\delta : Q_o^1 \rightarrow T^* \otimes T$  est un isomorphisme de  $Q_o^1$  sur le sous-ensemble des  $u \in T^* \otimes T \simeq \text{End}(T)$  tels que  $\text{id} + u$  soit inversible.

ii) Pour  $F \in Q_o^1$ , on a  $\bar{\theta}F = -(v^{*-1} \otimes \text{id})\delta F$ .

Si  $u$  vérifie l'hypothèse de (7.7)<sub>o</sub>, on pourra même choisir  $F \in Q_o^1$  tel qu'on ait  $\bar{\theta}F = u$ .

Supposons maintenant (7.7)<sub>k</sub> démontré, et démontrons (7.7)<sub>k+1</sub>; soit  $u$  comme dans l'énoncé, avec  $k$  remplacé par  $k+1$ , et soit  $u' = \pi_k u$ ; prenons  $F \in \tilde{Q}^{k+1}$ , avec  $\bar{\theta}F' = u'$ , et relevons  $F'$  en  $F_1 \in \tilde{Q}^{k+2}$ ; cherchons  $F = F_1 G$ ,  $G \in Q_{k+1}^{k+2}$ , tel qu'on ait  $\bar{\theta}F = u$ ; il revient au même de résoudre  $\bar{\theta}G = u - \bar{\theta}F_1$  (cf le calcul qui suit (7.3)), ou encore  $-\bar{\delta}g = u - \bar{\theta}F_1$ . Posons  $v = u - \bar{\theta}F_1$ ; on a  $\pi_k v = 0$ , donc  $v \in J^o(T)^* \otimes \underline{Y}^{k+1}$ ; de plus, on vérifie facilement qu'on a encore  $\bar{D}v - \frac{1}{2}\pi_k[v, v] = 0$ , ce qui s'écrit encore  $\bar{\delta}v = 0$  (puisque  $\pi_k[v, v] = 0$ ); le résultat est alors conséquence de l'exactitude de (1.3).

Remarque (7.8).

Le raisonnement précédent montre qu'on peut en fait remplacer  $\tilde{Q}^k$

dans (7.7) par  $\{F \in \tilde{Q}^k \mid \pi_0 F = I_0\} = \tilde{Q}_0^k$  ; d'autre part, l'application  $\tilde{Q}_0^k \xrightarrow{\hat{F}} \hat{B}^{k,1}$  est injective, puisque, pour  $F$  et  $G \in \tilde{Q}^k$ , l'égalité  $\overline{BF} = \overline{BG}$  (ou  $\hat{BF} = \hat{BG}$ ) équivaut à  $FG^{-1} \in \hat{j}^k \underline{\text{Aut}}(X)$  ; il en résulte que la suite des sections

$$\Gamma(X, \tilde{Q}_0^k) \xrightarrow{\hat{F}} \Gamma(X, \hat{B}^{k,1}) \xrightarrow{\hat{B}_1} \Gamma(X, \mathcal{B}^{k,2})$$

est exacte, et de même avec le premier terme remplacée par  $\Gamma(X, \tilde{Q}^k)$ .

Soit maintenant  $R^k$  une équation de Lie formellement intégrable (avec  $k \geq 1$ ) ; soit  $C^{k,p}$  l'image de  $J^0(T)^* \otimes R^k$  dans  $B^{k,p}$ , et posons  $\hat{C}^{k,1} = C^{k,1} \cap \hat{B}^{k,1}$  ; on a  $C^{k,1} = J^0(T)^* \otimes \tilde{R}^k / \delta g^{k+1}$  ; comme  $g^{k+1}$  est de rang constant,  $C^{k,1}$  est aussi de rang constant ; de la surjectivité de  $R^{k+1} \rightarrow R^k$ , on déduit alors que  $\hat{D} : \mathcal{B}^{k,0} \rightarrow \mathcal{B}^{k,1}$  envoie  $\tilde{R}^k$  dans  $C^{k,1}$  ; de même, la surjectivité de  $(P^k)^{(1)} \rightarrow P^k$  et (6.10) montrent que (7.4) donne par restriction un complexe

$$(7.9) \quad (\text{Sol}) \quad \tilde{J}^k \rightarrow \tilde{P}^k \xrightarrow{\hat{F}} \hat{B}^{k,1} \xrightarrow{\hat{B}_1} \mathcal{B}^{k,2}$$

et que ce complexe est exact en  $\tilde{P}^k$ . La proposition (7.5) donne alors par restriction le résultat suivant :

Proposition (7.10).

