

# COURS DE L'INSTITUT FOURIER

A. MARTINS RODRIGUES

## Chapitre II Fibrés vectoriels. Jets

*Cours de l'institut Fourier*, tome 2 (1969), p. 19-37

[http://www.numdam.org/item?id=CIF\\_1969\\_\\_2\\_\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CIF_1969__2__19_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Chapitre II

FIBRÉS VECTORIELS. JETS.

1. DEFINITIONS.

Soit  $N$  une variété différentiable,  $M$  un ensemble quelconque et  $\pi$  une application de  $M$  dans  $N$ . Si  $b \in N$ , l'ensemble  $M_b = \pi^{-1}(b)$  s'appelle la fibre sur  $b$ .

Une carte vectorielle de dimension  $m$  sur  $M$  est un couple  $(U, \varphi)$  où  $U$  est un ouvert de  $N$  et  $\varphi$  une bijection de  $\pi^{-1}(U)$  sur  $U \times \mathbb{R}^m$  telle que  $\pi(\varphi^{-1}(b, h)) = b$ , quels que soient  $b \in U$  et  $h \in \mathbb{R}^m$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^m \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \\
 U & \xrightarrow{\text{id}} & U
 \end{array}$$

Soit  $t_b$  la bijection de  $\mathbb{R}^m$  sur  $M_b$  définie par  $t_b(h) = \varphi^{-1}(b, h)$ . Deux cartes vectorielles  $(U, \varphi)$  et  $(U', \varphi')$  sont compatibles s'il existe une application différentiable  $\lambda$  de  $U \cap U'$  dans  $GL(m, \mathbb{R})$  telle que pour tout  $b \in U \cap U'$

$$t_b = t'_b \circ \lambda(b).$$

Cette condition implique en particulier que les structures d'espace vectoriel transportées par  $t_b$  et  $t'_b$  sur la fibre  $M_b$  sont les mêmes.

Un atlas vectoriel sur  $M$  est un recouvrement de  $M$  par des cartes vectorielles deux à deux compatibles. Deux atlas vectoriels sont dits équivalents si leurs cartes sont deux à deux compatibles, ce qui revient à dire qu'en réunissant leurs cartes on obtient encore un atlas vectoriel. Une structure de fibré vectoriel sur  $M$  est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas vectoriels.

La variété  $N$  s'appelle la base,  $M$  s'appelle l'espace fibré,  $\pi$  s'appelle la projection. Soit  $U$  un ouvert de  $N$  ; une application  $\sigma$  de  $U$  dans  $M$  telle que  $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$  s'appelle une section du fibré au-dessus de  $U$ .

Soit  $b \in N$  ; on peut donner à la fibre  $M_b$  une structure unique d'espace vectoriel telle que toutes les applications  $t_b$ , correspondant à toutes les cartes vectorielles définies au voisinage de  $b$ , soient des isomorphismes de  $\mathbb{R}^m$  sur  $M_b$  ; en effet nous avons déjà remarqué que deux applications  $t_b$  et  $t'_b$  transportent sur  $M_b$  la même structure d'espace vectoriel.

En outre, on peut faire de  $M$  une variété différentiable. En effet soit  $(U, \psi)$  une carte sur la variété  $N$  ( $\psi$  est une bijection de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) et soit  $(U, \varphi)$  une carte vectorielle de  $M$  définie sur le même ouvert  $U$  ; soient  $x \in \pi^{-1}(U)$  et  $b = \pi(x) \in U$  ; posons :

$$\alpha(x) = (\psi(b), t_b^{-1}(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m ;$$

$\alpha$  est une bijection de  $\pi^{-1}(U)$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+m}$ , donc  $(\pi^{-1}(U), \alpha)$  est une carte sur  $M$ . Deux cartes sur  $M$  obtenues de cette façon sont compatibles, car au début de ce paragraphe nous avons exigé que les applications  $\lambda$  à valeur dans  $GL(m, \mathbb{R})$  soient différentiables. Il en résulte que  $M$  muni de ces cartes est une variété différentiable, et l'on voit tout de suite que la projection  $\pi$  est différentiable et partout de rang maximum (égal à la dimension de  $N$ ), que chaque fibre  $M_b$  est donc une sous-variété régulière de  $M$  (c'est-à-dire qu'elle porte la topologie induite par  $M$ ) et que toutes les applications  $t_b$  sont des difféomorphismes.

## 2. MORPHISMES DE FIBRÉS VECTORIELS.

Soient  $N$  et  $N'$  deux variétés différentiables et  $g$  une application différentiable de  $N$  dans  $N'$  ; soient  $M$  et  $M'$  deux fibrés vectoriels sur  $N$  et  $N'$  respectivement. Une application différentiable  $f$  de  $M$  dans  $M'$  est appelée un  $g$ -morphisme de fibrés vectoriels (ou tout simplement morphisme) si  $g \circ \pi = \pi' \circ f$ , et si pour tout  $b \in N$  la restriction de  $f$  aux fibres  $M_b$  et  $M'_{f(b)}$  est une application linéaire.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & M' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 N & \xrightarrow{g} & N'
 \end{array}$$

Soient maintenant  $M$  et  $M'$  deux fibrés vectoriels sur la même base  $N$  ; une application différentiable  $f$  de  $M$  dans  $M'$  est appelée un  $N$ -morphisme (ou morphisme) si elle est un  $\text{id}_N$ -morphisme.

