A. MARTINS RODRIGUES

Chapitre III Pseudo-groupes de Lie transitifs et g-structures d'ordre s

Cours de l'institut Fourier, tome 2 (1969), p. 38-70
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1969__2__38_0>

Chapitre III

PSEUDO-GROUPES DE LIE TRANSITIFS ET G-STRUCTURES D'ORDRE s.

1. REPERES D'ORDRE s.

Soit M une variété différentiable de dimension n (nous rappelons que tous les objets dont il est question ici sont différentiables et de classe C^∞). Soit s un entier ≥ 0 et soit $x \in M$. Un repère d'ordre s au point x est un jet inversible d'ordre s dont la source est l'origine de $\mathbb{R}^n$ et dont le but est x ; c'est donc le jet d'une application différentiable f définie au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$, de rang égal à n, et prenant ses valeurs dans M, de telle sorte que $f(0) = x$.

Si $s = 1$, le jet $j_0^1 f$ est déterminé par l'application différentielle $(df)_0$; or $(df)_0$ est déterminée par les transformés des n vecteurs de la base naturelle de $\mathbb{R}^n$: ce sont n vecteurs linéairement indépendants de T_xM, espace tangent à M au point x ; un repère d'ordre 1 au point x peut donc être iden tifié avec une base de l'espace tangent T_xM, et nous retrouvons dans ce cas la notion habituelle de repère.

Soit $R^s(M)$, ou tout simplement R^s, l'ensemble des repères d'ordre s de M, et soit π^s la projection canonique de R^s sur M, qui à un repère d'ordre s au point x associe $x \in M$. Il y a sur R^s une structure naturelle de variété différentiable car l'ensemble des jets d'ordre s de source $0 \in \mathbb{R}^n$ et de but appartenant à M est une sous-variété fermée de $J^s(\mathbb{R}^n,M)$, et R^s ést un ouvert de cette sous-variété.

A chaque carte locale (U, φ) de M correspond une section $\sigma : U \to R^s$ de la projection π^s ; si $x \in U$, $\sigma(x)$ est défini de la façon suivante : soit τ_x la translation sur $\mathbb{R}^n$ qui amène 0 au point $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(x)$ est tout simplement $j_0^s(\varphi^{-1} \circ \tau_x)$.

A cette carte locale de M, nous associerons une carte locale de R^s, suivant ce qui a été exposé au Chapitre II ; si $x^1, \dots, x^n$ sont les coordonnées sur U, et $t^1, \dots, t^n$ les coordonnées naturelles de $\mathbb{R}^n$, les coordonnées sur $(\pi^s)^{-1}(U)$ seront les fonctions x^i et $p^i_{j_1,\dots,j_n}$, ces dernières étant définies par :

$$p^i_{j_1,\dots,j_n}(X) = \left(\frac{\partial^{j_1+\dots+j_n} f^i}{(\partial t^1)^{j_1}\dots(\partial t^n)^{j_n}}\right)_0$$

où $f = (f^1, \dots, f^n)$ est une fonction telle que $j_0^s f = X$, et $1 \leq j_1+\dots+j_n \leq s$.

La section $\sigma(x)$ définie ci-dessus est telle que :

$$p^i_{j_1,\dots,j_n}(\sigma(x)) = 1 \qquad \text{si} \begin{cases} j_k = 0 & \text{pour} \quad k \neq i , \\ j_i = 1 & \end{cases}$$

$$= 0 \qquad \text{dans les autres cas.}$$

Soit en outre, lorsque $s \geq 1$, $GL^s(n,\mathbb{R})$ le groupe des jets inversibles d'ordre s ayant source et but à l'origine de $\mathbb{R}^n$; $GL^s(n,\mathbb{R})$ est un groupe de Lie, car c'est un ouvert de la variété différentiable des jets d'ordre s ayant source et but à l'origine de $\mathbb{R}^n$, et si on considère sur cette variété le système de coordonnées naturelles $p^i_{j_1,\dots,j_n}$, la multiplication dans $GL^s(n,\mathbb{R})$ s'exprime au moyen de polynômes, et l'application $g \to g^{-1}$ s'exprime au moyen de fractions rationnelles.

Le groupe $GL^s(n,\mathbb{R})$ opère à droite dans R^s ; cette opération n'est autre que la composition des jets définie au Chapitre II : si $X \in R^s$ et $g \in GL^s(n,\mathbb{R})$, le jet composé Xg est par définition de produit de X par g : $R_g(X) = Xg$. Si l'on utilise sur R^s et $GL^s(n,\mathbb{R})$ les coordonnées signalées plus haut, les formules qui expriment cette opération, ne font intervenir que des polynômes. Enfin quel que soit $x \in M$, $GL^s(n,\mathbb{R})$ opère de façon simplement transitive dans la fibre $(\pi^s)^{-1}(x)$. Nous avons donc défini sur $R^s(M)$ une structure de fibré principal de base M et de groupe structural $GL^s(n,\mathbb{R})$.

Nous désignerons par $\pi^s_{s'}$ l'application canonique de $R^s(M)$ sur $R^{s'}(M)$ lorsque $s \geq s'$; $\pi^s_{s'}$ est un morphisme de fibrés principaux par rapport à l'homomorphisme canonique de $GL^s(n,\mathbb{R})$ sur $GL^{s'}(n,\mathbb{R})$. Notons que $R^o(M)$ s'identifie à M et π^s_o à π^s .

2. DIFFEOMORPHISMES LOCAUX DE M.

Un difféomorphisme local de M est un difféomorphisme f d'un ouvert de M, qui sera noté $U(f)$, sur un second ouvert de M, qui sera noté $V(f)$. Si f et g sont deux difféomorphismes locaux, leur produit fg est défini si et seulement si $V(g) \cap U(f) \neq \emptyset$; s'il en est ainsi, le domaine de définition de fg est $U(fg) = U(g) \cap g^{-1}(U(f))$, et l'ensemble des valeurs de fg est $V(fg) = V(f) \cap f(V(g))$.

Une famille différentiable à un paramètre de difféomorphismes locaux de M est une application $t \to f_t$ qui à tout nombre t d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 associe un difféomorphisme local f_t de M de telle sorte que :

1) l'ensemble Ω des couples (t,x) tels que $t \in I$ et $x \in U(f_t)$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times M$, et l'application $(t,x) \in \Omega \to f_t(x) \in M$ est différentiable (de classe C^∞).

2) f_o est l'application identique de $U(f_o)$.

Nous supposerons en outre que :

3) tous les domaines de définitions $U(f_t)$ contiennent un ouvert W donné ; ou au moins, pour tout $x \in W$, $(0,x) \in \Omega$.

Dans ces conditions, par tout point $x \in W$, il passe un arc de courbe $t \to f_t(x)$; si nous appelons $\theta(x)$ le vecteur tangent en x lorsque $t = 0$, nous définissons un champ de vecteurs (différentiable) θ sur W ; il sera appelé le champ de vecteurs déduit de la famille à un paramètre f_t , et sera noté $\theta = \frac{d}{dt} f_t$.

Il est clair que tout champ de vecteurs θ défini sur un ouvert W peut être déduit d'une famille à un paramètre de difféomorphismes locaux.

Un groupe local à un paramètre de transformations d'un ouvert $W \subset M$ est une famille à un paramètre f_t vérifiant les conditions 1-2-3 précédentes ainsi que la suivante :

4) Si t_1, t_2 et $t_1 + t_2 \in I$, alors $f_{t_1} f_{t_2}$ est défini et est égal à $f_{t_1+t_2}$.

Le champ de vecteurs déduit θ s'appelle alors la transformation infinitésimale de ce groupe local à un paramètre.

On peut démontrer qu'un champ de vecteur θ sur un ouvert W est la transformation infinitésimale d'un groupe local f_t à un paramètre ; ce groupe local f_t engendré par θ est unique, dans ce sens que si le groupe local g_t admet aussi θ comme transformation infinitésimale, alors $f_t(x)$ et $g_t(x)$ sont égaux chaque fois qu'ils sont simultanément définis.

