COURS DE L'INSTITUT FOURIER

A. MARTINS RODRIGUES

Chapitre I G-structures d'ordre 1

Cours de l'institut Fourier, tome 2 (1969), p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1969__2__1_0>

Chapitre I

G-STRUCTURES D'ORDRE 1.

1. NOTATIONS.

Toutes les variétés différentiables et toutes les applications différentiables que nous considèrerons seront supposées de classe C^∞. Les variétés seront aussi supposées paracompactes. Soit U un ouvert de M et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ une carte locale définie sur U. Soit $\pi^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la projection

$$\pi^i : (a^1, \ldots, a^n) \longmapsto a^i$$

On notera la fonction coordonnée $\pi^i \circ \varphi$ par x^i et souvent la carte locale (U, φ) par $(U, x^1, \ldots, x^n)$.

Soit M une variété, $x \in M$. On notera par T_xM, ou M_x, l'espace tangent en M en x, et TM le fibré tangent à M ; par T_x^*M l'espace cotangent en x, et T^*M le fibré cotangent.

Soient M et N deux variétés, et $\Phi : M \to N$ une application différentiable. On notera $d\Phi_x : T_xM \to T_{\Phi(x)}N$ la différentielle de Φ, et

$\delta\Phi_x : T^*_{\Phi(x)}N \to T_xM$ sa transposée.

Si X est un champ de vecteurs sur M et $p \in M$ un point quelconque, X_p désignera la valeur de X en p ; de même si ω est une forme différentielle sur M, on notera ω_p la valeur de ω au point p.

2. FIBRES PRINCIPAUX.

Définition 1.1.-

Soit G un groupe de Lie, E une variété. On dit que G opère à droite sur E si on se donne une application différentiable $E \times G \to E$

$$(x, g) \mapsto xg$$

telle que :

1) $x.(g_1 g_2) = (xg_1).g_2$

2) $x.e = x$

quels que soient x dans E, g_1 et g_2 dans G ; e désigne l'élément neutre. On dit que G opère transitivement sur E si pour tous x, y dans E, il existe g dans G tels que $y = xg$; si cet élément est unique, on dit que le groupe opère simplement transitivement.

Définition 1.2.-

Un espace fibré principal différentiable (e.f.p.) est un quatuor (P, M, π, G) où

1°) P et M sont des variétés différentiables

2°) $\pi : P \to M$ une surjection différentiable

3°) G un groupe de Lie opérant à droite sur P

en sorte que tout $x \in M$ admet un voisinage ouvert U tel qu'il existe un difféomorphisme

$$\Phi : \overset{-1}{\pi}(U) \to U \times G$$

$$p \mapsto (\pi(p), \psi(p))$$

satisfaisant la condition $\Phi(pg) = (\pi(p), \psi(p).g)$.

Il s'ensuit que G opère simplement transitivement sur les fibres ; on appelle M l'espace de base, P l'espace fibré, G le groupe structural, π la projection.

Une application différentiable $\sigma : U \to P$ s'appelle une section au-dessus de U si $\pi \circ \sigma = Id_U$. La définition 1.2 entraine que tout point de M admet un voisinage U tel qu'il existe une section σ au-dessus de U. Soient σ_1 et σ_2 deux sections sur U et $\lambda : U \to G$ définie par $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)\ \lambda(x)$. L'application λ est différentiable, car si U est un ouvert qui satisfait la condition de la définition 1.2, avec les notations de la définition, $\lambda = (\psi_\circ\sigma_2)^{-1}(\psi_\circ\sigma_1)$.

Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de M et σ_α une section sur chaque U_α. Si $U_\alpha \cap U_\beta$ n'est pas vide, on définit $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ par la condition

$$\sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta(x)\ g_{\alpha\beta}(x) .$$

Les applications $g_{\alpha\beta}$, dites fonctions de transition, du recouvrement $\mathfrak{A} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$, satisfont les conditions :

1) $g_{\alpha\alpha}$ est constante et égale à e, l'élément neutre de G.