## 3. FIBRÉS VECTORIELS TRIVIAUX.

Soit  $N$  une variété et  $V$  un espace vectoriel de dimension  $m$  sur  $\mathbb{R}$  ; on peut donc définir un isomorphisme  $\theta$  de  $V$  sur  $\mathbb{R}^m$ . Posons  $M = N \times V$  et soit  $\varphi$  l'application de  $M$  sur  $N \times \mathbb{R}^m$  définie par :

$$(b, v) \rightarrow (b, \theta(v)) ;$$

le couple  $(M, \varphi)$  est une carte vectorielle sur  $M$ , et elle définit une structure d'espace fibré vectoriel qui ne dépend pas du choix de  $\theta$ . Celui-ci est appelé le fibré vectoriel trivial de base  $N$  et de fibre  $V$ . La structure de variété de  $M$  est la structure de variété-produit.

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_m)$  une base de  $V$  ; les  $m$  sections  $\sigma_i$   
 $b \rightarrow (b, e_i)$

sont différentiables et en tout point  $b \in N$ ,  $\sigma_1(b), \sigma_2(b), \dots, \sigma_m(b)$  forment une base de la fibre  $M_b$ . Réciproquement, soit  $M$  un fibré vectoriel de base  $N$  ; s'il existe  $m$  sections différentiables  $\sigma_i$  définies sur tout  $N$  telles que pour tout  $b \in N$  leurs valeurs  $\sigma_i(b)$  forment une base de la fibre  $M_b$ , alors ce fibré  $M$  est isomorphe au fibré trivial  $M \times \mathbb{R}^m$ .

D'après la définition même de la structure d'espace fibré vectoriel, tout fibré vectoriel est localement isomorphe à un fibré trivial, car toute carte vectorielle  $(U, \varphi)$  détermine un isomorphisme du fibré vectoriel  $\pi^{-1}(U)$  de base  $U$  sur le fibré trivial  $U \times \mathbb{R}^m$ .

#### 4. OPERATIONS SUR LES FIBRÉS VECTORIELS.

On peut construire divers fibrés vectoriels à partir d'un ou plusieurs fibrés vectoriels ; par exemple si  $E$  et  $E'$  sont des fibrés vectoriels de même base  $N$ , on peut construire un fibré vectoriel  $E \otimes E'$  de base  $N$ , appelé leur produit tensoriel. En tant qu'ensemble,  $E \otimes E'$  est la réunion  $\bigcup_{b \in N} E_b \otimes E'_b$  ; la projection de  $E \otimes E'$  sur  $N$  se définit de façon évidente. Soient  $(U, \varphi)$  et  $(U, \varphi')$  des cartes vectorielles de  $E$  et  $E'$  sur le même ouvert  $U \subset N$  ; pour tout  $b \in U$  l'application  $t_b^{-1} \otimes t'_b^{-1}$  est un isomorphisme de  $E_b \otimes E'_b$  sur  $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m'}$ . Si  $a$  est un élément de  $E \otimes E'$  situé dans la fibre  $E_b \otimes E'_b$ , posons :

$$\psi(a) = \left( b, (t_b^{-1} \otimes t'_b^{-1})(a) \right) \in U \times (\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m'}) .$$

Le couple  $(U, \psi)$  est une carte vectorielle de  $E \otimes E'$  ; et toutes les cartes vectorielles obtenues de cette façon sont compatibles entre elles ; elles déterminent donc sur  $E \otimes E'$  une structure d'espace fibré vectoriel.

Par des procédés analogues, on peut construire le fibré dual  $E^*$  de  $E$ , la puissance extérieure  $\Lambda^p(E)$ , la somme directe  $E \oplus E'$ , etc...

## 5. SOUS-FIBRÉS VECTORIELS.

Soit  $(F, N, \pi_F)$ , ou tout simplement  $F$ , un fibré vectoriel de base  $N$ ; un fibré vectoriel  $(E, N, \pi_E)$  est appelé un sous-fibré vectoriel de  $F$  si :

- a)  $E$  est une sous-variété régulière de  $F$  et  $\pi_E = \pi_F|_E$ .
- b) chaque fibre  $E_b$  est un sous-espace vectoriel de  $F_b$ .

Soit maintenant  $E$  un sous-ensemble du fibré vectoriel  $F$ ; on pose  $\pi_E = \pi_F|_E$ ; on suppose que chaque fibre  $E_b = \pi_E^{-1}(b)$  est un sous-espace vectoriel de  $F_b$  et que pour tout point  $b \in N$  il existe des sections différentiables  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_l$  de  $F$  définies dans un voisinage  $V$  de  $b$ , dont les valeurs en tout point  $x \in V$  forment une base de  $E_x$ ; alors  $E$  est un sous-fibré vectoriel de  $F$ .

En effet dans un voisinage suffisamment petit  $U$  de  $b$  on peut encore trouver des sections différentiables  $\sigma_{l+1}, \dots, \sigma_m$  de  $F$  telles que en tout point  $x$  de ce voisinage, les valeurs  $\sigma_1(x), \dots, \sigma_l(x), \sigma_{l+1}(x), \dots, \sigma_m(x)$  forment une base de  $F_x$ .

Les sections différentiables  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  définies sur un voisinage  $U$  de  $b \in N$  déterminent une carte vectorielle  $(U, \psi)$  de  $F$ , car si  $y \in F_x$  (où  $x \in U$ ), on peut écrire  $y = \sum y^j \sigma_j(x)$ , et l'on posera  $\psi(y) = (x; \dots y^j \dots) \in U \times \mathbb{R}^m$ .