3. PROLONGEMENTS.

Soit f un difféomorphisme local de M :

$$U(f) \to V(f) \ .$$

Le prolongement $p^s f$ de f à $R^s(M)$ est le difféomorphisme de $(\pi^s)^{-1}(U(f))$ sur $(\pi^s)^{-1}(V(f))$ défini par

$$p^s f(z) = j^s_{\beta(z)} f \circ z \ .$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "z \,\in\, R^s(M)"] \arrow[rr, bend right, "p^s f(z)"'] & U(f) \arrow[r, "j^s_{\beta(z)} f"] & V(f) \end{tikzcd}$$

Ces prolongements $p^s f$ ont les propriétés immédiates suivantes

1) Quels que soient $z \in (\pi^s)^{-1}(U(f))$ et $g \in GL^s(n, \mathbb{R})$,

$$\pi^s(p^s f(z)) = f(\pi^s(z)) \ ,$$

$$p^s f(z.g) = (p^s f(z)).g \ .$$

2) Si le composé $f_1 \circ f_2$ des deux difféomorphismes locaux f_1 et f_2 est défini, alors $p^s f_1 \circ p^s f_2$ est aussi défini et

$$p^s(f_1 \circ f_2) = p^s f_1 \circ p^s f_2 \ .$$

3) Quel que soit $z \in \pi^{-1}(U(f))$ et si $s \geq s'$,

$$\pi^s_{s'}(p^s f(z)) = p^{s'} f(\pi^s_{s'}(z)) \ .$$

Soit maintenant f_t une famille différentiable à un paramètre de difféomorphismes locaux de M, définie pour $t \in I$ (où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant 0), telle que f_o est l'application identique de M et que $U(f_t)$ contient toujours un ouvert $W \subset M$; et soit $\theta = \frac{d}{dt} f_t$ le champ de vecteurs sur W déduit de cette famille f_t.

Soit $p^s f_t$ le prolongement de cette famille de difféomorphismes locaux à $R^s(M)$; nous noterons $p^s\theta$ le champ de vecteurs sur $R^s(M)$ déduit de cette famille $p^s f_t$, et nous allons montrer que, quel que soit $z \in (\pi^s)^{-1}(W)$, $(p^s\theta)_z$ ne dépend que de $j^s_{\pi^s(z)}\theta$ (en particulier $(p^s\theta)_z$ ne dépend pas du choix de la famille f_t).

En effet, vu les propriétés de $p^s f_t$, nous pouvons affirmer que pour tout $g \in GL^s(n,\mathbb{R})$, si R_g représente la multiplication à droite par g dans R^s, on a :

$$(p^s\theta)_{z.g} = dR_g(p^s\theta_z) \; . \qquad \text{(III,1)}$$

Supposons que sur W nous pouvons disposer de coordonnées $x^1, \ldots, x^n$, et soit σ la section de R^s au-dessus de W associé à ces coordonnées. Nous pouvons nous contenter de montrer que, quel que soit $x \in W$, $(p^s\theta)_{\sigma(x)}$ ne dépend que de $j^s_x\theta$, à cause de la formule (III,1). Or le calcul de $(p^s\theta)_{\sigma(x)}$ donne comme résultat :

$$(p^s\theta)_{\sigma(x)} = \sum_{i=1}^{n} \theta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}\,\theta^i(x)}{(\partial x^1)^{j_1}\cdots(\partial x^n)^{j_n}} \frac{\partial}{\partial p^i_{j_1\cdots j_n}} \qquad \text{(III,2)}$$

Soit maintenant θ un champ de vecteurs défini sur un ouvert $V \subset M$. Pour tout $x \in V$, il existe un voisinage W de x tel que la restriction de θ à W puisse être déduite d'une famille différentiable f_t. On peut alors définir un champ de vecteurs sur $(\pi^s)^{-1}(W)$ par la condition qu'il se déduit de la famille différentiable $p^s f_t$. D'où finalement un champ de vecteurs $p^s\theta$ défini sur tout $(\pi^s)^{-1}(V)$, et qu'on appelle le prolongement de θ aux repères d'ordre s.

Les propriétés suivantes se déduisent sans difficulté des définitions et des propriétés précédentes :

Proposition III.1.-

1) Quel que soit $g \in GL^s(n,\mathbb{R})$,

$$dR_g(p^s\theta) = p^s\theta \; .$$
$$d\pi^s(p^s\theta) = \theta \; .$$

2) Si $s' \leq s$, $p^s\theta$ est projetable sur $(\pi^{s'})^{-1}(W)$ et $d\pi^s_{s'}(p^s\theta) = p^{s'}\theta$.

3) L'application $\theta \to p^s\theta$ est un homomorphisme injectif de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs définis sur W dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs définis sur $(\pi^s)^{-1}(W)$.

4) Enfin si θ_1 et θ_2 sont deux champs de vecteurs définis au voisinage de $x \in M$, et si $j^s_x\theta_1 = j^s_x\theta_2$, alors quel que soit $z \in (\pi^s)^{-1}(x)$,

$$(p^s\theta_1)_z = (p^s\theta_2)_z \; .$$

De ces 4 assertions, seule la troisième nécessite vraiment une démonstration ; que l'application $\theta \to p^s\theta$ soit linéaire et injective, cela résulte de la formule (III,2) ; il nous reste donc seulement à démontrer que :

$$p^s[\theta_1,\theta_2] = \left[p^s\theta_1,\ p^s\theta_2\right]$$

quels que soient θ_1 et θ_2 .

Or soient φ_t et ψ_t des familles à un paramètre de difféomorphismes locaux tels que $\theta_1 = \frac{d}{dt}\varphi_t$ et $\theta_2 = \frac{d}{dt}\psi_t$. On sait que $[\theta_1,\theta_2]$ est le champ de vecteurs déduit de la famille à un paramètre χ_t :

$$\chi_t = \varphi_{\sqrt{|t|}}\ \psi_{\sqrt{|t|}}\ \varphi^{-1}_{\sqrt{|t|}}\ \psi^{-1}_{\sqrt{|t|}} \; .$$

De même, $\left[p\theta_1,\ p\theta_2\right]$ est le champ de vecteur déduit de la famille $p\varphi_{\sqrt{|t|}}\ p\psi_{\sqrt{|t|}}\ p\varphi^{-1}_{\sqrt{|t|}}\ p\psi^{-1}_{\sqrt{|t|}} = p\chi_t$.

Puisque, par définition, $p[\theta_1,\theta_2]$ est le champ de vecteurs déduit de la famille $p\chi_t$, nous concluons qu'il est égal à $[p\theta_1, p\theta_2]$.

4. LE FIBRÉ VECTORIEL J^sT.

Soit TM ou tout simplement T le fibré vectoriel tangent à M et soit J^sT le fibré vectoriel des jets d'ordre s des sections de T ; la fibre de J^sT au-dessus d'un point $x \in M$ sera notée J^s_xT. Le fibré tangent à R^s sera noté TR^s, et l'espace tangent à R^s en un point z sera noté T_zR^s.

Soient X un élément de J^s_xT, et θ un champ de vecteurs sur M (ou section de T) défini au voisinage de x, tel que $j^s_x\theta = X$; soit en outre $z \in (\pi^s)^{-1}(x)$. Puisque le vecteur $(p^s\theta)_z$ dépend uniquement de $j^s_x\theta$, il existe une application linéaire λ^s_z :

$$\lambda^s_z : J^s_xT \to T_zR^s$$

définie par $\lambda^s_z(X) = (p^s\theta)_z$.

De la formule (III,2) il résulte que cette application est injective ; puisque J^s_xT et T_zR^s ont même dimension, λ^s_z est un isomorphisme d'espace vectoriel. De la formule (III,1) il résulte que :

$$\lambda^s_{zg} = dR_g \circ \lambda^s_z , \tag{III,3}$$

quel que soit $g \in GL^s(n,\mathbb{R})$.