2) $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$

3) si $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, $g_{\alpha\beta}\cdot g_{\beta\gamma}\cdot g_{\gamma\alpha} = e$ sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Si $x \in M$, $\overset{-1}{\pi}(x)$ est une sous-variété fermée régulière de P, difféomorphe à G, appelée fibre en x de P. Soit W un ouvert de M : $\left(\overset{-1}{\pi}(W), W, \pi|\overset{-1}{\pi}(W), G\right)$ est un espace fibré principal de façon évidente, appelé restriction de (P, M, π, G) à W.

Exemple : Fibré des repères.

Soit M une variété différentiable de dimension n. Un repère d'origine $x \in M$ est une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de T_xM. Soit B(M) l'ensemble de tous les repères et $\pi : B(M) \to M$ la surjection qui fait correspondre à un repère son origine.

Tout d'abord B(M) se munit d'une structure de variété différentiable de la façon suivante : soit V_i un recouvrement de M par des ouverts de coordonnées, et $U_i = \overset{-1}{\pi}(V_i)$. Si $x \in V_i$, et $b \in \overset{-1}{\pi}(V_i)$, b est une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de T_xM, et chaque e_j s'écrit

$$e_j = \sum_k a_{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$x_1, \ldots, x_n$ désignant les coordonnées sur la carte V_i, et les a_{jk} des fonctions C^∞ de x. Soit

$$\alpha_i : U_i \to \mathbb{R}^{n+n^2}$$

$$b \mapsto (x_1, \ldots, x_n, a_{11}, \ldots, a_{nn}) .$$

Il est clair que les α_i forment un atlas différentiable de B(M), et c'est la structure de variété ainsi définie que l'on considèrera toujours sur B(M).

On va maintenant faire opérer sur la variété B(M), le groupe de matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients réels, $GL(n,\mathbb{R})$. Si $g \in GL(n,\mathbb{R})$, $g = (g_{ij})$, on posera, avec les notations précédentes,

$$b.g = (e'_1, \ldots, e'_n)$$

où

$$e'_j = \sum_i g_{ij}\, e_i$$

L'action ainsi définie de $GL(n,\mathbb{R})$ sur $B(M)$ est clairement différentiable, et en considérant les applications

$$\varphi_i : U_i \to V_i \times GL(n,\mathbb{R})$$
$$b \mapsto (\pi(b),\ (a_{jk}))$$

on vérifie aisément que le quatuor $(B(M),\ M,\ \pi,\ GL(n,\mathbb{R}))$ est un e.f.p., appelé fibré des repères sur la variété M.

<u>Définition 1.3.</u>-

Soit $(P,\ M,\ G,\ \pi)$ et $(P',\ M',\ G',\ \pi')$ deux e.f.p. et

$$\rho : G \to G'$$

un homomorphisme de groupes de Lie. Une application $h : P \to P'$ différentiable est appelée homomorphisme d'e.f.p. associé à ρ si

$$h(pg) = h(p)\ \rho(g) \qquad p \in P,\ g \in G\ .$$

Un homomorphisme conserve donc les fibres, et induit $\bar{h} : M \to M'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{h} & P' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ M & \xrightarrow{\bar{h}} & M' \end{array}$$

S'ils existent deux homomorphismes $h : P \to P'$ et $h' : P' \to P$ associés aux homomorphismes $\rho : G \to G'$ et $\rho' : G' \to G$ tels que $h' \circ h = Id_P$, $h \circ h' = Id_{P'}$, alors P et P' sont dits isomorphes.

Soit G un groupe de Lie, M une variété différentiable et $P = M \times G$, $\pi : P \to M$ la projection naturelle. G opère à droite sur P par la condition

$$(x,h).g = (x, hg) \qquad x \in M, \quad h,g \in G .$$

(P, M, π, G) est appelé alors l'e.f.p. trivial de base M et de groupe structural G.