Si l'on appelle  $\varphi$  la restriction de  $\psi$  à  $\pi_E^{-1}(U)$ ,  $(U, \varphi)$  est une carte vectorielle de  $E$ : toutes les cartes vectorielles de  $E$  obtenues ainsi sont compatibles entre elles, car elles sont des restrictions de cartes locales de  $F$  et ces dernières sont compatibles entre elles.

Enfin on remarque que  $\varphi(\pi_E^{-1}(U))$  est une sous-variété régulière de  $\psi(\pi_F^{-1}(U))$ , et on en déduit que  $E$  est une sous-variété régulière de  $F$ . Donc  $E$  est un sous-fibré vectoriel de  $F$ .

### 6. NOYAU D'UN MORPHISME DE FIBRÉS VECTORIELS.

Soient  $E$  et  $E'$  deux fibrés vectoriels et  $f$  un morphisme du premier vers le second. La restriction de  $f$  aux fibres  $E_b$  et  $E'_{f(b)}$  est une application linéaire dont le noyau sera noté  $K_b$ ; le noyau de  $f$  est la réunion  $K$  des noyaux  $K_b$ .

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & E' \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\
 N & \xrightarrow{g} & N'
 \end{array}$$

Pour que  $K$  soit un sous-fibré vectoriel de  $E$ , il faut et il suffit que la dimension des noyaux  $K_b$  soit localement constante. En effet cette condition est manifestement nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que si elle est remplie, au voisinage de tout point  $b \in N$ , il existe des sections différentiables  $\sigma_1, \dots, \sigma_l$  de  $E$  telles que pour tout  $x$  assez voisin de  $b$ ,  $\sigma_1(x), \dots, \sigma_l(x)$  est une base de  $K_x$ . Or cela résulte de la propriété suivante que nous admettrons :

Soit  $\theta$  une application différentiable d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  dans l'espace  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m'})$  des applications linéaires de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^{m'}$ , telle que pour tout  $x \in \Omega$ , le noyau  $K_x$  de  $\theta(x)$  est de dimension  $l$  constante; quel que soit  $b \in \Omega$ , il existe  $l$  applications différentiables  $\sigma_1, \dots, \sigma_l$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^m$  telles que pour tout  $x$  assez voisin de  $b$ , les valeurs  $\sigma_1(x), \dots, \sigma_l(x)$  forment une base de  $K_x$ .

## 7. QUOTIENTS DE FIBRÉS VECTORIELS.

Soit  $F$  un fibré vectoriel de base  $N$ , et  $E$  un sous-fibré vectoriel de  $F$  ; on se propose de définir le fibré-quotient  $E/F$ . En tant qu'ensemble,  $E/F$  est la réunion  $\bigcup_{b \in N} E_b/F_b$  ; la projection  $\pi$  de  $E/F$  sur  $N$  et l'application canonique  $p$  de  $E$  sur  $E/F$  se définissent de façon évidente.

D'après ce qui a été signalé au §5, quel que soit  $b \in N$ , il existe des sections différentiables  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  de  $F$ , définies sur un voisinage ouvert  $U$  de  $b$ , telles que pour tout  $x \in U$ , les valeurs  $\sigma_1(x), \dots, \sigma_1(x)$  forment une base de  $E_x$  et les valeurs  $\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)$  une base de  $F_x$ . Les sections  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  permettent donc de construire une carte vectorielle  $(U, \psi)$  de  $F$  ; quant aux sections  $p \circ \sigma_{1+1}, \dots, p \circ \sigma_m$  de  $E/F$  elles permettent de construire une carte vectorielle  $(U, \chi)$  de  $E/F$ . Toutes les cartes vectorielles de  $E/F$  que l'on obtient de cette façon sont compatibles entre elles, car toutes les cartes vectorielles de  $E$  sont compatibles entre elles ; nous avons donc donné à  $E/F$  une structure de fibré vectoriel de base  $N$ . Il est clair que l'application  $p$  est différentiable et de rang maximum partout ; son noyau est  $E$ .

Il n'est maintenant plus difficile de montrer que si  $f$  est un morphisme du fibré vectoriel  $E$  vers le fibré vectoriel  $E'$ , et si son noyau  $K$  est un sous-fibré vectoriel de  $E$ , alors l'image de  $f$  est un sous-fibré vectoriel de  $E'$  isomorphe à  $E/K$ .

## 8. DEFINITION D'UN JET D'ORDRE $k$ .

Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentiables,  $x_0 \in M$  et  $y_0 \in N$ ,  $f$  et  $g$  deux applications différentiables définies au voisinage de  $x_0$ , à valeurs dans  $N$ , et telles que  $f(x_0) = g(x_0) = y_0$ . Soit  $k$  un entier positif ou nul. Nous nous donnons des cartes au voisinage de  $x_0$  et  $y_0$ , c'est-à-dire des coordonnées locales  $(x^i)$  et  $(y^j)$  définies sur des ouverts  $U$  et  $V$  contenant  $x_0$  et  $y_0$  respectivement. Les applications  $f$  et  $g$  sont



alors représentées par des systèmes de fonctions numériques  $f^j(x_1, \dots, x_m)$  et  $g^j(x_1, \dots, x_m)$  (où  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

On dit que les fonctions  $f$  et  $g$  sont équivalentes à l'ordre  $k$  au point  $x_0$  si les fonctions  $f^j$  et  $g^j$  ont mêmes dérivées partielles au point  $x_0$  jusqu'à l'ordre  $k$  inclus, pour tout  $j = 1, \dots, n$ .