Si $s \geq s'$, soit $\rho^s_{s'}$ la projection canonique de J^sT sur $J^{s'}T$, qui à un jet d'ordre s associe le jet induit d'ordre s' : pour $s' = 0$, on identifiera J^oT avec T et on notera ρ^s_0 simplement par ρ^s. De la deuxième propriété des prolongements de champs de vecteurs, résulte la commutativité du diagramme :

$$\text{(III,4)} \qquad \begin{array}{ccc} J^s_x T & \xrightarrow{\lambda^s_z} & T_z R^s \\ \Big\downarrow \rho^s_{s'} & & \Big\downarrow d\pi^s_{s'} \\ J^{s'}_x T & \xrightarrow{\lambda^{s'}_{z'}} & T_{z'} R^{s'} \end{array}$$

où $z' = \pi^s_{s'}(z)$.

Soit $\sigma : W \to J^sT$ une section de J^sT au-dessus d'un ouvert $W \subset M$. A σ on peut associer un champ de vecteurs $\lambda^s\sigma$ sur $(\pi^s)^{-1}(W)$ défini par

$$(\lambda^s\sigma)_z = \lambda^s_z(\pi^s(\sigma)) \ .$$

Ce champ de vecteurs $\lambda^s\sigma$ est invariant à droite lorsque $GL^s(n,\mathbb{R})$ opère dans R^s. En outre l'application $\sigma \to \lambda^s\sigma$ est une bijection de l'ensemble des sections de J^sT au-dessus de W sur l'ensemble des champs de vecteurs sur $(\pi^s)^{-1}(W)$ invariants à droite.

Pour $s \geq s'$ on a la relation :

$$\lambda^{s'}\left(\rho^s_{s'}(\sigma)\right) = d\pi^s_{s'}(\lambda^s\sigma) \ ,$$

et en particulier, pour $s' = 0$, on a :

$$d\pi^s(\lambda^s\sigma) = \rho^s\sigma \ .$$

En outre si θ est un champ de vecteurs sur W et si on note par $j^s\theta$ la section de J^sT définie par $x \to j^s_x\theta$, alors

$$\lambda^s j^s\theta = p^s\theta \ .$$

Il résulte de la formule (III,3), et du fait que λ^s_z est un isomorphisme d'espaces vectoriels pour tout $z \in R^s$, que J^sT est canoniquement isomorphe au fibré vectoriel déduit du fibré principal R^s suivant la définition du §II.13.
C'est pourquoi nous identifierons désormais le fibré vectoriel déduit de R^s avec J^sT.

Conformément à ce qui a été exposé au Chapitre II on peut mettre sur l'ensemble des sections de J^sT au-dessus de W, une structure d'algèbre de Lie, isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite sur $(\pi^s)^{-1}(W)$; si σ_1 et σ_2 sont deux sections de J^sT au-dessus de W, on pose $[\sigma_1,\sigma_2] = (\lambda^s)^{-1}\left[\lambda^s\sigma_1,\ \lambda^s\sigma_2\right]$. Cette opération de crochet vérifie les trois propriétés suivantes, faciles à démontrer (dans la première formule, f représente une fonction différentiable réelle définie sur W) :

(III,5) $$[\sigma_1,\ f\sigma_2] = f[\sigma_1,\sigma_2] + \left((\rho^s\sigma_1)f\right)\sigma_2 .$$

(III,6) $$\left[j^s\theta_1,\ j^s\theta_2\right] = j^s[\theta_1,\theta_2] .$$

(III,7) $$\rho^s_{s'}[\sigma_1,\sigma_2] = \left[\rho^s_{s'}\sigma_1,\ \rho^s_{s'}\sigma_2\right] .$$

On peut démontrer qu'il existe un seul crochet sur l'espace vectoriel des sections de J^sT qui en fait une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions (III,5, 6 et 7) (cf. Bibliographie [5]).

Soit $(J^sT)^\circ$ le noyau de $\rho^s : J^sT \to T$; $(J^sT)^\circ$ est un sous-fibré vectoriel de J^sT ; chaque fibre $(J^sT)^\circ_x$ est l'ensemble des jets d'ordre s au point x des champs de vecteurs qui s'annulent en x. En outre chaque fibre $(J^sT)^\circ_x$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite définis sur R^s_x et tangents à R^s_x ; en effet si $X \in (J^sT)^\circ_x$, λ^sX est un champ de vecteurs tangent à R^s_x. Signalons encore que si σ_1 et σ_2 sont deux sections de J^sT au-dessus d'un voisinage de x, et si $\sigma_1(x)$ et $\sigma_2(x) \in (J^sT)^\circ_x$, alors :

(III,8) $$\left([\sigma_1,\sigma_2]\right)(x) = \left[\sigma_1(x),\ \sigma_2(x)\right] ;$$

dans cette formule, le second membre représente le crochet de 2 éléments de $(J^sT)^\circ_x$.

Enfin, étant donnés deux champs de vecteurs θ_1 et θ_2 définis dans un voisinage de x et nuls au point x, $j^s_x[\theta_1,\theta_2]$ ne dépend que de $X_1 = j^s_x\theta_1$ et $X_2 = j^s_x\theta_2$ (ce résultat peut aussi s'obtenir par un calcul direct), et l'on a $j^s_x[\theta_1,\theta_2] = [X_1,X_2]$. Cela résulte des formules (III,6 et 8) :

$$j^s_x[\theta_1,\theta_2] = \left[j^s\theta_1,\ j^s\theta_2\right](x) = [X_1,X_2] .$$

5. LES G-STRUCTURES D'ORDRE s.

Soit G un sous-groupe de Lie de $GL^s(n,\mathbb{R})$. Une G-structur d'ordre s sur M est un sous-fibré principal de R^s de groupe structural G.

Soit H une G-structure d'ordre s sur M ; on notera encor par π^s la restriction de π^s à H. Pour tout $s' \leq s$, posons $G' = \rho^s_{s'}(G)$; G' est un sous-groupe de Lie de $GL^{s'}(n,\mathbb{R}$ la G-structure H d'ordre s induit une G'-structure d'ordre s', car sur $H' = \rho^s_{s'}(H)$ on peut mettre une structure de fibré principal ayant G' pour groupe structural. En effet soient σ_α, σ_β, ... des sections différentiables de H sur des ouverts U_α, U_β, ... qui forment un recouvrement de M ; alors $\sigma'_\alpha = \rho^s_{s'} \circ \sigma_\alpha$, etc ... sont des sections de $R^{s'}$ à valeurs dans H' ; puisque σ_α et σ_β sont liées par une fonction de transition $g_{\alpha\beta}$ qui prend ses valeurs dans G (c'est-à-dire $\sigma_\beta = \sigma_\alpha g_{\alpha\beta}$ en tout point de $U_\alpha \cap U_\beta$), σ'_α et σ'_β sont liées par la fonction de transition $g'_{\alpha\beta} = \rho^s_{s'} g_{\alpha\beta}$, qui prend ses valeurs dans G' ; ces sections σ'_α, σ'_β, ... déterminent dnnc une G'-structure, à savoir H'.

Soit H une G-structure d'ordre s sur M, et soit E le fibré vectoriel déduit du fibré principal H selon les conceptions du Chapitre II ; E sera identifié avec un sous-fibré vectoriel de J^sT, qui est le fibré vectoriel déduit de R^s ; si $x \in M$ et si z est un point de la fibre R^s_x , alors

$E_x = (\lambda_z^s)^{-1}(T_z H)$. Une section $\sigma(U \to J^s T)$ est une section de E si et seulement si $\lambda^s\sigma$ est tangent à H en tout point de $(\pi^s)^{-1}(U) \cap H$.