Définition 1.4.-

Un e.f.p (P', M', G', π') est un sous-e.f.p (s.e.f.p.) de (P, M, G, π) si :

1°) P' est une sous-variété de P

2°) G' un sous-groupe de Lie de G

3°) $\pi' = \pi|P'$

4°) l'inclusion $i : P' \to P$ est un homomorphisme d'e.f.p par rapport à l'inclusion de G' dans G.

On utilisera le théorème suivant (S. Sternberg, Lectures on Differential Geometry, Ch. II, th. 2.1.).

Théorème 1.1.-

Soit M un ensemble, $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement dénombrable de M et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de bijections des U_i sur des variétés différentiables M_i telles que :

1°) si $p,q \in M$ ils sont soit dans le même U_i, soit dans deux U_i disjoints.

2°) $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de M_i quels que soient i et j dans I

3°) $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.

Alors il existe sur M une unique structure de variété différentiable telles que les U_i soient des ouverts de la topologie de M et les φ_i des difféomorphismes de U_i sur M_i.

On peut maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.2.-

Soit (P, M, G, π) un e.f.p et $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert de M, tels que deux points de M soient ou dans un même U_α, ou dans deux U_α disjoints. Soit en outre σ_α une section de $U_\alpha \to P$ pour chaque α, et G' un sous-groupe de Lie. Supposons que les fonctions de transition

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

soient à valeurs dans G'. Il existe alors un et un seul sous-e.f.p (P', M', G', π') de (P, M, G, π) tel que chaque σ_α soit une section de P'.

Démonstration :

On doit nécessairement poser $P' = \cup P'_\alpha$, avec P'_α

$$P'_\alpha = \{\sigma_\alpha(x).g \mid \alpha \in I,\ x \in U_\alpha,\ g \in G'\}$$

et

$$\pi' = \pi | P'$$

On a alors $\pi'^{-1}(U_\alpha) = P'_\alpha$. On sait que les applications différentiables $g_{\alpha\beta}$, étant à valeurs dans G', et différentiables comme applications de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans G, sont différentiables comme applications de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans G'.

Soit
$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times G' \to P'_\alpha$$
$$(x,g) \mapsto \sigma_\alpha(x).g \ .$$

Le recouvrement $\{P'_\alpha\}$ de P', les bijections φ_α^{-1} de P'_α sur les variétés $U_\alpha \times G'$ satisfont les conditions du Théorème 1.1.

Ceci munit P' d'une structure de variété différentiable. Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times G' & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & P'_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\alpha \times G & \xrightarrow{\Phi_\alpha^{-1}} & P_\alpha \end{array}$$

(où Φ_α est l'isomorphisme de $U_\alpha \times G$ et $P_\alpha = \overset{-1}{\pi}(U_\alpha)$ donné par la structure d'e.f.p de P) montrent que P' est une sous-variété de P. Il est clair alors que le quatuor (P', M, π', G') est un sous-efp de (P, M, π, G).

3. <u>G-STRUCTURES</u>.

<u>Définition 1.5.</u>-

Soit G un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$, et M une variété différentiable de dimension n. Une G-structure sur M est un s-e.f.p de B(M), de groupe structural G.

Soit $\mathcal{H}$ l'espace fibré de la G-structure : $\pi|\mathcal{H}$ sera notée simplement π ; et on notera souvent par $\mathcal{H}$ la G-structure elle-même.

<u>Exemple 1</u> :

$G = \{e\}$, e élément neutre de $GL(n,\mathbb{R})$.

La fibre est ici réduite à un point, et la donnée de la G-structure équivaut à la donnée d'une section globale $\sigma : M \to B(M)$ si une telle section existe, la variété M est dite parallélisable. C'est le cas en particulier des groupes de Lie.

