A. MARTINS RODRIGUES

Chapitre IV Tenseur de structure d'une g-structure d'ordre 1. Connexions affines

Cours de l'institut Fourier, tome 2 (1969), p. 71-87
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1969__2__71_0>

Chapitre IV

TENSEUR DE STRUCTURE D'UNE G-STRUCTURE D'ORDRE 1. CONNEXIONS AFFINES.

1. LES ALGEBRES DE LIE $(J^1T)^\circ_x$. CROCHET DE 2 ELEMENTS DE J^1_xT.

Soit M une variété différentiable, T le fibré vectoriel tangent à M, J^1T le fibré vectoriel des jets d'ordre 1 des champs de vecteurs de M, et $\rho : J^1T \to T$ le morphisme canonique du fibré J^1T sur fibré T (autrement dit, $\rho = \rho^1_o$, selon les notations du Chapitre II).

Soient θ_1 et θ_2 deux champs de vecteurs définis sur un ouvert $U \subset M$; nous supposons qu'il existe sur U des coordonnées $x^1, \ldots, x^n$; on peut donc trouver des fonctions (différentiables) f^i et g^i $(i = 1, \ldots, n)$ telles que :

$$\theta_1 = \sum f^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \theta_2 = \sum g^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad .$$

Alors :

$$[\theta_1, \theta_2] = \sum_j \sum_i \left(f^i \frac{\partial g^j}{\partial x^i} - g^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} \quad . \tag{IV,1}$$

Sur cette formule on voit que $\left([\theta_1, \theta_2]\right)_x$, valeur du champ de vecteurs $[\theta_1, \theta_2]$ en un point $x \in U$, ne dépend que de $X_1 = j^1_x\theta_1$ et $X_2 = j^1_x\theta_2$. Il en résulte une application bilinéaire alternée :

$$J^1_xT \times J^1_xT \to T_x \quad ,$$

que nous noterons au moyen de crochets $[X_1, X_2]_T$, ou tout simplement $[X_1, X_2]$, s'il n'y a pas risque de confusion ;

aux deux éléments $X_1 = j_x^1\theta_1$ et $X_2 = j_x^1\theta_2$ elle associe le vecteur tangent $[X_1, X_2] \in T_x$ défini par $[X_1,X_2] = ([\theta_1,\theta_2])_x$.

Soit $(J^1T)^o$ le noyau de ρ ; la fibre $(J^1T)_x^o$ est donc l'ensemble des jets d'ordre 1 en x des champs de vecteurs qui s'annulent en x. On remarque que si θ_1 s'annule en x, alors $([\theta_1, \theta_2])_x$ ne dépend que de $j_x^1\theta_1$ et de $(\theta_2)_x$. Il en résulte une application bilinéaire :

$$(J^1T)_x^o \times T_x \to T_x ,$$

qui à un élément $X = j_x^1\theta_1 \in (J^1T)_x^o$ et à un élément $\tau = (\theta_2)_x \in T_x$ associe un vecteur $\in T_x$ que noterons $X(\tau)$ et qui est défini par $X(\tau) = ([\theta_1, \theta_2])_x$.

A un élément $X \in (J^1T)_x^o$ se trouve maintenant associé un endomorphisme de T_x , dont la matrice dans la base $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$ a pour coefficients les nombres $-\frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x)$, selon la formule (IV,1). Il y a donc un isomorphisme canonique entre $(J^1T)_x^o$ et l'espace vectoriel des endomorphismes de T_x.