Rappelons les deux propriétés suivantes de E : d'abord la restriction de ρ^s à E (que l'on notera encore ρ^s), est surjective :

$$\rho^s : E \to T .$$

En effet si $x \in M$ et $z \in R_x^s$, alors $\rho^s | E_x = (d\pi^s) \circ \lambda_z^s$, et on remarque que $d\pi^s$ $(T_z H \to T_x)$ et λ_z^s $(E_x \to T_z H)$ sont surjectives. Ensuite, si σ_1 et σ_2 sont deux sections de E au-dessus de U, alors $[\sigma_1, \sigma_2]$ est aussi une section de E. Le théorème II.1 nous donne dans le contexte présent la réciproque suivante :

Théorème III.1.-

Soit E un sous-fibré vectoriel différentiable de $J^s T$. Pour qu'il soit le sous-fibré vectoriel déduit d'une G-structure H d'ordre s, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

1) Le morphisme $\rho^s : E \to T$ est surjectif.

2) Si σ_1 et σ_2 sont deux sections de E sur un ouvert quelconque $U \subset M$, alors $[\sigma_1, \sigma_2]$ est aussi une section de E.

Si ces deux conditions sont vérifiées, il existe toujours des G-structures connexes (connexes en tant que sous-variétés de R^s) dont E est le fibré vectoriel déduit, et elles sont toutes équivalentes entre elles, pourvu que M soit connexe.

Plus précisément, une G-structure H et une G'-structure H' ont même fibré vectoriel déduit E, si et seulement si il existe $g \in GL^s(n,\mathbb{R})$ tel que $H' = Hg$, $G = gG'g^{-1}$.

6. AUTOMORPHISMES INFINITESIMAUX D'UNE G-STRUCTURE.

Soit toujours H une G-structure d'ordre s, et E le sous-fibré vectoriel de J^sT déduit de H.

Définition III.1.-

Un difféomorphisme local f de M est appelé un automorphisme local de H si p^sf laisse H invariant, c'est-à-dire si $p^sf(z) \in H$ quel que soit $z \in H \cap (\pi^s)^{-1}(U(f))$.
Un champ de vecteurs θ, défini sur un ouvert $W \subset M$ est appelé automorphisme infinitésimal de H si pour tout $x \in W$ il existe un voisinage ouvert V de x et une famille différentiable f_t d'automorphismes locaux de H, définis sur V, tels que $\theta|V$ est le champ de vecteurs déduit de f_t.

Par ailleurs, tout sous-fibré vectoriel F de J^sT peut être considéré comme un système d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles d'ordre s et de rang constant sur M ; nous dirons qu'un champ de vecteurs θ, défini sur $W \subset M$, est une solution du système d'équations aux dérivées partielles F, si $j^s_x\theta \in F$ pour tout $x \in W$.

Proposition III.2.-

Soit θ un champ de vecteurs sur un ouvert $W \subset M$; les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

a) θ est un automorphisme infinitésimal de H.

b) $p^s\theta$ est tangent à H en tout point de $(\pi^s)^{-1}(W) \cap H$.

c) θ est une solution du système d'équations linéaires homogènes aux dérivées partielles E.

d) les transformations du groupe local à un paramètre engendré par θ sont des automorphismes locaux de H.

Démonstration :

Montrons que a) $\Rightarrow$ b). Soit f_t une famille différentiable d'automorphismes infinitésimaux de H telle que θ est le champ de vecteurs déduit de f_t. Pour tout $z \in H \cap (\pi^s)^{-1}(W)$, la courbe $t \to p^s f_t(z)$ est contenue dans H, donc $p^s\theta$, qui est le champ de vecteurs déduit de $p^s f_t$, est tangent en z à H.

Montrons que b) $\Rightarrow$ d). Soit f_t le groupe local à un paramètre engendré par θ ; $p^s f_t$ est donc le groupe local à un paramètre engendré par $p^s\theta$. Comme par hypothèses $p^s\theta$ est tangent à H, nécessairement la trajectoire de tout point de $H \cap (\pi^s)^{-1}(W)$ est contenue dans H ; cela implique que f_t est un automorphisme local de H quel que soit t.

Il est trivial que d) $\Rightarrow$ a). Pour finir nous démontrerons que b) $\Leftrightarrow$ c). Ceci résulte de la formule

$$(p^s\theta)_z = \lambda_z^s \, j_x^s \, \theta ,$$

dans laquelle z est un point de la fibre H_x. En effet un élément $X \in J_x^s T$ appartient à E_x si et seulement si $\lambda_z^s(X)$ est tangent à H_x ; en faisant $X = j_x^s\theta$ on obtient le résultat désiré.

7. PSEUDO-GROUPES ET GROUPOÏDES : DEFINITIONS.

Définition d'un groupoïde, III.2.-

Un groupoïde est un ensemble K muni d'une loi de composition, qui en général n'est pas partout définie, mais qui vérifie les propriétés suivantes :

1) Si les produits XY et YZ sont définis, alors les produits (XY)Z et X(YZ) sont aussi définis et sont égaux. Réciproquement si (XY)Z ou X(YZ) est défini, alors XY et YZ sont définis.

2) Un élément e de K est appelé une identité si $Xe = X$ pour tout X tel que Xe est défini, et $eY = Y$ pour tout Y tel que eY est défini. La deuxième condition imposée à K est que pour tout $X \in K$ il existe une identité $e \in K$ telle que Xe est défini, et une identité $e' \in K$ telle que e'K est défini.

3) Quel que soit $X \in K$, il existe un élément $Y \in K$ tel que XY et YX sont définis et sont des identités.

Propriétés immédiates :

Pour tout $X \in K$ l'identité e telle que Xe est définie est unique et sera notée $\alpha(X)$. En effet supposons que e_1 et e_2 soient des identités telles que Xe_1 et Xe_2 soient définis ; puisque $(Xe_1)e_2$ est défini (et égal à X), e_1e_2 est aussi défini et $e_1e_2 = e_1 = e_2$. De même l'identité e' telle que e'X est défini, est unique et sera notée $\beta(X)$. L'ensemble des identités sera noté I. Les applications α et β sont des applications surjectives de K sur I, car si $e \in I$, alors $\alpha(e) = \beta(e) = e$.

En outre on montre sans difficulté que l'élément Y tel que XY et YX soient des identités, est unique. Il sera appelé l'inverse de X et sera noté X^{-1}. Noter que $X^{-1}X = \alpha(X)$ et $XX^{-1} = \beta(X)$.

Remarquons enfin que le produit XY est défini si et seulement si $\alpha(X) = \beta(Y)$. En effet posons $e = \alpha(X)$. Si XY est défini, $(Xe)Y$ est aussi défini, donc eY aussi, ce qui implique $e = \beta(Y)$. Réciproquement si $e = \alpha(X) = \beta(Y)$, alors Xe et eY sont définis, donc $(Xe)Y$ est défini, or $(Xe)Y = XY$.

La notion de sous-groupoïde va de soi ; nous nous bornerons à préciser la définition suivante :

<u>Définition III.3.-</u>

Un groupoïde K est dit transitif si, quels que soient e et e' $\in I$, il existe $X \in K$ tel que $\alpha(X) = e$ et $\beta(X) = e'$. Un sous-groupoïde K' de K est appelé un sous-groupoïde transitif s'il a les mêmes identités que K et si c'est un groupoïde transitif.

<u>Définition d'un groupoïde différentiable</u>, <u>III.4.-</u>

Un groupoïde différentiable est un groupoïde K qui vérifie les trois conditions suivantes ([3], [4]) :

1) K est une variété différentiable et l'ensemble I des identités est une sous-variété régulière de K. En outre les applications α et β sont différentiables et de rang maximum (égal à la dimension de I).

2) Appelons Δ l'ensemble des couples $(X,Y) \in K \times K$ tels que $\alpha(X) = \beta(Y)$; c'est une sous-variété régulière fermée de $K \times K$, car c'est l'image réciproque de la diagonale de $I \times I$ par l'application

$$(X,Y) \in K \times K \rightarrow (\alpha(X), \beta(Y)) \in I \times I .$$

La condition imposée est la différentiabilité de l'application

$$(X,Y) \in \Delta \rightarrow XY \in K .$$

3) On exige enfin la différentiabilité de l'application

$$X \in K \rightarrow X^{-1} \in K .$$

Définition III.5.-

Un sous-ensemble K' de K est appelé un sous-groupoïde différentiable si :

1) K' est un groupoïde différentiable.