Exemple 2 :

$G = GL(n,\mathbb{R})^+$, sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ de matrices à déterminant positif. Une variété munie d'une telle G-structure est dite orientée.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n, soit B l'ensemble des bases de V, on considère comme équivalentes deux bases entre lesquelles lè passage se fasse par une matrice de $GL(n,\mathbb{R})^+$: il n'y a que deux classes B_1 et B_2 , chacune étant appelée une orientation de V. L'ensemble d'un espace vectoriel V et d'une orientation s'appelle un espace vectoriel orienté ; si V est orienté, les bases appartenant à l'orientation choisie seront appelées bases orientées positivement, les autres bases orientées négativement.

Proposition 1.1.-

La donnée d'une $GL(n,\mathbb{R})^+$-structure est équivalente à la donnée d'une application qui à chaque point x de M associe une orientation de T_xM, de telle façon que tout point de M admette un voisinage U et n champs $X_1 \dots X_n$ sur U, tels que $(X_1)_p, \dots, (X_n)_p$ soit une base orientée positivement de T_pM $\forall p \in U$.

En effet soit $\mathcal{K}$ et une $GL(n,\mathbb{R})^+$-structure, U_α un recouvrement ouvert de M et $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathcal{K}$ une section au-dessus de U. Il suffit de prendre comme orientation sur T_xM la classe commune de $\sigma_\alpha(x).g$, $g \in GL(n,\mathbb{R})^+$. Inversement, l'éxistence locale des champs (X_i) permet de construire une unique $GL(n,\mathbb{R})^+$-structure sur M d'après le théorème 1.2.

Exemple 3 :

$$G = SL(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det g = 1\} .$$

Proposition 1.2.-

La donnée d'une $SL(n,\mathbb{R})$-structure équivaut à la donnée d'une forme différentielle de degré n, non nulle en tout point.

Soit en effet $\mathcal{H}$ une $SL(n,\mathbb{R})$-structure, U_α un recouvrement ouvert, et σ_α des sections au-dessus des U_α. Faisons $\sigma_\alpha = \{e_{\alpha 1}, \ldots, e_{\alpha n}\}$: on définit sur U_α la n-forme ω_α par la condition $\omega_\alpha(e_{\alpha 1}, \ldots, e_{\alpha n}) = 1$. Sur $U_\alpha \cap U_\beta$, $\omega_\alpha = \omega_\beta$ car les fonctions de transition sont à valeurs dans $SL(n,\mathbb{R})$. On obtient ainsi une forme volume ω sur M définie par $\omega | U_\alpha = \omega_\alpha$.

Inversement, soit donnée une n-forme ω sur M, non nulle en tout point. Sur chaque ouvert de coordonnées U_α il existe des champs de vecteurs $X_{\alpha 1}, \ldots, X_{\alpha n}$, linéairement indépendants en chaque point et tels que

$$\omega(X_{\alpha 1}, \ldots, X_{\alpha n}) = 1$$

en tout point de U_α. Soit $\sigma_\alpha : U_\alpha \to B(M)$ la section

$$\sigma_\alpha(x) = \{(X_{\alpha 1})_x, \ldots, (X_{\alpha n})_x\} .$$

Alors les fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$ sont à valeurs dans $SL(n,\mathbb{R})$. Par le théorème 1.2 il existe une $SL(n,\mathbb{R})$-structure $\mathcal{H}$ tel que chaque σ_α soit une section de $\mathcal{H}$. Il est clair que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des repères $\{e_1, \ldots, e_n\}$ tels que $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

Exemple 4 :

$$G = O(n,\mathbb{R}) = \{g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^t gg = I\}$$

Une variété munie d'une $O(n,\mathbb{R})$-structure s'appelle une variété riemannienne.

Définition 1.6.-

Une métrique riemannienne sur une variété est une forme différentiable, bilinéaire symétrique, qui induit sur chaque espace tangent T_xM une forme quadratique définie positive.

Proposition 1.3.-

La donnée d'une $O(n,\mathbb{R})$-structure équivaut à la donnée d'une métrique riemannienne.

La démonstration est analogue à la démonstration de la proposition 1.2.

Exemple 5 :

$$G = SO(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{R})$$

La donnée d'une telle G-structure équivaut à la donnée d'une métrique riemannienne et d'une orientation.