Les suites

$$I_{k+1} \rightarrow (P^k)^{(1)} \xrightarrow{\lambda^1} \tilde{J}^1(P^k) \xrightarrow{P_1(\hat{F})} \hat{C}^{k,1} \rightarrow 0$$

$$I_{k+1} \rightarrow (P^k)^{(1)} \cap Q_k^{k+1} \xrightarrow{\lambda^1} \tilde{J}_0^1(P^k) \xrightarrow{P_1(\hat{F})} \hat{C}^{k,1} \rightarrow 0$$

sont exactes (on pose  $\tilde{J}_0^1(P^k) = \tilde{J}^1(P^k) \cap Q_0^{(1,k)}$ )

(Pour l'analogie dans le cas linéaire, voir Goldschmidt [1]).

Remarque (7.11).

Supposons  $g^k$  2-acyclique ; on aura alors

$$C^{k,2} = \Lambda^2 J^0(T)^* \otimes \tilde{R}^k / \delta (J^0(T)^* \otimes g^{k+1})$$

et l'on vérifie facilement que  $C^{k,2}$  est de rang constant. De la surjectivité

$R^{k+1} \rightarrow R^k$ , on déduit alors qu'on a  $\hat{D}C^{k,1} \subset C^{k,2}$ , d'où  $\hat{D}_1 C^{k,1} \subset C^{k,2}$ , et le complexe (7.9) peut s'écrire

$$(7.12) \quad (\text{Sol}) \quad \begin{array}{c} \hat{J}^k \\ \rightarrow \\ \underline{P}^k \end{array} \xrightarrow{\hat{D}} \hat{C}^{k,1} \xrightarrow{\hat{D}_1} \hat{C}^{k,2} .$$

Pour terminer les généralités sur le "complexe de Spencer non-linéaire sophistiqué", notons ceci : soit  $F \in \tilde{Q}^k$ , avec  $k \geq 1$ ; alors l'action de  $F^{-1}$  sur  $\Lambda J^0(\mathcal{J})^* \otimes J^k(\mathcal{J})$  passe au quotient pour donner une action de  $F^{-1}$  sur  $\mathcal{B}^k$ ; pour s'en convaincre, il suffit de remarquer ceci : soit  $u \in \Lambda^{p-1} J^0(\mathcal{J})^* \otimes \underline{Y}^{k+1}$ , et soit  $F_1$  un relèvement de  $F$  à  $\tilde{Q}^{k+1}$ ; alors  $F_1^{-1}(u)$  ne dépend que de  $F$ ; et, en le notant  $F^{-1}(u)$ , on a  $\bar{\delta} F^{-1}(u) = F^{-1}(\bar{\delta}u)$  (cette dernière formule résulte de (3.10.iii) et de (5.6)). Pour  $F$  et  $G \in \tilde{Q}^k$ , on a alors

$$(7.13) \quad \hat{D}(FG) = \hat{D}G + G^{-1}(\hat{D}F)$$

qui résulte de la formule analogue pour  $\bar{D}$  (cette dernière résultant immédiatement de (5.6)).

Pour  $u \in \mathcal{B}^{k,1}$ , posons  $u^F = \hat{D}F + F^{-1}(u)$ ; on a

$$(7.14) \quad (u^F)^G = u^{FG}$$

formule qui, pour  $u = 0$ , se réduit à (7.13), et

$$(7.15) \quad \hat{D}_1 u^F = F^{-1}(\hat{D}_1 u) .$$

Enfin, si  $u \in \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$ , on a  $u^F \in \hat{\mathcal{B}}^{k,1}$ .

Ces résultats s'établissent comme les précédents, et nous laissons les détails au lecteur.

Notons enfin que, pour  $F \in \tilde{P}^k$ , de  $F^{-1}(\tilde{R}^k) = \tilde{R}^k$ , on déduit  $F^{-1}(C^{k,p}) = C^{k,p}$ , d'où une "restriction" des formules précédentes à  $\tilde{P}^k$ ,  $C^{k,p}$  et  $\hat{C}^{k,1}$ .