Nous avons vu au Chapitre III que l'ensemble des sections de J^1T au-dessus de U était muni d'une structure d'algèbre de Lie ; si σ_1 et σ_2 sont des sections de J^1T au-dessus de U, le crochet $[\sigma_1, \sigma_2]$ vérifie la relation suivante :

$$[\sigma_1(x), \sigma_2(x)] = \big(\rho[\sigma_1, \sigma_2]\big)_x \quad \text{pour tout} \quad x \in U .$$

Cette formule est une conséquence de la formule (III,7).
En outre, si $\sigma_1(x) \in (J^1T)_x^o$, et si θ est un champ de vecteurs sur U, alors :

$$\sigma_1(x)(\theta_x) = \big(\rho[\sigma_1, j^1\theta]\big)_x .$$

Revenons aux deux champs de vecteurs θ_1 et θ_2 , et supposons qu'ils s'annulent simultanément au point x. On vérifie tout de suite, à partir de la formule (IV,1), que $j^1_x[\theta_1, \theta_2]$ ne dépend que de $X_1 = j^1_x\theta_1$ et $X_2 = j^1_x\theta_2$. En posant $[X_1, X_2] = j^1_x[\theta_1, \theta_2]$, on définit une application bilinéaire

$$(J^1T)^\circ_x \times (J^1T)^\circ_x \to (J^1T)^\circ_x ,$$

qui confère à $(J^1T)^\circ_x$ une structure d'algèbre de Lie. Cette structure est la même que celle qui a été définie au Chapitre III (voir le dernier alinéa du § III.4). Nous rappelons qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite définis sur $R_x = R^1_x(M)$ et tangents à R_x .

Nous affirmons aussi qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(T_x)$ des endomorphismes de T_x , selon l'application canonique $(J^1T)^\circ_x \to \mathfrak{gl}(T_x)$ définie plus haut ; c'ést-à-dire, si X_1 et $X_2 \in (J^1T)^\circ_x$ et si $\tau \in T_x$, alors :

$$(X_1X_2 - X_2X_1)(\tau) = [X_1, X_2](\tau) .$$

En effet, soit θ_3 un champ de vecteurs tel que $\tau = (\theta_3)_x$; la relation précédente résulte de l'identité de Jacobi :

$$[\theta_1,[\theta_2,\theta_3]] - [\theta_2,[\theta_1,\theta_3]] = [[\theta_1,\theta_2],\theta_3] .$$

Nous pourrons donc identifier $(J^1T)^\circ_x$ avec l'algèbre de Lie des endomorphismes de T_x .

Supposons que sur M on a défini une G-structure H ; soit E le sous-fibré vectoriel de J^1T déduit de H (voir § III.5), et soit $E^\circ = E \cap (J^1T)^\circ$ le noyau de la restriction de ρ à E. On sait que chaque fibre E°_x est une sous-algèbre de Lie de $(J^1T)^\circ_x$, et qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite et tangents à H_x ; celle-ci est elle-même isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de

vecteurs invariants à droite sur le groupe structural G.
Il en résulte que l'algèbre de Lie $\overset{\circ}{E}_x$ est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ du groupe G ; mais cet isomorphisme n'est pas canonique.

2. DEFINITION D'UNE CONNEXION AFFINE.

Considérons la suite exacte de fibrés vectoriels :

$$0 \longrightarrow (J^1T)^\circ \xrightarrow{i} J^1T \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0 \tag{IV,2}$$

Définition IV.1.-

Une connexion affine sur M est un morphisme α $(T \to J^1T)$ de fibrés vectoriels, tel que $\rho\alpha$ soit l'application identique de T. Un tel morphisme α est nécessairement injectif ; il détermine une "scission" de la suite exacte (IV,2).

En effet, à α on peut associer un morphisme surjectif δ $(J^1T \to (J^1T)^\circ)$ tel que δi soit l'application identique de $(J^1T)^\circ$ et tel que la suite

$$0 \longrightarrow T \xrightarrow{\alpha} J^1T \xrightarrow{\delta} (J^1T)^\circ \longrightarrow 0$$

soit exacte ; δ est déterminé par la relation :

$$\delta(X) + \alpha\rho(X) = X \quad \text{pour tout} \quad X \in J^1T . \tag{IV,3}$$

Dans une telle situation, on voit que J^1T est égal à $(J^1T)^\circ \oplus \alpha(T)$ et l'on dit que la suite exacte (IV,2) se scinde.