Exemple 6 :

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad A \in GL(p,\mathbb{R}),\ C \in GL(n-p,\mathbb{R}),\ B \in M(p\times(n-p),\mathbb{R}) \right\}$$

(G s'identifie au sous-groupe des opérateurs linéaires dans $\mathbb{R}^n$ qui conservent le sous-espace engendré par les p premiers vecteurs de base).

A l'aide du théorème 1.2 on démontre qu'une telle G-structure équivaut à la donnée d'une distribution différentielle de dimension p sur M.

Exemple 7 :

$$G = \left\{ g \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid g = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \quad A,B \in M(n,\mathbb{R}) \right\}$$

G est isomorphe au groupe linéaire complexe $GL(n,\mathbb{C})$.
Une telle G-structure s'appelle une structure presque complexe.

Proposition 1.4.-

La donnée d'une structure presque complexe équivaut à la donnée d'une structure d'espace vectoriel complexe sur chaque espace tangent T_xM, compatible avec sa structure d'espace vectoriel réel, et telle que, si $J_x : T_xM \to T_xM$ désigne la multiplication par le nombre complexe $\mathring{i} = \sqrt{-1}$ le champ de tenseurs $x \mapsto J_x$ soit différentiable.

Démonstration :

Supposons d'abord M munie d'une G-structure : M est alors de dimension 2n. Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de M tel qu'il existe sur chaque U_α une section σ_α de la G-structure : soit

$$\sigma_\alpha(x) = \left(e_{\alpha 1}, \dots, e_{\alpha n}, f_{\alpha 1}, \dots, f_{\alpha n}\right)$$

Posons

$$\mathring{i}e_{\alpha j} = f_{\alpha j} \qquad \mathring{i}f_{\alpha j} = -e_{\alpha j} \qquad (1 \leq j \leq n)$$

on définit ainsi une structure d'espace vectoriel complexe sur T_xM. Quand $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, les fonctions de transition étant dans G, les deux structures complexes définies sur T_xM par σ_α et σ_β s'avèrent compatibles, ce qui munit M d'une structure presque complexe.

Inversement, soit M une variété presque complexe, et U_α un recouvrement par des ouverts de coordonnées. Il existe sur chaque U_α 2n champs

$$X_{\alpha 1}, \ldots, X_{\alpha n}, Y_{\alpha 1}, \ldots, Y_{\alpha n}$$

vérifiant

$$\overset{\circ}{i} X_{\alpha j} = Y_{\alpha j} \qquad \overset{\circ}{i} Y_{\alpha j} = -X_{\alpha j} \qquad (1 \leq j \leq n) .$$

Soit $\sigma_\alpha : U_\alpha \to B(M)$ la section définie par

$$\sigma_\alpha(x) = \big((X_{\alpha 1})_x, \ldots, (X_{\alpha n})_x, (Y_{\alpha 1})_x, \ldots, (Y_{\alpha n})_x\big)$$

Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ l'unique matrice $g \in GL(2n,\mathbb{R})$ amenant $\sigma_\alpha(x)$ sur $\sigma_\alpha(\beta)$ est dans G, et le théorème 1.2 fournit la G-structure désirée.

4. ISOMORPHISME DE G-STRUCTURES. G-STRUCTURES TRANSITIVES ET INTEGRABLES.

Soient M_1 et M_2 deux variétés différentiables et $\varphi : M_1 \to M_2$ un difféomorphisme. On peut prolonger φ en un isomorphisme d'espaces fibrés principaux

$$\tilde{\varphi} : B(M_1) \to B(M_2)$$

de la façon suivante : si $(e_1 \ldots e_n)$ est un repère en $x \in M$ alors $\tilde{\varphi}((e_1,\ldots,e_n))$ est le repère $(d\varphi_x(e_1),\ldots,d\varphi_x(e_n))$ dans $T_{\varphi(x)}M_2$. $\tilde{\varphi}$ est un difféomorphisme de $B(M_1)$ et $B(M_2)$.