Si l'on effectue un changement de coordonnées au voisinage de  $x_0$  et de  $y_0$ , les applications  $f$  et  $g$  sont représentées par de nouvelles fonctions de  $m$  variables :

$$\varphi^j(\xi_1, \dots, \xi_m) \text{ et } \psi^j(\xi_1, \dots, \xi_m).$$

Les dérivées partielles d'ordre  $\leq k$  de ces fonctions  $\varphi^j$  et  $\psi^j$  s'expriment en fonction des dérivées partielles d'ordre  $\leq k$  des fonctions  $f^j$  et  $g^j$  au moyen de polynômes.

Ceci montre que la propriété de  $f$  et  $g$  d'être équivalentes à l'ordre  $k$  au voisinage de  $x_0$  ne dépend pas des cartes choisies au voisinage de  $x_0$  et  $y_0$ .

Il est clair que nous venons de définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications différentiables  $f$  définies au voisinage de  $x_0$ , à valeurs dans  $N$  et telles que  $f(x_0) = y_0$ . Une classe d'équivalence s'appelle un jet d'ordre  $k$  de  $M$  dans  $N$ ; le point  $x_0$  s'appelle sa source, et le point  $y_0$  son but. L'ensemble des jets d'ordre  $k$  de  $M$  dans  $N$  sera noté  $J^k(M, N)$ . Si  $f$  est une application différentiable définie au voisinage de  $x$ , son jet d'ordre  $k$  au point  $x$  sera noté  $j_x^k f$ . Les applications qui à un jet  $X \in J^k(M, N)$  associent sa source et son but seront notées  $\alpha$  et  $\beta$ ; ces applications sont définies sur  $J^k(M, N)$  et prennent leurs valeurs dans  $M$  et  $N$  respectivement. On notera par  $\alpha \times \beta$  ( $J^k(M, N) \rightarrow M \times N$ ) l'application qui à  $X$  fait correspondre le point  $(\alpha(X), \beta(X))$ .

Soit  $f$  une application différentiable définie sur un ouvert  $U \subset M$  et à valeurs dans  $N$ . Le symbole  $j_x^k f$  représente l'application qui à tout  $x \in U$  associe le jet  $j_x^k f$ . On peut donc écrire :  $\alpha \circ j^k f = \text{id}_U$ ,  $\beta \circ j^k f = f$ .

Nous allons encore introduire la notation suivante. Soit  $X$  un jet d'ordre  $k$  de source  $x_0$  et de but  $y_0$ ; nous nous sommes donné des coordonnées locales au voisinage de ces points. Soit  $I$  une suite d'indices entiers, positifs ou nuls,  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ , telle que  $1 \leq i_1 + i_2 + \dots + i_m \leq k$ . Pour tout  $j = 1, 2, \dots, n$ , on pose :

$$p_I^j(X) = \left( \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_m} f^j}{(\partial x^1)^{i_1} (\partial x^2)^{i_2} \dots (\partial x^m)^{i_m}} \right)_{x_0}^f .$$

Dans cette formule,  $f$  représente n'importe quelle fonction telle que  $j_{x_0}^k f = X$ . On remarque que le jet  $X$  est déterminé par sa source  $x_0$ , son but  $y_0$ , et tous les nombres  $p_I^j X$ . Ces derniers peuvent prendre des valeurs arbitraires, c'est-à-dire que si  $r$  est le nombre des applications  $p_I^j$  (lorsque  $j$  et  $I$  varient), alors tout point de  $\mathbb{R}^r$  détermine un jet et un seul de source  $x_0$  et de but  $y_0$ .

## 9. STRUCTURE DE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE SUR $J^k(M, N)$ .

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $M$  et  $N$  respectivement, et  $r(U \rightarrow \mathbb{R}^m)$  et  $s(V \rightarrow \mathbb{R}^n)$  deux cartes locales définies sur  $U$  et  $V$ . Posons

$$W_{U, V}^k = (\alpha \times \beta)^{-1}(U \times V) ,$$

c'est l'ensemble des jets dont la source est dans  $U$  et le but dans  $V$ . D'après ce qui précède, il existe une bijection de  $W_{U, V}^k$  sur  $r(U) \times s(V) \times \mathbb{R}^r$ ; cette bijection associe au jet  $X \in W_{U, V}^k$  l'élément

$$(r(\alpha(X)), s(\beta(X)) ; \dots, p_I^j(X), \dots) \in r(U) \times s(V) \times \mathbb{R}^r ,$$

et elle définit donc une carte locale de  $J^k(M, N)$ .

Il est manifeste que toutes les cartes locales de  $J^k(M, N)$  que l'on obtient de cette façon sont compatibles deux à deux ;  $J^k(M, N)$  est donc une variété différentiable.

Il est clair que les applications  $\alpha$  et  $\beta$  sont différentiables. En outre si  $f$  est une application différentiable de  $M$  dans  $N$ , il est clair que  $j_x^k f$  (qui à  $x \in M$  associe  $j_x^k f$ ) est aussi une application différentiable.

Si  $h \geq k$ , il existe une surjection canonique  $\rho_k^h$  de  $J^h(M, N)$  sur  $J^k(M, N)$ , car si deux applications sont équivalentes à l'ordre  $h$  au voisinage de  $x_0$ , à fortiori elles sont équivalentes à l'ordre  $k$ . On remarque que :

$$\rho_1^k \rho_k^h = \rho_1^h \quad \text{si } h \geq k \geq 1 .$$

Toutes ces applications  $\rho_k^h$  sont différentiables.