Supposons que M est muni d'une G-structure H d'ordre 1, et soit E le sous-fibré vectoriel de J^1T déduit de H. Dans ce cas on considère aussi la suite exacte

$$0 \longrightarrow E^\circ \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\rho} T \longrightarrow 0 . \tag{IV,4}$$

Définition IV.2.-

On dit qu'une connexion affine α est adaptée à la G-structure H si $\alpha(T) \subset E$. Le morphisme α détermine donc une scission de la suite exacte (IV,4).

Connexion affine canonique d'un espace affine :

Soit A un espace affine (réel, de dimension finie) et soit V l'espace vectoriel des vecteurs libres de A. Pour tout $x \in A$ il existe une application linéaire bijective canonique η_x de l'espace $T_x A$ tangent en x sur l'espace vectoriel V ; à tout vecteur $\tau \in V$ on peut associer un champ de vecteurs constant θ_τ sur A, en posant $(\theta_\tau)_x = (\eta_x)^{-1}(\tau)$ pour tout $x \in A$.

Soit donc $v \in T_x A$ et $\tau = \eta_x(v)$; si nous posons $\alpha(v) = j_x^1 \theta_\tau$ nous définissons une connexion affine sur A, car il est clair $\rho\alpha(v) = v$. C'est ce qu'on appelle la connexion affine canonique de A.

Restrictions et prolongements de connexions affines :

Il est clair que toute connexion affine sur la variété M induit une connexion affine sur tout ouvert $U \subset M$; on l'appelle sa restriction à U. Réciproquement soit β $(T(U) \to J^1T(U))$ une connexion affine sur un ouvert $U \subset M$; on peut affirmer que, quel que soit l'ouvert V tel que $\bar{V} \subset U$, il existe une connexion affine α sur M tout entier telle que la restriction de α à V soit égale à la restriction de β à V. Ce résultat peut se démontrer au moyen d'une "partition de l'unité" sur la variété M. Si β est adaptée à une G-structure H, on peut en exiger autant de α.

3. DERIVEE COVARIANTE.

Soit α une connexion affine sur la variété M, et soit $\delta\ (J^1T \to (J^1T)^{\circ})$ le morphisme de fibrés vectoriels déterminé par la formule (IV,3). On remarque que la donnée de α (tel que $\rho\alpha = id_T$) est équivalente à la donnée de δ (tel que $\delta i = id_{(J^1T)^{\circ}}$) ; la formule (IV,3) détermine l'un quand on connaît l'autre.

A deux champs de vecteurs ξ et η définis sur M, ou sur un ouvert de M, nous associons un troisième champ de vecteurs $\nabla_{\xi}\,\eta$ appelé dérivée covariante de η par rapport à ξ ; il est défini par la formule :

$$(\nabla_{\xi}\ \eta)_x = -\ \delta(j^1_x\eta)(\xi_x)\ \ ;$$

dans cette formule $\delta(j^1_x\eta)$ est un élément de $(J^1T)^{\circ}_x$, et au §1, nous avons vu qu'il peut être identifié avec un endomorphisme de T_x.

Propriétés de la dérivée covariante :

Dans les formules suivantes, ξ et η sont des champs de vecteurs quelconques sur M, et f est une fonction différentiable quelconque sur M. Dans la suite nous appellerons $\mathfrak{F}(M)$ l'ensemble des fonctions différentiables définies sur M, et $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs définis s r M ; $\mathfrak{X}(M)$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ et un module sur l'anneau $\mathfrak{F}(M)$.

La dérivée covariante vérifie les identités :

(IV,5) $$\nabla_{\xi_1+\xi_2}\, \eta = \nabla_{\xi_1}\, \eta + \nabla_{\xi_2}\, \eta .$$

(IV,6) $$\nabla_{f\xi}\, \eta = f\, \nabla_{\xi}\, \eta .$$

(IV,7) $$\nabla_{\xi}\, \eta_1+\eta_2 = \nabla_{\xi}\, \eta_1 + \nabla_{\xi}\, \eta_2 .$$

(IV,8) $$\nabla_{\xi}\, f\eta = f\, \nabla_{\xi}\, \eta + (\xi f)\eta .$$

En outre la valeur de $\nabla_{\xi}\, \eta$ en un point $x \in M$ ne dépend que de ξ_x et $j^1_x\eta$.