Définition 1.7.-

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux G-structures sur la variété M. Un isomorphisme de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ est un difféomorphisme φ de M_1 sur M_2 tel que $\tilde{\varphi}(\mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_2$. Si un tel isomorphisme φ existe, $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont dits isomorphes ; alors φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathcal{H}_2$ sur $\mathcal{H}_1$; si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, on dira que φ est un automorphisme de $\mathcal{H}_1$.

Soit U_1 un ouvert de M_1 ; on notera $\mathcal{H}_1|U_1$ la restriction de $\mathcal{H}_1$ à U_1 : c'est une G-structure sur U_1. Soit U_2 un ouvert de M_2 : un isomorphisme local de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ de U_1 et de tout U_2 est un isomorphisme de $\mathcal{H}_1|U_1$ et $\mathcal{H}_2|U_2$. On définit de même les automorphismes locaux d'une G-structure $\mathcal{H}$.

Définition 1.8.-

Une G-structure $\mathcal{H}$ est localement homogène si quels que soient x et y dans M, il existe un automorphisme local φ, défini au voisinage de x, tel que $\varphi(x) = y$.

Définition 1.9.-

Une G-structure $\mathcal{H}$ est transitive si quels que soient p et q dans $\mathcal{H}$ il existe un automorphisme φ local, défini au voisinage de $\pi(p)$, tel que $\tilde{\varphi}(p) = q$.

Exemples :

1°) Soit $G = O(n,\mathbb{R})$, M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes. Un difféomorphisme φ de M_1 sur M_2 est un isomorphisme de structure riemannienne si et seulement si $\delta\varphi(g_2) = g_1$ où g_1 et g_2 sont les métriques riemanniennes de M_1 et M_2 , c'est-à-dire si et seulement si φ est une isométrie.

En particulier, soit S^{n-1} la sphère

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

munie de la métrique riemannienne induite par $\mathbb{R}^n$: on démontre que ses automorphismes sont les restrictions à S^{n-1} des déplacements de $\mathbb{R}^n$ qui conservent l'origine fixe ; cette structure riemannienne est transitive.

2°) Soit $G = GL(n,\mathbb{C})$ considéré, (cf. 3., exemple 7), comme plongé dans $GL(2n,\mathbb{R})$. Un isomorphisme $\varphi : M_1 \to M_2$ est un difféomorphisme dont la différentielle $d\varphi_x$ en tout point est un isomorphisme des espaces vectoriels complexes de T_xM_1 sur T_xM_2.

Soient $x^1, \ldots, x^n$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$: alors $x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x$ fournit une section de $B(\mathbb{R}^n)$, ce qui permet d'identifier $B(\mathbb{R}^n)$ à $\mathbb{R}^n \times GL(n,\mathbb{R})$. Soit G un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$. Alors $\mathbb{R}^n \times G \subset \mathbb{R}^n \times GL(n,\mathbb{R}) \cong B(\mathbb{R}^n)$ est une G-structure sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Définition 1.10.-</u>

La G-structure $\mathbb{R}^n \times G$ sur $\mathbb{R}^n$ s'appelle la G-structure plate canonique de $\mathbb{R}^n$.

Les transformations affines de $\mathbb{R}^n$ dont les transformations linéaires associées appartiennent à G sont des automorphismes de cette G-structure ; donc elle est transitive.

<u>Définition 1.11.-</u>

Une G-structure sur une variété différentiable est dite intégrable (ou plate) si elle est localement isomorphe à la G-structure plate canonique de $\mathbb{R}^n$.

Toute G-structure intégrable est localement transitive car la G-structure plate canonique de $\mathbb{R}^n$ est transitive.

<u>Proposition 1.5.-</u>

Une G-structure $\mathcal{H}$ sur M est intégrable si et seulement si pour tout $x_0 \in M$, il existe une carte locale $(U, x^1, \ldots, x^n)$ de M telle que pour $x_0 \in U$, l'application

$$x \in U \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x$$

est une section de $\mathcal{H}$.