## 10. COMPOSITION DES JETS.

Soient  $M$ ,  $N$  et  $P$  trois variétés différentiables, soient  $x_0 \in M$ ,  $y_0 \in N$  et  $z_0 \in P$  ; soient  $f_1$  et  $f_2$  deux applications différentiables de  $M$  dans  $N$  telles que  $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$ , et soient enfin  $g_1$  et  $g_2$  deux applications différentiables de  $N$  dans  $P$  telles que  $g_1(y_0) = g_2(y_0) = z_0$ . Si  $f_1$  et  $f_2$  sont équivalentes à l'ordre  $k$  au point  $x_0$ , et si  $g_1$  et  $g_2$  sont équivalentes à l'ordre  $k$  au point  $y_0$ , alors  $g_1 \circ f_1$  et  $g_2 \circ f_2$  sont aussi équivalentes à l'ordre  $k$  au point  $x_0$ . Ceci nous permet de définir une loi de composition qui à tout  $X \in J^k(M, N)$  et à tout  $Y \in J^k(N, P)$  tels que  $\beta(X) = \alpha(Y)$ , associe un élément de  $J^k(M, P)$  que l'on notera  $YX$  ; cet élément  $YX$  est défini de la façon suivante :

Si  $X = j_x^k f$  et si  $Y = j_y^k g$ , alors  $YX = j_x^k(gf)$ .

Cette loi de composition vérifie les propriétés suivantes :

1) Si les produits  $YX$  et  $ZY$  sont définis, c'est-à-dire si  $\beta(X) = \alpha(Y)$  et  $\beta(Y) = \alpha(Z)$ , alors les produits  $(ZY)X$  et  $Z(YX)$  sont définis et sont égaux.

2) Si nous notons  $I_x^k$  le jet à l'ordre  $k$  et au point  $x$  de l'application identique de la variété différentiable dont  $x$  est un point, nous avons les identités suivantes :

$$XI_{\alpha(X)}^k = X ,$$

$$I_{\beta(X)}^k X = X$$

3) Si  $k \geq 1$  et si  $X$  et  $Y$  sont des jets d'ordre  $k$  tels que le produit  $YX$  est défini, alors

$$\rho_1^k(YX) = \rho_1^k(Y) \rho_1^k(X) .$$

Un jet  $X \in J^k(M, N)$  sera dit inversible s'il existe un jet  $Y \in J^k(M, N)$  tel que

$$YX = I_{\alpha(X)}^k \quad \text{et} \quad XY = I_{\beta(X)}^k .$$

Le jet  $Y$  s'appelle l'inverse de  $X$ , et l'on voit tout de suite que si  $X$  est inversible, le jet inverse est unique.

Supposons  $k \geq 1$ , et soit  $f$  une application différentiable définie sur un ouvert de  $M$ , à valeur dans  $N$ , telle que  $X = j_x^k f$ ; si  $X$  est inversible, à fortiori  $\rho_1^k(X)$  est inversible, et ceci implique que la matrice jacobienne de  $f$  au point  $x$  est inversible; donc  $f$  définit un difféomorphisme d'un voisinage de  $x$  sur un voisinage de  $y = f(x)$ .

Réciproquement, si  $f$  est un difféomorphisme d'un voisinage de  $x$  sur un voisinage de  $y$ , et si  $X = j_x^k f$ , alors  $X$  est inversible; car  $f$  admet une application réciproque  $g$ , et si on pose  $Y = j_y^k g$ , on a :

$$YX = I_x^k , \quad XY = I_y^k .$$

Nous pouvons donc énoncer que pour  $k \geq 1$  les 4 assertions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $X$  est un jet inversible.
- 2) le jet  $\rho_1^k(X)$  est inversible.
- 3)  $X$  est le jet d'un difféomorphisme local.
- 4) toute application différentiable  $f$  telle que  $X = j_x^k f$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $x$ .

#### 11. JETS D'ORDRE INFINI.

Pour définir les jets d'ordre infini, nous reprenons les notations du paragraphe 8, et nous disons que les fonctions  $f$  et  $g$  sont équivalentes à l'ordre infini au voisinage de  $x_0$  si les fonctions  $f^j$  et  $g^j$  ont mêmes dérivées partielles de tout ordre au point  $x_0$ .

Les classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence seront appelées des jets d'ordre infini.

Les notations  $j_x^\infty f$ ,  $J^\infty(M, N)$ ,  $\alpha(X)$ ,  $\beta(X)$ ,  $\rho_k^\infty$ ,  $I_x^\infty$ , se définissent de façon analogue.

#### 12. JETS DES SECTIONS D'UN FIBRÉ VECTORIEL.

Soit  $E$  un fibré vectoriel sur une variété  $N$  et soit  $J_k E$  l'ensemble des jets d'ordre  $k$  des sections locales de  $N$  dans  $E$  (toutes les sections considérées sont supposées différentiables). Nous nous proposons de donner à  $J_k E$  une structure de fibré vectoriel sur  $E$ . La projection de  $J_k E$  sur  $N$  est évidemment l'application qui à un jet  $X \in J_k E$  associe sa source  $x = \alpha(X) = \pi(\beta(X))$ .