Démonstration :

Seule la formule (IV,8) exige vraiment une démonstration. D'après la formule (IV,3) on peut écrire :

$$\begin{aligned}\delta\left(j^1_x f\eta - fj^1_x\eta\right) &= j^1_x f\eta - fj^1_x\eta - \alpha\rho\left(j^1_x f\eta - fj^1_x\eta\right)\\ &= j^1_x f\eta - fj^1_x\eta .\end{aligned}$$

D'après les définitions précédentes :

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{\xi}\, f\eta - f\, \nabla_{\xi}\, \eta\right)_x &= -\left(j^1_x f\eta - fj^1_x\eta\right)(\xi_x)\\ &= -\left([f\eta,\ \xi]\right)_x + \left(f[\eta,\ \xi]\right)_x\\ &= (\xi f)_x\ \eta_x .\end{aligned}$$

Réciproquement :

Supposons que nous ayons défini une application ∇ :

$$\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

vérifiant les propriétés (IV,5, 6, 7 et 8).

Il existe une connexion affine unique α telle que ∇ soit la dérivée covariante associée à α.

Démonstration :

On va montrer d'abord que $(\nabla_\xi \eta)_x$ ne dépend que des valeurs de ξ dans un voisinage de x ; pour cela il suffit de démontrer que si U est une carte locale qui contient x et $\xi|U = 0$, alors $(\nabla_\xi \eta)|U = 0$. Soit $y \in U$ un point quelconque et $V \subset U$ un voisinage de y tel que $\bar{V} \subset U$. Soit $f \in \mathfrak{F}(M)$ tel que $f|V = 0$ et $f|\complement U = 1$; alors $\xi = f\xi$. Donc $\nabla_\xi \eta = \nabla_{f\xi} \eta = f \nabla_\xi \eta$ et par conséquent $\nabla_\xi \eta|V = 0$. Comme y est un point quelconque de U il s'ensuit que $\nabla_\xi \eta|U = 0$.

Montrons alors que $(\nabla_\xi \eta)_x$ ne dépend que de ξ_x. En effet, supposons $\xi_x = 0$; soit U une carte locale qui contient x et $V \subset U$ un ouvert tel que $x \in V$ et $\bar{V} \subset U$.

Posons $\xi|U = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ où $(x^1, \ldots, x^n)$ sont les coordonnées locales sur U et soient $\varphi_i \in \mathfrak{F}(M)$, $\theta_i \in \mathfrak{X}(M)$ tels que $\varphi_i|V = f_i$, $\theta_i|V = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Par hypothèse, $\varphi_i(x) = f_i(x) = 0$.

Posons $\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \theta_i$, alors $\bar{\xi}|V = \xi|V$. D'autre part

$\nabla_{\bar{\xi}} \eta = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \nabla_{\theta_i} \eta$. Donc $(\nabla_\xi \eta)_x = (\nabla_{\bar{\xi}} \eta)_x = 0$.

De même, on démontre, à l'aide des formules (IV,7) et (IV,8) que $(\nabla_x \eta)_x$ considéré comme fonction de η ne dépend que de $j_x^1 \eta$.