<u>Démonstration</u> :

Soit $\mathcal{H}$ une G-structure sur M, et supposons l'existence de cartes locales ayant les propriétés énoncées ci-dessus. Soit $(U, x^1, \ldots, x^n)$ l'une d'elles. Soit $\sigma : U \to \mathcal{H}$ la section $x \in U \to \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x \in \mathcal{H}$. L'application

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto (x^1, \ldots, x^n)$$

est un difféomorphisme de U sur un ouvert $U' \subset \mathbb{R}^n$. Elle induit un difféomorphisme de B(U) et B(U') par la formule

$$\tilde{\varphi} : (x, e_1, \ldots, e_n) \mapsto \left(\varphi(x), d\varphi_x(e_1), \ldots, d\varphi_x(e_n)\right)$$

où $x \in U$, $e_i \in T_xM$, $d\varphi_x$ désignant la différentielle de φ en x.

L'application

$$\sigma' = \tilde{\varphi}\sigma \overset{-1}{\varphi} : U' \to B(U')$$

est une section de $B(U')$, et $\sigma'(x) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi^n}\right)$, $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ étant le système de coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$. Par ailleurs, la fibre $\mathcal{H}_x$ de $\mathcal{H}$ au-dessus de x est l'ensemble $\sigma(x).G$; et comme tel, elle est envoyée par φ sur $\sigma'(x).G$. Soit alors ψ l'isomorphisme de $B(U')$ sur $U' \times GL(n,\mathbb{R})$ défini par

$$\psi(u, e_1, \ldots, e_n) = (u, (a_{ij}))$$

où $u \in U'$, $e_i \in T_xU'$ et $e_i = \sum_1^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^j}$. Il est clair que $\psi \circ \tilde{\varphi}$ induit un isomorphisme des G-structures $\mathcal{H}$ et $U' \times G$.

Réciproquement, supposons $\mathcal{H}$ intégrable. Quel que soit $x_o \in M$, on dispose d'un voisinage ouvert U de x_o et d'un difféomorphisme φ de U sur un ouvert $U' \subset \mathbb{R}^n$ qui, prolongé en un isomorphisme de $B(U)$ et $B(U')$ comme précédemment, induit un isomorphisme de la G-structure $\mathcal{H}$ restreinte à U et de la G-structure plate canonique sur $U' \subset \mathbb{R}^n$. Soient $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$. L'application

$$\sigma' : U' \to B(U')$$
$$x' \mapsto \left(x', \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi^n}\right)_{x'}\right)$$

est une section de la G-structure plate sur U'. Il s'ensuit que

$$\sigma = \tilde{\varphi}^{-1}\sigma'\tilde{\varphi} : U \to B(U)$$

est une section de $\mathcal{H}$. Or l'image de $x \in U$ par σ est le repère

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)_x$$

de T_xM, où $x^i = \varphi \circ \xi^i$ sont les coordonnées locales définies sur U par le difféomorphisme φ.

Exemples :

1°) Toute $GL(n,\mathbb{R})^+$-structure est intégrable.

2°) On démontre que toute $SL(n,\mathbb{R})$-structure est intégrable.

3°) Une $O(n,\mathbb{R})$-structure est intégrable si et seulement si pour tout $x_o \in M$, il existe une carte locale $(U, x^1, \ldots, x^n)$ au voisinage de x_o sur laquelle la métrique riemannienne est égale à

$$(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2$$

4°) La G-structure de l'exemple 6 du §3 est intégrable si et seulement si la distribution associée est intégrable.

5°) Une $GL(n,\mathbb{C})$-structure intégrable s'appelle une structure complexe sur M. On montre que la donnée d'une structure complexe sur M équivaut à la donnée d'un atlas sur M dont les changements de coordonnées sont des applications holomorphes entre ouverts de $\mathbb{C}^n$, identifié à $\mathbb{R}^{2n}$.