2) K' est un sous-groupoïde de K.

3) K' est une sous-variété de K.

Exemple de groupoïde différentiable :

Soit M une variété différentiable et $J^s(M)$ l'ensemble des jets inversibles d'ordre s dont la source et le but sont dans M ; c'est un ouvert de $J^k(M,M)$, donc une sous-variété. Il résulte du Chapitre II que $J^k(M)$ est un groupoïde différentiable ; ses identités sont les jets d'ordre s de l'application identique de M ; en tant que variété, l'ensemble de ses identités est canoniquement difféomorphe à M.

Définition d'un pseudo-groupe, III.6.-

Soit M une variété différentiable. Un pseudo-groupe sur M est un ensemble Γ de difféomorphismes locaux de M tel que :

1) Si f et $g \in \Gamma$ et si $f_o g$ est défini, alors $f_o g \in \Gamma$.

2) Si $f \in \Gamma$, alors $f^{-1} \in \Gamma$.

3) L'application identique de M appartient à Γ.

4) Si $f \subset \Gamma$ et si W est un ouvert de M tel que $W \subset U(f)$, alors la restriction de f à W appartient à Γ.

5) Etant donné un difféomorphisme local f défini sur un ouvert $U \subset M$, si quel que soit $x \in U$ il existe un voisinage ouvert W de x contenu dans U et tel que $f|W \in \Gamma$, alors $f \in \Gamma$.

Ce pseudo-groupe Γ est dit <u>transitif</u> si, quels que soient x et $y \in M$, il existe $f \in \Gamma$ tel que $f(x) = y$.

On remarque que si Γ est un pseudo-groupe sur M, l'ensemble $J^s\Gamma$ des jets d'ordre s des éléments de Γ est un sous-groupoïde de $J^s(M)$. Le pseudo-groupe Γ est transitif si et seulement si le sous-groupoïde $J^s\Gamma$ est transitif.

<u>Définition d'un pseudo-groupe de Lie transitif, III.7.-</u>

Soit Γ un pseudo-groupe transitif de transformations locales de M. C'est un pseudo-groupe de Lie (transitif) d'ordre s si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1) l'ensemble $J^s\Gamma$ a une structure de groupoïde différentiable qui en fait un sous-groupoïde différentiable de $J^s(M)$.

2) un difféomorphisme local f de M appartient à Γ si et seulement si $j^s_x f \in J^s\Gamma$ quel que soit $x \in U(f)$.

<u>Exemples de pseudo-groupes de Lie</u> :

L'ensemble de tous les difféomorphismes locaux de M est un pseudo-groupe de Lie ; le groupoïde différentiable associé est $J^s(M)$. Voici maintenant des exemples non triviaux:

1) Soit G un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$, et soit Γ l'ensemble des difféomorphismes locaux f de $\mathbb{R}^n$ tels qu'en tout point de U(f) la matrice de l'application différentielle df appartienne à G. Il est immédiat que Γ est un pseudo-groupe sur M ; nous allons montrer que c'est un pseudo-groupe de Lie d'ordre 1. En effet on peut construire un difféomorphisme Φ de $J^1(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times GL(n,\mathbb{R})$ de la façon suivante : à $X \in J^1(\mathbb{R}^n)$ on fait correspondre le triplet $\Phi(X) = (\alpha(X), \beta(X), M) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times GL(n,\mathbb{R}^n)$, où M est la matrice de l'application linéaire $T_a\mathbb{R}^n \to T_b\mathbb{R}^n$ définie par X. L'image de $J^1(\Gamma)$ par Φ est $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G$. En effet par définition de Γ, $\Phi(J^1(\Gamma)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G$. D'autre part, un triplet $(a,b,M) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G$ est l'image par Φ du jet d'une transfor-

mation affine de $\mathbb{R}^n$ qui appartient à Γ. On peut donc transporter sur $J^1\Gamma$ la structure de variété différentiable de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times G$. On vérifie aisément qu'avec cette structure $J^1\Gamma$ est un sous-groupoïde différentiable de $J^1(\mathbb{R}^n)$ et par suite Γ est un pseudo-groupe de Lie transitif d'ordre 1.

Voici deux cas particuliers. Si $G = SO(n,\mathbb{R})$, alors Γ est l'ensemble des restrictions à des ouverts de $\mathbb{R}^n$ des déplacements ou mouvements rigides de $\mathbb{R}^n$.

Si $n = 2m$ et si G est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$, alors Γ est le pseudo-groupe des transformations analytiques complexes locales de $\mathbb{R}^n$ identifié à $\mathbb{C}^m$.

2) Soit maintenant M un espace homogène d'un groupe de Lie G, et soit Γ l'ensemble des restrictions à des ouverts de M des transformations de G. On peut vérifier que Γ est un pseudo-groupe de Lie ; en général l'ordre de Γ sera plus grand que 1.

8. SOUS-GROUPOIDES TRANSITIFS DE $J^s(M)$ ET G-STRUCTURES D'ORDRE s.

Soit H une G-structure d'ordre s sur une variété différentiable M, et soit $K(H)$ l'ensemble des $X \in J^s(M)$ tels que

$$X \circ H_{\alpha(X)} = H_{\beta(X)} ,$$

c'est-à-dire $X_\circ z \in H$ pour tout $z \in H_{\alpha(X)}$.

D'ailleurs il suffit que $X_\circ z \in H$ pour un seul $z \in H_{\alpha(X)}$ pour que l'on puisse affirmer que $X \in K(H)$.

Proposition III.3.-

L'ensemble $K(H)$ est un sous-groupoïde différentiable transitif de $J^s(M)$. Si H' est une autre G'-structure d'ordre s, $K(H) = K(H')$ si et seulement si H et H' sont équivalentes.

Démonstration :

On vérifie facilement que $K(H)$ est un sous-groupoïde de $J^s(M)$; ses identités sont celles de $J^s(M)$. Il est transitif ; en effet, si z et $z' \in H$, alors $z' \circ z^{-1}$ est un élément de $K(H)$; sa source et son but sont $\beta(z)$ et $\beta(z')$, c'est-à-dire deux points quelconques de M.

Soit maintenant U et V deux ouverts de M ; nous supposerons qu'il existe au-dessus de U une section σ de H, et que sur U et V il existe des coordonnées locales. L'application

$$(x, z) \rightarrow z \circ (\sigma(x))^{-1}$$

détermine une bijection de $U \times (\pi^s)^{-1}(V)$ (qui est un ouvert de $M \times R^s$) sur l'ensemble des $X \in J^s(M)$ tels que $\alpha(X) \in U$ et $\beta(X) \in V$. Sa restriction à $U \times (\pi^s|H)^{-1}(V)$ (qui est un ouvert de $M \times H$) est une bijection sur l'ensemble des $X \in K(H)$ tels que $\alpha(X) \in U$ et $\beta(X) \in V$. Cela nous permet de mettre sur $K(H)$ une structure de variété différentiable qui en fait une sous-variété de $J^s(M)$.

De même, on montre que $K(H)$ est un groupoïde différentiable, donc un sous-groupoïde différentiable de $J^s(M)$.

Passons à la deuxième partie de la proposition III.3. Si H et H' sont équivalentes, c'est-à-dire s'il existe $g \in GL^s(n,\mathbb{R})$ tel que $H' = Hg$, alors on s'aperçoit tout de suite que $K(H) = K(H')$. Réciproquement supposons que $K(H) = K(H')$. Soit $z_0 \in H$; on peut trouver $g \in GL^s(n,\mathbb{R})$ tel que $z_0 g \in H'$; soit z un élément quelconque de H ; on peut trouver $X \in K(H)$ tel que $z = Xz_0$; on a alors $zg = X(z_0 g)$, et c'est un élément de H', car $z_0 g \in H'$ et $X \in K(H')$; donc $Hg \subset H'$. On démontrerait de la même façon que $H'g^{-1} \subset H$; d'où finalement $H' = Hg$.