On en déduit que ∇ détermine en tout point x une application bilinéaire :

$$T_x \times J_x^1 T \to T_x .$$

A tout élément $Y \in J^1_x T$ se trouve donc associé un endomorphisme de T_x et celui-ci peut être identifié avec un élément de $(J^1T)^\circ_x$ que nous noterons $-\delta(Y)$. Nous obtenons ainsi un morphisme $\delta : J^1T \to (J^1T)^\circ$; nous allons démontrer que δ^i est l'application identique de $(J^1T)^\circ$, et il en résultera que δ provient d'une connexion affine sur M. Il s'agit de démontrer que si $Y \in (J^1T)^\circ_x$, alors $\delta(Y) = Y$; cela équivaut à démontrer que si η s'annule au point x, alors $(\nabla_\xi \eta)_x = -(j^1_x\eta)(\xi_x) = ([\xi, \eta])_x$. Or si η s'annule en x, on peut écrire

$\eta|U = \left(\sum_{i=1}^{n} \psi^i \theta_i\right)|U$, où les ψ^i sont des fonctions qui s'annulent en x ; et des formules (IV,7 et 8) on déduit que :

$$(\nabla_\xi \eta)_x = \sum (\xi \psi^i)_x (\theta_i)_x = ([\xi, \eta])_x .$$

Utilisation de systèmes de coordonnées :

Soit U un ouvert de M sur lequel il existe des coordonnées $x^1, \ldots, x^n$; nous poserons $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ pour $i = 1,\ldots,n$. La restriction à U de la connexion affine de M est déterminée par les fonctions Γ^k_{ij} tels que :

$$\nabla_{\xi_i} \xi_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} X_k .$$

Si nous faisons un changement de coordonnées, les fonctions Γ'^k_{ij} associées aux nouvelles coordonnées $y^1, \ldots, y^n$, sont données par la formule :

$$\Gamma'^k_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^l} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \Gamma^t_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial y^i} \frac{\partial x^s}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^t} .$$

Si l'on considère un espace affine A, le choix d'un repère affine quelconque détermine de façon naturelle un système de coordonnées sur A. La connexion affine canonique de A (voir §2) est telle qu'avec ce système de coordonnées toutes les fonctions Γ^k_{ij} sont nulles.

4. TORSION D'UNE CONNEXION AFFINE.

Soit α une connexion affine sur la variété M. Appelons $T \times_M T$ le fibré vectoriel de base M dont la fibre au-dessus de tout point $x \in M$ est $T_x \times T_x$. La torsion de la connexion affine α est l'application C_α :

$$T \times_M T \to T$$

définie par : $C_\alpha(v_1,v_2) = [\alpha(v_1), \alpha(v_2)]$.

Nous rappelons que si v_1 et $v_2 \in T_x$, alors $\alpha(v_1)$ et $\alpha(v_2)$ sont des éléments de J^1_xT, et leur crochet est un élément de T_x, selon la définition du §1.

Cette application C_α est bilinéaire alternée, dans ce sens qu'en tout point $x \in M$, elle détermine une application bilinéaire alternée :

$$T_x \times T_x \to T_x \quad ;$$

C_α peut donc être identifiée avec un morphisme de fibrés vectoriels :

$$\Lambda^2 T \to T .$$

Supposons que ξ et η sont des champs de vecteurs définis sur M. On peut vérifier la formule suivante, qui établit une relation entre la torsion et la dérivée covariante :

$$C_\alpha(\eta_x, \xi_x) = \left(\nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi, \eta]\right)_x .$$

Il nous faut maintenant préciser des notations.
Si E est un fibré vectoriel sur M, nous désignerons par $\underline{E}$ l'ensemble des sections de E sur M tout entier ; c'est un module sur $\mathfrak{F}(M)$. Par ailleurs, si V et W sont deux espaces vectoriels (sur un même corps), il existe un isomorphisme canonique de $V^* \otimes W$ sur l'ensemble $\mathcal{L}(V, W)$ des applications linéaires de V dans W ; en effet à un élément $\varphi \otimes w \in V^* \otimes W$ on fait correspondre un élément de $\mathcal{L}(V, W)$ selon la formule :

$$\varphi \otimes w(v) = \varphi(v).w \quad \text{pour tout} \quad v \in V \quad ;$$

dans la suite, nous identifierons $\mathcal{L}(V, W)$ avec $V^* \otimes W$.