Chaque fibre de  $J_k E$  est munie d'une structure d'espace vectoriel. En effet soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux sections définies au voisinage de  $x \in N$ , et soit  $\lambda$  un nombre réel ; supposons que  $\sigma$  et  $\tau$  soient respectivement équivalentes à  $\sigma'$  et  $\tau'$  à l'ordre  $k$  au voisinage de  $x$  ; alors  $\sigma + \tau$  et  $\lambda\sigma$  sont respectivement équivalentes à  $\sigma' + \tau'$  et  $\lambda\sigma'$ . Par conséquent si  $X = j_x^k \sigma$  et  $Y = j_x^k \tau$ , on posera :

$$X+Y = j_x^k(\sigma+\tau) \quad \text{et} \quad \lambda X = j_x^k(\lambda\sigma) .$$

Soit  $(U, \psi)$  une carte locale de  $N$  sur laquelle on dispose d'une carte vectorielle  $(U, \varphi)$ . Un élément  $x \in U$  est déterminé par ses coordonnées  $x^i$  :  $(x^i) = \psi(x) \in \mathbb{R}^n$ . Un élément  $y \in \pi^{-1}(U)$  est déterminé par sa projection  $x = \pi(y)$  et par ses composantes  $y^j$  :  $(y^j) = \varphi(y) \in \mathbb{R}^m$ . Soit  $X$  un jet  $\in J_k E$  de source  $x$  et de but  $y$ , et soit  $\sigma$  une section définie au voisinage de  $x$  telle que  $X = j_x^k \sigma$ . Cette section est déterminée par  $m$  fonctions  $f^j$  de  $n$  variables :

$$y^j = f^j(x^1, \dots, x^n) .$$

Soit  $I$  une suite d'indices entiers, positifs ou nuls,  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , telle que  $1 \leq i_1+i_2+\dots+i_n \leq k$ . Pour tout  $j = 1, 2, \dots, m$ , on pose :

$$p_I^j(X) = \left( \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n} f^j}{(\partial x^1)^{i_1} (\partial x^2)^{i_2} \dots (\partial x^n)^{i_n}} \right)_{x_0} .$$

On remarque que  $p_I^j(X)$  ne dépend pas du choix de la section  $\sigma$  telle que  $X = j_x^k \sigma$ . Manifestement on a :

$$p_I^j(X+Y) = p_I^j(X) + p_I^j(Y)$$

$$p_I^j(\lambda X) = \lambda p_I^j(X) \quad \text{si} \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Soit  $r$  le nombre des applications  $p_I^j$  ; l'application qui à un jet  $X$  appartenant à la fibre  $(J_k E)_x$  associe la suite de nombres  $(\dots, y^j, \dots; \dots, p_I^j(X), \dots) \in \mathbb{R}^{m+r}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En outre l'application  $\phi_k$  qui à un jet  $X \in \alpha^{-1}(U)$  associe le point de  $\mathbb{R}^{n+m+r}$  déterminé par les  $n$  coordonnées  $x^i(\alpha(X))$ , les  $m$  coordonnées  $y^j(\beta(X))$  et les  $r$  nombres  $p_I^j(X)$ , est une carte vectorielle sur  $J_k E$ . On montre sans difficulté que toutes les cartes vectorielles obtenues de cette façon sont compatibles deux à deux.

Nous avons donc mis sur  $J_k E$  une structure de fibré vectoriel qui induit sur les fibres les structures d'espace vectoriel définies plus haut. Comme au §9, on peut affirmer que les applications  $\alpha, \beta, j^k \sigma$  (où  $\sigma$  est une section différentiable et  $\rho_k^h$  sont différentiables.

### 13. FIBRE VECTORIEL DEDUIT D'UN FIBRÉ PRINCIPAL.

Soit  $(P, M, \pi, G)$  un fibré principal différentiable de base  $M$  et de groupe structural  $G$ . Soient  $TM$  et  $TP$  les fibrés vectoriels tangents à  $M$  et à  $P$ . L'application canonique de  $TP$  sur  $TM$  sera notée  $d\pi$ . Soit  $R_g$  la translation à droite dans  $P$  définie par l'élément  $g \in G$  et soit  $dR_g$  son extension au fibré tangent  $TP$ . Un champ de vecteurs sur  $P$  sera dit invariant à droite si toutes les applications  $dR_g$  (où  $g \in G$ ) le laissent invariant. Soit  $z \in P$  un point quelconque, souvent on notera  $R_g(z)$  par  $zg$ .

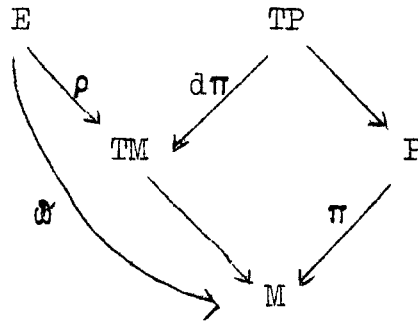
Soit  $E$  la variété quotient de  $TP$  par la relation d'équivalence suivante : deux éléments  $v_1$  et  $v_2$  de  $TP$  sont équivalents s'il existe  $g \in G$  tel que  $dR_g(v_1) = v_2$ . Cette variété  $E$  peut recevoir une structure d'espace fibré vectoriel sur  $M$  de façon évidente ; la projection de  $E$  sur  $M$  sera notée  $\tilde{\omega}$ . La fibre  $E_x$  au-dessus d'un point  $x \in M$  est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à droite définis sur la fibre  $P_x$ . C'est  $E$  que l'on appellera le fibré vectoriel déduit de  $P$ .

Si  $v \in TP$  et si  $g \in G$ , on a la relation :

$$d\pi \circ dRg(v) = d\pi(v) ;$$

cette relation montre qu'il existe un morphisme surjectif  $\rho$  de fibrés vectoriels de  $E$  sur  $TM$ .

La projection  $\tilde{\omega}$  n'est autre que le produit de  $\rho$  et de la projection de  $TM$  sur  $M$ .