Nous rappelons que l'égalité $H' = Hg$ implique que $G' = g^{-1}Gg$.

Réciproquement, soit K un sous-groupoïde différentiable transitif de $J^s(M)$. Soit x un point de M, soit $G^s(M,x)$ le groupe des jets inversibles d'ordre s ayant pour source et pour but x, et soit $G(K,x)$ le groupe des éléments de K qui ont pour source et pour but x. Il est clair que $G^s(M,x)$ est un groupe de Lie isomorphe à $GL^s(n,\mathbb{R})$. Quant à $G(K,x)$, c'est aussi un groupe de Lie ; en effet il s'agit de démontrer que l'application

$$(X,Y) \in G(K,x) \times G(K,x) \rightarrow X_o Y^{-1} \in G(K,x) \subset K$$

est différentiable, et cela résulte du fait que $G(K,x)$ est une sous-variété régulière de K ; $G(K,x)$ est donc un sous-groupe de Lie de $G^s(M,x)$.

Soit en outre $A^s(M,x)$ l'ensemble des jets inversibles de source x, et $A(K,x)$ l'ensemble des éléments de K de source x. Muni de la projection β, $A^s(M,x)$ est un fibré principal de base M ayant pour groupe structural $G^s(M,x)$. Quant à $A(K,x)$, c'est un sous-fibré principal de $A^s(M,x)$, et son groupe structural est $G(K,x)$.

Si on remplace le point x par un autre point $x' \in M$, on obtient un fibré principal $A(K,x')$ qui est isomorphe à $A(K,x)$; cela résulte du fait que K est un sous-groupoïde transitif, donc il existe un élément $Y \in K$ tel que $\alpha(Y) = x$ et $\beta(Y) = x'$; l'application $X \rightarrow XY$ est un isomorphisme du fibré principal $A(K,x')$ sur le fibré principal $A(K,x)$.

Soit maintenant z un repère d'ordre s au point x, c'est-à-dire un jet inversible de source $0 \in \mathbb{R}^n$ et de but x. On a $z^{-1} {}_o G^s(M,x) {}_o z = GL^s(n,\mathbb{R})$,

et $\qquad A^s(M,x) {}_o z = R^s(M)$.

Quant à $G = z^{-1} {}_o G(K,x) {}_o z$, c'est un sous-groupe de Lie de $GL^s(n,\mathbb{R})$, et $H = A(K,x) {}_o z$ est un fibré principal de groupe structural G, c'est-à-dire une G-structure.

Il est facile de se rendre compte que K est l'ensemble des $X \in J_s(M)$ tels que $X_o H_{\alpha(X)} = H_{\beta(X)}$, autrement dit, $K = K(H)$. En outre, si l'on remplace x et z par x' et z', (vérifiant $x' = \pi^s(z')$), on obtient une G'-structure $A(K,x') \circ z'$ qui est équivalente à $H = A(K,x) \circ z$.

<u>Définition III.8.-</u>

Un sous-groupoïde transitif (différentiable) K de $J^s M$ sera appelé un groupoïde de Lie d'ordre s.

Nous signalons que si K est groupoïde de Lie, tous les fibrés principaux $A(K,x)$, lorsque x varie dans M, sont isomorphes entre eux ; cela a déjà été remarqué ci-dessus. Il en résulte que, si l'un des fibrés principaux $A(K,x)$ est connexe, tous les autres le sont aussi.

Du théorème III.1 et des constructions précédentes on déduit :

<u>Théorème III.2.-</u>

Il y a une correspondance biunivoque entre les groupoïdes de Lie K d'ordre s, tels que les fibrés principaux $A(K,x)$ sont connexes, et les sous-fibrés vectoriels E de $J^s T$ qui vérifient les conditions 1) et 2) du théorème III.1. Cette correspondance biunivoque est définie ainsi : à K on fait correspondre le fibré vectoriel E déduit des G-structures $H = A(K,x) \circ z$ associées à K.

9. TRANSFORMATIONS INFINITESIMALES D'UN PSEUDO-GROUPE DE LIE.

Définition III.9.-

Soit Γ un pseudo-groupe de Lie d'ordre s sur M. On dit qu'un champ de vecteurs θ défini sur un ouvert $U \subset M$ est une transformation infinitésimale de Γ (ou un Γ-champ de vecteurs) si pour tout $x \in U$ il existe un voisinage W de x $(W \subset U)$ et une famille différentiable f_t d'éléments de Γ définie sur W, tels que $\theta|W$ est le champ de vecteurs déduit de f_t.

Soit $J^s\Gamma$ le groupoïde associé à Γ, et soit $E(\Gamma)$ (ou tout simplement E, s'il n'y a pas danger de confusion) le sous-fibré vectoriel de J^sT associé à $J^s\Gamma$ suivant la construction du paragraphe précédent. Cette construction a fait intervenir une G-structure H associée au groupoïde $J^s\Gamma$.

Proposition III.4.-

Soit θ un champ de vecteurs défini sur un ouvert $U \subset M$; les trois assertions suivantes sont équivalentes :

a) θ est une transformation infinitésimale de Γ.

b) le groupe local à un paramètre engendré par θ est constitué de transformations locales appartenant à Γ.

c) θ est une solution du système d'équations aux dérivées partielles $E(\Gamma)$ (c'est-à-dire $j^s_x\theta \in E(\Gamma)$ pour tout $x \in U$).

Démonstration :

Il est clair que les éléments de Γ sont des automorphismes locaux de la G-structure H ; la réciproque est aussi vraie, à cause de la définition III.7 (condition 2)). Puisque les éléments de Γ sont les automorphismes locaux de H, les transformations infinitésimales de Γ sont les automorphismes infinitésimaux de H. Il ne reste plus qu'à appliquer la proposition III.2.

Soit $\Theta(\Gamma)$ l'ensemble des Γ-champs de vecteurs, et $J^s\Theta(\Gamma)$ l'ensemble de leurs jets d'ordre s. Il résulte de la proposition III.4 que $J^s\Theta(\Gamma) \subset E(\Gamma)$; mais en général

$$J^s\Theta(\Gamma) \neq E(\Gamma) .$$

Définition III.10.-

S'il se trouve que $J^s\Theta(\Gamma) = E(\Gamma)$, on dit que le pseudo-groupe Γ est régulier.

Les exemples de pseudo-groupes de Lie donnés à la fin du §7., sont tous réguliers.

10. NOTIONS SUR LES FAISCEAUX.

Définitions III.11.-

Soit M un espace topologique. Un faisceau F sur M est la donnée d'un ensemble F(U) associé à chaque ouvert $U \subset M$, ainsi que la donnée d'une application R_V^U de F(U) dans F(V) chaque fois que $V \subset U$; ces applications R_V^U doivent vérifier les propriétés suivantes :

1) $R_U^U = I$, quel que soit l'ouvert U.

2) si $W \subset V \subset U$, alors $R_W^U = R_W^V \circ R_V^U$.

3) si $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de l'ouvert U ($V_\alpha \subset U$, pour tout $\alpha \in A$), si à chaque V_α on associe un élément $\sigma_\alpha \in F(V_\alpha)$ de telle sorte que

$$R^{V_\alpha}_{V_\alpha \cap V_\beta}(\sigma_\alpha) = R^{V_\beta}_{V_\alpha \cap V_\beta}(\sigma_\beta) ,$$

quels que soient α et $\beta \in A$, alors il existe un élément unique $\sigma \in F(U)$ tel que $R^U_{V_\alpha}(\sigma) = \sigma_\alpha$, pour tout $\alpha \in A$.

Les éléments de F(U) s'appellent sections du faisceau au-dessus de U ; l'application R_V^U s'appelle restriction à V ; très souvent on écrit $R_V^U(\sigma) = \sigma|V$.