De même, si E et F sont deux fibrés vectoriels sur M, il existe un isomorphisme canonique de l'ensemble des sections de $E^* \otimes F$ au-dessus de M sur l'ensemble des morphismes de E dans F (qui induisent l'application identique sur M) ; et c'est un isomorphisme de $\mathfrak{F}(M)$-modules. Dans la suite nous identifierons l'ensemble des morphismes de E dans F avec $\underline{E^* \otimes F}$.

Les notations étant précisées, nous pourrons identifier la torsion C_α avec un élément de $\underline{\Lambda^2 T^* \otimes T}$, car nous avons vu que C_α peut être considéré comme un morphisme de $\Lambda^2 T$ dans T.

Supposons maintenant que sur M nous ayons défini deux connexions affines α_1 et α_2 ; nous allons comparer leurs torsions C_1 et C_2 . Posons $h = \alpha_2 - \alpha_1$; puisque $\rho\alpha_1 = \rho\alpha_2 = id_T$, on a $h(T) \subset (J^1 T)^\delta$. Etant donnés u et $v \in T_x$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} C_2(u,v) &= [(\alpha_1+h)(u), (\alpha_1+h)(v)] \\ &= C_1(u,v) + [h(u), \alpha_1(v)] - [h(v), \alpha_1(u)] . \end{aligned}$$

En effet $[h(u), h(v)]$, ou plus exactement $[h(u), h(v)]_x$, est le crochet à valeur dans T_x de deux éléments de J^1_xT qui se trouvent dans $(J^1T)^\circ_x$, et d'après la formule (IV,1), ce crochet est nul. En outre, puisque $h(u)$ et $h(v)$, éléments de $(J^1T)^\circ_x$, peuvent être identifiés avec des endomorphismes de T_x, on peut écrire :

$$C_2(u, v) - C_1(u, v) = h(u)(v) - h(v)(u) .$$

Si l'on identifie $(J^1T)^\circ_x$ avec $(T_x)^* \otimes T_x$, ensemble des endomorphismes de T_x, alors h peut être identifié avec un morphisme de T dans $T^* \otimes T$, c'est-à-dire avec un élément de $\underline{T^* \otimes T^* \otimes T}$.

Or, soit d le morphisme d'antisymétrisation de $T^* \otimes T^* \otimes T$ dans $\Lambda^2T^* \otimes T$; il provient de l'application qui à un tenseur $\varphi \otimes \psi \otimes w$ associe le tenseur $(\varphi\otimes\psi - \psi\otimes\varphi) \otimes w = \varphi\wedge\psi \otimes w$. Ce morphisme d associe à une section $h \in \underline{T^* \otimes T^* \otimes T}$ une section $dh \in \underline{\Lambda^2T^* \otimes T}$, qui au-dessus de tout point $x \in M$ détermine une application bilinéaire alternée $T_x \times T_x \to T_x$ selon la formule :

$$dh(u, v) = h(u)(v) - h(v)(u) .$$

Nous pouvons donc écrire :

$$C_2(u, v) - C_1(u, v) = dh(u, v) . \tag{IV,9}$$

5. TENSEUR DE STRUCTURE D'UNE G-STRUCTURE D'ORDRE 1.

Supposons que sur M on a défini une G-structure H, et soit E le fibré vectoriel déduit de H. Soient α_1 et α_2 deux connexions affines sur M ; posons $h = \alpha_2 - \alpha_1$ comme précédemment. Supposons que α_1 soit adaptée à la G-structure H, c'est-à-dire $\alpha(T) \subset E$; alors α_2 est adaptée à H si et seulement si $h(T) \subset E^\circ$. Or E° peut être identifié avec un sous-fibré vectoriel de $T^* \otimes T \cong (J^1T)^\circ$, et l'ensemble $\underline{T^* \otimes E^\circ}$ des morphismes de T dans E° peut être identifié avec un sous-$\mathfrak{F}$(M)-module de $\underline{T^* \otimes T^* \otimes T}$. D'après la formule (IV,9), α_2 est adaptée à la G-structure H si et seulement si