Soit  $x \in M$  et  $z \in P_x$  ; il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels de  $E_x$  sur  $T_z P$ , espace tangent à  $P$  au point  $z$  ; il sera noté  $\lambda_z$ . Il vérifie la relation  $d\pi \circ \lambda_z = \rho$ , et si  $g \in G$ , on a :

$$(II, 1) \quad \lambda_{zg} = dRg \circ \lambda_z .$$

Soit  $U$  un ouvert de  $M$  et  $E(U)$  le module des sections (différentiables) de  $E$  définies sur  $U$  (il s'agit d'un module sur l'anneau des fonctions différentiables réelles). On peut définir un isomorphisme  $\lambda$  de ce module  $E(U)$  sur le module des champs de vecteurs invariants à droite définis sur  $\pi^{-1}(U)$ . Pour toute section  $\sigma \in E(U)$ ,  $\lambda(\sigma)$  est un champ de vecteurs projetable par  $\pi$ , et  $d\pi(\lambda(\sigma)) = \rho \circ \sigma$ .

Le crochet de deux champs de vecteurs invariants à droite et définis sur  $\pi^{-1}(U)$  est encore invariant à droite, et cela nous permet de munir  $E(U)$  d'une structure d'algèbre de Lie (de dimension infinie) sur le corps des réels : si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 \in E(U)$ , on pose  $[\sigma_1, \sigma_2] = \lambda^{-1}([\lambda\sigma_1, \lambda\sigma_2])$ . On vérifie



aussitôt les deux formules suivantes, où  $f$  représente une fonction (différentiable) réelle définie dans  $U$  et  $(\rho\sigma_1)f$  la dérivée de  $f$  par rapport au champ de vecteurs  $\rho \circ \sigma_1$  :

$$(II,2) \quad \rho([\sigma_1, \sigma_2]) = [\rho\sigma_1, \rho\sigma_2]$$

$$(II,3) \quad [\sigma_1, f\sigma_2] = f[\sigma_1, \sigma_2] + (\rho\sigma)f \cdot \sigma_2$$

Désignons par  $E^0$  le noyau du morphisme  $\rho : E \rightarrow TM$  ;  $E^0$  est un sous-fibré vectoriel (différentiable) de  $E$  et chaque fibre  $E^0_x$  est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents à  $P_x$  et invariants à droite ; ceux-ci forment une algèbre de Lie (de dimension finie), donc  $E^0_x$  a de façon naturelle une structure d'algèbre de Lie.

Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux éléments de  $E^0(U)$ , c'est-à-dire deux sections de  $E$  définies sur  $U$  et à valeurs dans  $E^0$  ; si  $x \in U$ , on peut écrire :

$$(II,4) \quad [\sigma_1, \sigma_2](x) = [\sigma_1(x), \sigma_2(x)] ;$$

dans le premier membre figure le crochet de deux éléments de  $E(U)$  dont on prend la valeur en  $x$ , et dans le second figure le crochet de deux éléments de  $E^0_x$ .

#### 14. SOUS-FIBRÉ VECTORIEL DEDUIT D'UN SOUS-FIBRÉ PRINCIPAL.

Soit  $(P', M, \pi', G')$  un sous-fibré principal de  $(P, M, \pi, G)$ . On voit tout de suite qu'il existe un morphisme injectif  $\eta$  du fibré vectoriel  $E'$  déduit de  $P'$  dans le fibré vectoriel  $E$  déduit de  $P$  ; ce morphisme  $\eta$  est tel que  $\rho' = \rho \circ \eta$ . Nous identifierons  $E'$  avec son image par  $\eta$  ; après cette identification,  $E'$  est un sous-fibré vectoriel (différentiable) de  $E$ , et pour tout  $x \in M$ ,  $E'^0_x$  est une sous-algèbre de Lie de  $E^0_x$  ; en outre  $\rho'$  est la restriction de  $\rho$  à  $E'$ . Nous appellerons  $E'$  le sous-fibré vectoriel déduit du sous-fibré principal  $P'$ .

Le morphisme  $\rho' (E' \rightarrow TM)$  est surjectif, tout comme  $\rho$  lui-même. Par ailleurs si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 \in E'(U)$ , c'est-à-dire si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des sections de  $E$  définies sur  $U$  et à valeurs dans  $E'$ , alors  $[\sigma_1, \sigma_2]$  est encore un élément de  $E'(U)$ . Nous verrons bientôt que ces deux propriétés caractérisent les sous-fibrés vectoriels de  $E$  qui peuvent être déduits d'un sous-fibré principal de  $P$ ; mais nous devons d'abord donner la définition suivante :

Deux sous-fibrés principaux  $P'$  et  $P''$  de  $P$  sont dits équivalents s'il existe un élément  $g \in G$  tel que  $P'' = P'g$  (c'est-à-dire  $P'' = R_g(P')$ ). On voit tout de suite que si  $P'$  et  $P''$  sont équivalents, les sous-fibrés vectoriels qui en sont déduits sont identiques.

En outre, soient  $G'$  et  $G''$  les groupes structuraux de  $P'$  et  $P''$ ; si  $P'' = P'g$ , alors  $G'' = g^{-1}G'g$ . Pour s'en rendre compte, il suffit de se rappeler que  $G'$  (resp.  $G''$ ) est l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $P'g = P'$  (resp.  $P''g = P''$ ), car les groupes structuraux opèrent de façon simplement transitive dans chaque fibre de leur espace fibré principal.

### Théorème II.1.-

Soit  $M$  une variété différentiable connexe,  $(P, M, \pi, G)$  un fibré principal de base  $M$ , et  $E$  le fibré vectoriel associé à  $P$ . Soit  $E'$  un sous-fibré vectoriel différentiable de  $E$  vérifiant les deux conditions suivantes :

1) Le morphisme  $\rho' : E' \rightarrow TM$  (restriction de  $\rho$  à  $E'$ ) est surjectif.

2) Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2 \in E'(U)$ , c'est-à-dire si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux sections de  $E$  à valeurs dans  $E'$ , alors  $[\sigma_1, \sigma_2]$  est encore un élément de  $E'(U)$ , et cela quel que soit l'ouvert  $U \subset M$ .

Il existe alors un sous-fibré principal connexe  $P'$  (connexe en tant que sous-variété de  $P$ ), dont le sous-fibré vectoriel déduit est  $E'$ .

En outre, deux sous-fibrés principaux connexes de  $P$  qui ont  $E'$  pour fibré vectoriel déduit, sont équivalents.

Démonstration :

Soit  $\mathfrak{D}$  la distribution différentiable sur  $P$  qui à chaque  $z \in P$  associe le sous-espace vectoriel  $\lambda_z(E'_{\pi(z)})$  de  $T_z P$ . La condition 2) implique que  $\mathfrak{D}$  est complètement intégrable ; soit  $P'$  une variété intégrale maximale de  $\mathfrak{D}$ . La condition 1) entraîne que, pour tout  $z \in P'$ , l'application  $d\pi : T_z P' \rightarrow T_{\pi(z)} M$ , est surjective ; donc  $\pi(P')$  est un ouvert de  $M$ .

Si  $P''$  est une autre variété intégrale maximale de  $\mathfrak{D}$ ,  $\pi(P')$  et  $\pi(P'')$  sont ou bien identiques ou bien disjoints ; en effet soit  $x \in \pi(P') \cap \pi(P'')$  ; on peut trouver  $z' \in P'_x$ ,  $z'' \in P''_x$  et  $g \in G$  tels que  $z'' = z'g$  ; comme la distribution  $\mathfrak{D}$  est invariante à droite par l'action de  $G$  dans  $P$ ,  $P'g$  est aussi une variété intégrale maximale de  $\mathfrak{D}$  ; puisque  $P''$  et  $P'g$  contiennent  $z''$ , nécessairement  $P'' = P'g$  ; donc  $\pi(P') = \pi(P'')$ .

L'ensemble des ouverts  $\pi(P')$ , où  $P'$  parcourt l'ensemble des variétés intégrales maximales de  $\mathfrak{D}$ , est une partition de  $M$  ; puisque  $M$  est connexe,  $\pi(P') = M$ .

La variété intégrale maximale  $P'$  étant choisie, soit  $G'$  l'ensemble des éléments  $g \in G$  tels que  $P'g = P'$  ;  $G'$  est un sous-groupe de  $G$ . Etant donné  $z_0 \in P'$ , si  $g \in G$  est tel que  $z_0 g \in P'$ , alors  $g \in G'$ . Nous allons montrer que  $G'$  est un sous-groupe de Lie de  $G$ .

Soit  $E'^0$  le noyau du morphisme  $\rho' : E' \rightarrow TM$ . La condition 2) et la formule (II,4) impliquent que si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont deux sections de  $E$  à valeurs dans  $E'^0$ , alors  $[\sigma_1, \sigma_2]$  est aussi à valeurs dans  $E'^0$ . En particulier  $E'^0_x$  est une sous-algèbre de Lie de  $E^0_x$ .

Il en résulte que la distribution  $\mathfrak{D}'$  sur  $P$  qui à chaque  $z \in P$  associe le sous-espace vectoriel  $\lambda_z(E' \circ \pi(z))$  de  $T_z P$ , est complètement intégrable, et chaque variété intégrale maximale de  $\mathfrak{D}'$  est contenue dans une variété intégrale maximale de  $\mathfrak{D}$ . Plus précisément, chaque fibre  $P'_x$  de  $P'$  est une réunion de variétés intégrales maximales de  $\mathfrak{D}'$ . Choisissons  $z_0 \in P'_x$ , et soit  $\mathfrak{g} : G \rightarrow P_x$  l'application définie par :  $\mathfrak{g}(g) = z_0 g$  ; il est clair que  $\mathfrak{g}(G') = P'_x$ . Soit  $\mathfrak{D}''$  la distribution sur  $G$ , image réciproque par  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{D}'$  restreinte à  $P_x$  ;  $\mathfrak{D}''$  est invariante à droite et  $G'$  est une réunion de variétés intégrales maximales de  $\mathfrak{D}''$  ; donc  $G'$  est un sous-groupe de Lie de  $G$ .

Nous pouvons donc affirmer que  $P'$  est un sous-fibré principal connexe de  $P$ , de groupe structural  $G'$  ; son fibré vectoriel déduit est  $E'$ .

Il ne nous reste plus qu'à montrer que si  $P'''$  est un sous-fibré principal de  $P$  dont le fibré vectoriel associé est  $E$ , et si  $P'''$  est connexe, alors il existe  $g \in G$  tel que  $P''' = P'g$ . En effet puisque  $P'''$  est une variété intégrale de  $\mathfrak{D}$ , c'est un ouvert d'une variété intégrale maximale  $P''$ . D'après ce qui précède,  $P''$  est un sous-fibré principal de  $P$  ; soit  $G''$  son groupe structural. L'ensemble des ouverts  $P'''g$ , où  $g$  parcourt  $G''$ , est une partition de  $P''$ , et puisque  $P''$  est connexe, nécessairement  $P''' = P''$ . Or nous avons démontré plus haut qu'il existe  $g \in G$  tel que  $P'' = P'g$ .