Exemples :

Les exemples que nous allons rencontrer seront des faisceaux de champs de vecteurs sur une variété différentiable M ; si à tout ouvert $U \subset M$, on associe l'ensemble de tous les champs de vecteurs (différentiables) sur U , il est clair qu'on obtient un faisceau. - Plus simplement encore, les fonctions (différentiables) définies sur des ouverts de M forment un faisceau, et ce faisceau détermine la structure de variété différentiable de M.

Germes d'un faisceau.

Soit F un faisceau sur M. Soit $x \in M$ et soient σ et σ' deux sections de F définies sur des ouverts de M contenant x ; on dit que σ et σ' ont même germe au point x s'il existe un voisinage ouvert V de x tel que les restrictions de σ et σ' à V soient égales. Nous avons ainsi défini une relation d'équivalence sur l'ensemble des sections de F définies au voisinage de x ; les classes d'équivalence s'appellent les germes au point x.

L'ensemble des germes du faisceau F sera encore noté F ; l'application canonique de F sur M sera notée P ; c'est l'application qui à un germe au point x associe le point x. L'ensemble $P^{-1}(x)$ des germes au point x sera appelé fibre du faisceau au-dessus de x et sera noté F_x. Si σ est une section du faisceau définie au voisinage de x, son germe au point x sera noté σ_x ; si $\sigma \in F(U)$, on peut associer à σ une section de l'ensemble des germes du faisceau au-dessus de U, à savoir :

$$x \in U \to \sigma_x \quad ;$$

cette section sera encore notée σ.

Il est possible de mettre sur l'ensemble des germes du faisceau une topologie telle que F(U) puisse être identifié avec l'ensemble des sections <u>continues</u> de cet ensemble de germes au-dessus de U, quel que soit l'ouvert $U \subset M$. Nous nous contentons de signaler ce fait car notre but est simplement de justifier l'habitude d'identifier un faisceau avec l'ensemble de ses germes, muni de la topologie à laquelle nous venons de faire allusion.

Revenons maintenant au faisceau des champs de vecteurs sur une variété différentiable M. Supposons que les champs de vecteurs θ_1 et θ'_1 ont même germe au point x, ainsi que θ_2 et θ'_2 ; on remarque alors que :

1) $j^k_x\theta_1 = j^k_x\theta'_1$, pour tout entier k fini ou infini.

2) $\lambda\theta_1$ et $\lambda\theta'_1$ ont même germe en x, quel que soit le nombre réel λ.

3) $\theta_1 + \theta_2$ et $\theta'_1 + \theta'_2$ ont même germe en x.

4) $[\theta_1,\theta_2]$ et $[\theta'_1,\theta'_2]$ ont même germe en x.

La première propriété implique qu'il existe une application qui à tout germe γ de champs de vecteurs associe son jet d'ordre k (quelconque) au même point ; ce dernier sera encore noté $j^k_x\gamma$. Les trois dernières montrent que l'ensemble des germes de champs de vecteurs au point x est muni d'une structure d'algèbre de Lie.

En nous plaçant à un point de vue plus abstrait, nous donnons la définition suivante :

Soit F un faisceau sur M. Si F(U) est muni d'une structure de groupe (resp. d'espace vectoriel, resp. d'algèbre de Lie), quel que soit l'ouvert $U \subset M$, et si toutes les applications de restriction R^U_V sont des homomorphismes de groupes (resp. des applications linéaires, resp. des homomorphismes d'algèbres de Lie), alors on dit que F est un faisceau de groupes (resp. d'espaces vectoriels, resp. d'algèbres de Lie). On montre alors sans difficulté que chaque fibre du faisceau peut être munie d'une structure de groupe (resp. d'espace vectoriel, resp. d'algèbre de Lie, etc ...).

Soit maintenant Γ un pseudo-groupe de Lie d'ordre s sur une variété différentiable M, et soit $\Theta(\Gamma)$ l'ensemble de ses transformations infinitésimales ; il est clair que $\Theta(\Gamma)$ est un faisceau de champs de vecteurs sur M. Identifiant ce faisceau avec l'ensemble de ses germes, on dira que $\Theta(\Gamma)$ est le faisceau des germes des transformations infinitésimales de Γ. Comme il a été indiqué dans la démonstration de la proposition III.4, les sections du faisceau $\Theta(\Gamma)$ sont les automorphismes infinitésimaux d'une certaine G-structure H, ce sont donc les champs de vecteurs θ tels que $p^s\theta$ soit tangent à H, et on reconnaît ainsi que $\Theta(\Gamma)$ est un faisceau d'algèbres de Lie.

11. PSEUDO-GROUPES DE LIE INFINITESIMAUX.

Définition III.12.-

Un pseudo-groupe de Lie infinitésimal, d'ordre s, (transitif), sur une variété différentiable M, est un faisceau Θ de germes de champs de vecteurs sur M vérifiant les propriétés suivantes :

1) Θ est un faisceau d'algèbres de Lie.

2) un champ de vecteurs θ défini sur un ouvert $U \subset M$ est une section de Θ si et seulement si $j^s_x\theta \in J^s\Theta$, pour tout $x \in U$, où $J^s\Theta$ est l'ensemble des jets d'ordre s des germes du faisceau Θ.

3) $J^s\Theta$ est un sous-fibré vectoriel de J^sT.

4) L'application $\rho^s : J^s\Theta \to T$ est surjective.

Soit $J^s_x\Theta$ la fibre de $J^s\Theta$ au-dessus du point $x \in M$. La condition 3) est équivalente à la suivante :

3 bis) La dimension de l'espace vectoriel $J^s_x\Theta$ ne dépand pas de x.

En effet, à cause de la condition 1), pour tout $x_o \in M$, $J^s_{x_o}\Theta$ est un espace vectoriel ; soient $\theta_1, \ldots, \theta_q$ des sections de Θ telles que $j^s_{x_o}\theta_1, \ldots, j^s_{x_o}\theta_q$ forment une base de $J^s_{x_o}\Theta$; si x est dans un voisinage suffisamment petit de x_o, $j^s_x\theta_1, \ldots, j^s_x\theta_q$ sont encore des vecteurs linéairement indépendants de $J^s_x\Theta$. Si donc on suppose que la dimension de $J^s_x\Theta$ est toujours celle de $J^s_{x_o}\Theta$, alors $j^s_x\theta_1, \ldots, j^s_x\theta_q$ forment une base de $J^s_x\Theta$; et on en déduit que $J^s\Theta$ est un sous-fibré vectoriel de J^sT.

La condition 2) signifie que θ est une section du faisceau Θ si et seulement si $j^s\theta$ est une section du fibré vectoriel $J^s\Theta$. Quant à la condition 4), on dit qu'un faisceau Θ d'algèbres de Lie de champs de vecteurs est transitif si elle est vérifiée.

Si Γ est un pseudo-groupe de Lie d'ordre s sur M, le faisceau $\Theta(\Gamma)$ des germes des Γ-champs de vecteurs n'est en général pas un pseudo-groupe de Lie infinitésimal, car si les conditions 1) et 2) sont alors vérifiées, il n'en est pas de même des conditions 3) et 4).

Cependant si Γ est un pseudo-groupe de Lie régulier (c'est-à-dire si $J^s\Theta(\Gamma) = E(\Gamma)$), on voit tout de suite que $\Theta(\Gamma)$ est un pseudo-groupe de Lie infinitésimal.

Nous allons montrer que tout pseudo-groupe de Lie infinitésimal peut être associé à un pseudo-groupe de Lie régulier [6].

Théorème III.3.-

Soit Θ un pseudo-groupe de Lie infinitésimal d'ordre s sur la variété différentiable connexe M. Il existe un pseudo-groupe de Lie Γ, transitif et régulier, tel que $\Theta(\Gamma) = \Theta$.

Nous décomposerons la démonstration en trois parties :

1ère partie : Construction de Γ.