$$C_2 - C_1 \in \underline{d(T^* \otimes E^\circ)} \ .$$

Ceci nous amène à considérer le quotient de $\underline{\Lambda^2T^* \otimes T}$ par $\underline{d(T^* \otimes E^\circ)}$; ce quotient de $\mathfrak{F}$(M)-modules est isomorphe à $\underline{\Lambda^2T^* \otimes T \,/\, d(T^* \otimes E^\circ)}$, et nous appellerons q l'application canonique :

$$q \ : \ \underline{\Lambda^2T^* \otimes T} \rightarrow \underline{\Lambda^2T^* \otimes T \,/\, d(T^* \otimes E^\circ)} \ .$$

Si α_1 et α_2 sont adaptées à la G-structure H, nous poserons :

$$C_o = q(C_1) = q(C_2) \ .$$

Définition IV.3.-

On appelle tenseur de structure de la G-structure H, l'image $C_o = q(C_\alpha)$ dans $\underline{\Lambda^2T^* \otimes T \,/\, d(T^* \otimes E^\circ)}$ de la torsion d'une quelconque connexion affine α adaptée à H ([7]).

Nous avons démontré ci-dessus :

Proposition IV.1.-

Pour qu'une section C de $\Lambda^2T^* \otimes T$ soit la torsion d'une connexion affine adaptée à la G-structure H, il faut et il suffit que q(C) soit égal au tenseur de structure C_o de H.

Corollaire.-

Une G-structure admet une connexion affine à torsion nulle si et seulement si le tenseur de structure est nul.

Nous avons vu au §1 que chaque fibre E_x^o est une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{g}$, algèbre de Lie du groupe structural G. Si donc on veut étudier la restriction du morphisme d à $T^* \otimes E^o$, on est amené à étudier l'application

$$d \ : \ (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g} \to (\Lambda^2\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \ .$$

Cette application peut être décrite ainsi : à une application linéaire $A(\mathbb{R}^n \to \mathfrak{g})$ on associe une application bilinéaire alternée $dA(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ selon la formule :

$$dA(u, v) = A(u)(v) - A(v)(u) \ .$$

Proposition IV.2.- ([1])

Si l'application $d\big((\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g} \to (\Lambda^2\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n\big)$ est surjective, tout élément de $\underline{\Lambda^2T^* \otimes T}$ est la torsion d'une connexion affine adaptée à la G-structure H. Si elle est injective, deux connexions affines adaptées à H sont égales si et seulement si elles ont même torsion. Si elle est bijective, alors tout élément de $\Lambda^2T^* \otimes T$ est la torsion d'une et une seule connexion affine adaptée à H.

Démonstration :

Supposons $d : (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g} \to (\Lambda^2\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ surjective. Alors pour chaque point $x \in M$ il existe un voisinage U de x tel que $d : T^* \otimes E^o|U \to (\Lambda^2T^* \otimes T)|U$ est une application surjective. Soit $C : U \to \Lambda^2T^* \otimes T$ une section de $\Lambda^2T^* \otimes T$ au-dessus de U et α_1 une connexion affine adaptée à $H|U$ et définie sur U. Soit C_1 la torsion de α_1. Alors, par hypothèse $C - C_1 = dh$ où $h \in \underline{T^* \otimes E^o|U}$. Posons $\alpha = \alpha_1 + h$; il est clair que la torsion de α est C. On complète la démonstration de la première partie de l'énoncé à l'aide d'une partition de l'unité. Le reste de la proposition se démontre de la même façon.

Signalons enfin la proposition suivante :

Proposition IV.3.-

Si une G-structure H est intégrable (voir Chapitre I), son tenseur de structure est nul.