Posons $E = J^s\Theta$. Nous allons montrer que E vérifie les conditions 1) et 2) du Théorème III.1. La condition 1) est la condition 4) de la définition III.12 ; passons à la condition 2). Soit σ une section de E au-dessus d'un ouvert $U \subset M$; pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 $(V \subset U)$ et des champs de vecteurs $\theta_1, \ldots, \theta_q$, sections de Θ sur V, tels que $j^s_x\theta_1, \ldots, j^s_x\theta_q$ forment une base de E_x pour tout $x \in V$; on peut donc écrire $\sigma = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)\, j^s_x\theta_i$, où les f_i sont des fonctions différentiables définies sur V. En utilisant la formule III.5 et la condition 1) de la définition III.12, on démontre que E vérifie la condition 2) du théorème III.1. Comme il a été vu au §8., nous pouvons associer à E un groupoïde K, tel que les fibrés principaux $A(K,x)$ sont connexes. Soit Γ l'ensemble des difféomorphismes locaux de M dont tous les jets d'ordre s sont dans K ; manifestement Γ est un pseudo-groupe sur M. Nous allons montrer que $J^s\Gamma = K$, car si nous avons démontré cela, le théorème III.3 est démontré. En effet, si $J^s\Gamma = K$, Γ est un pseudo-groupe de Lie d'ordre s sur M, K est son groupoïde $K(\Gamma)$ et $E = E(\Gamma)$. Les transformations infinitésimales de Γ sont les champs de vecteurs θ tels que $j^s\theta$ soit une section de $E = J^s\Theta$ (proposition III.4) ce sont donc les éléments de Θ (condition 2) de la définition III.12), autrement dit $\Theta = \Theta(\Gamma)$. Puisque $E = J^s\Theta$, Γ est un pseudo-groupe de Lie régulier.

Il s'agit donc de démontrer que, quel que soit $X \in K$, il existe $f \in \Gamma$ tel que $X = j^s_{\alpha(X)}f$.

2ème partie :

En fait nous allons démontrer ceci : quel que soit $x_o \in M$, il existe dans K un voisinage W_{x_o} de $I^s_{x_o}$ tel que tout $X \in W_{x_o}$ est le jet d'un élément $f \in \Gamma$: $X = j^s_{\alpha(X)}f$.

Car cela implique que $J^s\Gamma$ contient un voisinage W de l'ensemble des identités de K, à savoir $W = \bigcup_{x \in M} W_x$; et puisque $J^s\Gamma$ est un sous-groupoïde de K, nous en déduisons que $J^s\Gamma = K$, à cause du lemme suivant.

Lemme.-

Soit K un groupoïde différentiable transitif tel que, pour tout $x \in I$ (ensemble des identités de K), le fibré principal $A(K,x)$ (ensemble des $X \in K$ tels que $\alpha(X) = x$) est connexe. Soit W un voisinage de I dans K ; K est engendré par W.

Démonstration :

Soit K' le sous-groupoïde de K engendré par W, et soit $x \in I$ une identité quelconque. Dans $A(K,x)$ nous pouvons définir une relation d'équivalence, en disant que X et Y $\in A(K,x)$ sont équivalents si $Y \circ X^{-1} \in K'$. La classe d'équivalence d'un élément $X \in A(K,x)$ est $A(K',\beta(X)) \circ X$. Or $A(K',\beta(X))$ contient un voisinage de $\beta(X)$ dans $A(K,\beta(X))$, à savoir $W \cap A(K,\beta(X))$; on en déduit que la classe d'équivalence de X contient un voisinage de X dans $A(K,x)$; par conséquent les classes d'équivalences sont des ouverts de

$A(K,x)$. Puisque $A(K,x)$ est connexe, il ne peut y avoir qu'une seule classe d'équivalence ; par conséquent $A(K',x) = A(K,x)$; d'où $K = K'$.

3ème partie :

Nous allons construire une sorte d'application exponentielle de E dans K.

Soit $x_o \in M$, et soient $\theta_1, \ldots, \theta_q$ des champs de vecteurs de Θ tels que $j^s_x\theta_1, \ldots, j^s_x\theta_q$ forment une base de E_x pour tout point x d'un voisinage U de x_o. Soit $x \in U$ et soit $\tau \in E_x$; on peut écrire $\tau = \sum a_i\, j^s_x\theta_i$, où les $a_i \in \mathbb{R}$; posons $\theta_\tau = \sum a_i\, \theta_i$.

Il existe dans E un voisinage V_{x_o} de l'origine de E_{x_o} , tel que si $\tau \in V_{x_o}$, le groupe local à un paramètre $f_{\tau,t}$ engendré par θ_τ est défini pour $|t| < \epsilon$, où ϵ est un certain nombre réel strictement positif; en choisissant V_{x_o} assez petit, on peut faire en sorte que $\epsilon > 1$.

Nous voulons démontrer que tous les éléments $f_{\tau,t}$ sont dans Γ. Soit $H = A(K,x) \circ z$ une G-structure associée à K (voir §8.) ; puisque $j^s\theta_\tau$ est une section de E, θ_τ est un automorphisme infinitésimal de H (proposition III.2), donc tous les éléments $f_{\tau,t}$ sont des automorphismes locaux de H, c'est-à-dire :

$$p_s\, f_{\tau,t}(\zeta) \in H , \quad \text{si} \quad \zeta \in (\pi^s)^{-1}(U(f_{\tau,t})) \cap H ,$$

autrement dit :

$$j^s_{\beta(X)}f \circ X \circ z \in A(K,x) \circ z ,$$

pour tout $X \in A(K,x)$ tel que $\beta(X) \in U(f_{\tau,t})$.

Cela implique que $j^s_{\beta(X)}f \in K$, et l'on en déduit que $f_{\tau,t} \in \Gamma$.

Posons $\psi(\tau) = j^s_x f_{\tau,1}$ si $\tau \in V_{x_0}$; ψ est une application différentiable définie sur $V_{x_0} \subset E$ et prenant ses valeurs dans K. Un calcul, que nous ne reproduirons pas ici, montre que le rang de ψ est égal à la dimension de K.

Donc l'image de ψ est un voisinage ouvert W_{x_0} de $I^s_{x_0}$ dans K. Cela veut dire que tout élément de W_{x_0} est le jet d'ordre s d'un élément $f_{\tau,1} \in \Gamma$.

Au cours de la démonstration nous avons obtenu le résultat suivant

Corollaire.-

Soit Γ un pseudo-groupe de Lie d'ordre s, régulier, défini sur la variété M. Pour chaque point x de M il existe un voisinage W dans $J^s\Gamma$ de $I^s(x)$ tel que tout élément $X \in W$ est le jet d'ordre s d'une transformation qui appartient à un groupe local à un paramètre d'éléments de Γ.

12. JETS D'ORDRE INFINI DES CHAMPS DE VECTEURS DE Θ.

Soit x un point fixé de la variété M. Nous allons noter par $\mathfrak{D}_x$ l'ensemble des jets d'ordre infini de source x des champs de vecteurs définis dans un voisinage de x. $\mathfrak{D}_x$ a une structure naturelle d'algèbre de Lie, définie par le crochet des champs de vecteurs.

Soit alors Θ un pseudo-groupe de Lie infinitésimal défini sur la variété M. Pour tout $x \in M$ nous noterons par $L_x(\Theta)$ le sous-ensemble de $\mathfrak{D}_x$ des jets d'ordre infini de champs de vecteurs de Θ définis dans un voisinage de x ; $L_x(\Theta)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{D}_x$. La variété M étant supposée connexe, si x, x' sont deux points de M alors $L_x(\Theta)$ et $L_{x'}(\Theta)$ sont isomorphes comme algèbres de Lie. En effet, soit θ une section de Θ définie dans un voisinage de x et supposons que θ est le champ de vecteurs déduit d'une famille φ_t d'éléments de Γ (où Γ est le pseudo-groupe de Lie engendré par Θ d'après le théorème III.3). Soit $f \in \Gamma$ tel que $f(x) = x'$. Alors le champ de vecteurs déduit de la famille différentiable $f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ coïncide avec $df(\theta)$ dans un voisinage de x'. Donc $df(\theta)$ est un champ de vecteurs de Θ et l'application $\theta \to df(\theta)$ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie de $L_x(\Theta)$ sur $L_{x'}(\Theta)$.