Démonstration :

Puisque la G-structure H est intégrable, quel que soit $x \in M$, on peut trouver des coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ définies sur un voisinage ouvert U de x, telles que les champs de vecteurs $\xi_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i=1,\ldots,n)$ induisent en tout point de U un repère d'ordre 1 appartenant à H. Il en résulte que les champs de vecteurs ξ_i sont des automorphismes infinitésimaux de H. On peut donc définir sur U une connexion affine α adaptée à H en posant $\alpha\big((\xi_i)_x\big) = j^1_x\, \xi_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. On en déduit que :

$$C\big((\xi_i)_x, (\xi_j)_x\big) = j^1_x[\xi_i, \xi_j] = 0 ,$$

et par suite la torsion de α est nulle.

Or si V est un voisinage ouvert de x tel que $\bar{V} \subset U$, il existe une connexion affine adaptée à H, définie sur M tout entier, et coïncidant avec α sur V ; sa torsion est nulle sur V. On en déduit que le tenseur de structure de H est nul, parce qu'il est nul au voisinage de tout point de M.

La proposition IV.3 donne une condition nécessaire pour que la G-structure H soit intégrable, mais cette condition n'est pas suffisante. En effet toutes les structures Riemanniennes ont un tenseur de structure nul (voir plus loin, proposition IV.4), mais en général elles ne sont pas intégrables.

6. APPLICATION AUX STRUCTURES PSEUDO-RIEMANNIENNES.

Soit $\langle u, v\rangle$ une forme bilinéaire symétrique, régulière (non dégénérée), sur $\mathbb{R}^n$, et soit G le sous-groupe de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ qui conserve cette forme bilinéaire. Le groupe G est l'ensemble des endomorphismes g de $\mathbb{R}^n$ tels que $\langle g(u), g(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ pour tous u et $v \in \mathbb{R}^n$; et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des endomorphismes γ tels que $\langle \gamma(u), v\rangle + \langle u, \gamma(v)\rangle = 0$ pour tous u et $v \in \mathbb{R}^n$.

Nous allons montrer que l'application $d\big((\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g} \to (\Lambda^2\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n\big)$ définie au §5, est bijective. En effet donnons-nous $A(\mathbb{R}^n \to \mathfrak{g})$ et supposons que $dA = 0$, c'est-à-dire $A(u)(v) = A(v)(u)$ pour tous u et $v \in \mathbb{R}^n$; nous allons en déduire que $A = 0$.

En effet $(u, v, w) \to \langle A(u)(v), w\rangle$ est une forme trilinéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui est symétrique par rapport aux deux premières variables :

$$\langle A(u)(v), w\rangle = \langle A(v)(u), w\rangle ,$$

et antisymétrique par rapport aux deux dernières :

$$\begin{aligned}\langle A(u)(v), w\rangle &= - \langle v, A(u)(w)\rangle \qquad \text{car } A(u) \in \mathfrak{g} \\ &= - \langle A(u)(w), v\rangle .\end{aligned}$$

Par un calcul facile on en déduit qu'elle est nulle : $\langle A(u)(v), w\rangle = 0$ pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^n$; et comme on s'est donné sur $\mathbb{R}^n$ une forme bilinéaire non dégénérée, il en résulte que $A = 0$.

L'application $d\big((\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g} \to \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n\big)$ est donc injective ; puisque $(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathfrak{g}$ et $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n$ ont même dimension, à savoir $\dfrac{n^2(n-1)}{2}$, elle est bijective.

Pour donner à une variété M une G-structure, le groupe structural étant le groupe G précédent, il suffit de définir un champ de tenseurs deux fois covariants, symétriques et réguliers, qui fait de chaque espace tangent à M un espace pseudo-euclidien isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni de la forme bilinéaire $\langle u, v\rangle$. Une telle structure sera dite pseudo-riemannienne. Nous pouvons énoncer :

<u>Proposition IV.4.-</u>

Si M est muni d'une structure pseudo-riemannienne, tout élément de $\underline{\Lambda^2 T^* \otimes T}$ est la torsion d'une et une seule connexion affine adaptée à cette structure. En particulier il existe une seule connexion affine à torsion nulle, adaptée à cette structure. Cette connexion est dite connexion canonique ou connexion de Levi-Cività de la structure pseudo-riemannienne.

-:-:-:-:-