COURS DE L'INSTITUT FOURIER

A. MARTINS RODRIGUES

Chapitre II Fibrés vectoriels. Jets

Cours de l'institut Fourier, tome 2 (1969), p. 19-37
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1969__2__19_0>

Chapitre II

FIBRÉS VECTORIELS. JETS.

1. DEFINITIONS.

Soit N une variété différentiable, M un ensemble quelconque et π une application de M dans N. Si $b \in N$, l'ensemble $M_b = \pi^{-1}(b)$ s'appelle la fibre sur b.

Une carte vectorielle de dimension m sur M est un couple (U, φ) où U est un ouvert de N et φ une bijection de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times \mathbb{R}^m$ telle que $\pi(\varphi^{-1}(b,h)) = b$, quels que soient $b \in N$ et $h \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[d] \\ U \arrow[r, "id"] & U \end{tikzcd}$$

Soit t_b la bijection de $\mathbb{R}^m$ sur M_b définie par $t_b(h) = \varphi^{-1}(b,h)$. Deux cartes vectorielles (U, φ) et (U', φ') sont compatibles s'il existe une application différentiable λ de $U \cap U'$ dans $GL(m,\mathbb{R})$ telle que pour tout $b \in U \cap U'$
$t_b = t'_b \circ \lambda(b)$.
Cette condition implique en particulier que les structures d'espace vectoriel transportées par t_b et t'_b sur la fibre M_b sont les mêmes.

Un atlas vectoriel sur M est un recouvrement de M par des cartes vectorielles deux à deux compatibles. Deux atlas vectoriels sont dits équivalents si leurs cartes sont deux à deux compatibles, ce qui revient à dire qu'en réunissant leurs cartes on obtient encore un atlas vectoriel. Une structure de fibré vectoriel sur M est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas vectoriels.

La variété N s'appelle la base, M s'appelle l'espace fibré, π s'appelle la projection. Soit U un ouvert de N ; une application σ de U dans M telle que $\pi \circ \sigma = id_U$ s'appelle une section du fibré au-dessus de U.

Soit $b \in N$; on peut donner à la fibre M_b une structure unique d'espace vectoriel telle que toutes les applications t_b, correspondant à toutes les cartes vectorielles définies au voisinage de b, soient des isomorphismes de $\mathbb{R}^m$ sur M_b ; en effet nous avons déjà remarqué que deux applications t_b et t'_b transportent sur M_b la même structure d'espace vectoriel.

En outre, on peut faire de M une variété différentiable. En effet soit (U, ψ) une carte sur la variété N (ψ est une bijection de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$) et soit (U, φ) une carte vectorielle de M définie sur le même ouvert U ; soient $x \in \pi^{-1}(U)$ et $b = \pi(x) \in U$; posons :

$$\alpha(x) = \left(\psi(b),\ t_b^{-1}(x)\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ ;$$

α est une bijection de $\pi^{-1}(U)$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$, donc $(\pi^{-1}(U), \alpha)$ est une carte sur M. Deux cartes sur M obtenues de cette façon sont compatibles, car au début de ce paragraphe nous avons exigé que les applications λ à valeur dans $GL(m,\mathbb{R})$ soient différentiables. Il en résulte que M muni de ces cartes est une variété différentiable, et l'on voit tout de suite que la projection π est différentiable et partout de rang maximum (égal à la dimension de N), que chaque fibre M_b est donc une sous-variété régulière de M (c'est-à-dire qu'elle porte la topologie induite par M) et que toutes les applications t_b sont des difféomorphismes.

2. MORPHISMES DE FIBRÉS VECTORIELS.

Soient N et N' deux variétés différentiables et g une application différentiable de N dans N' ; soient M et M' deux fibrés vectoriels sur N et N' respectivement. Une application différentiable f de M dans M' est appelée un g-morphisme de fibrés vectoriels (ou tout simplement morphisme) si $g \circ \pi = \pi' \circ f$, et si pour tout $b \in N$ la restriction de f aux fibres M_b et $M'_{f(b)}$ est une application linéaire.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & M' \arrow[d, "\pi'"] \\ N \arrow[r, "g"] & N' \end{tikzcd}$$

Soient maintenant M et M' deux fibrés vectoriels sur la même base N ; une application différentiable f de M dans M' est appelée un N-morphisme (ou morphisme) si elle est un id_N-morphisme.

3. FIBRÉS VECTORIELS TRIVIAUX.

Soit N une variété et V un espace vectoriel de dimension m sur $\mathbb{R}$; on peut donc définir un isomorphisme θ de V sur $\mathbb{R}^m$. Posons $M = N \times V$ et soit φ l'application de M sur $N \times \mathbb{R}^m$ définie par :

$$(b, v) \to (b, \theta(v)) \ ;$$

le couple (M, φ) est une carte vectorielle sur M, et elle définit une structure d'espace fibré vectoriel qui ne dépend pas du choix de θ. Celui-ci est appelé le fibré vectoriel trivial de base N et de fibre V. La structure de variété de M est la structure de variété-produit.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ une base de V ; les m sections σ_i

$$b \to (b, e_i)$$

sont différentiables et en tout point $b \in N$, $\sigma_1(b), \sigma_2(b), \ldots$ $\sigma_m(b)$ forment une base de la fibre M_b. Réciproquement, soit M un fibré vectoriel de base N ; s'il existe m sections différentiables σ_i définies sur tout N telles que pour tout $b \in N$ leurs valeurs $\sigma_i(b)$ forment une base de la fibre M_b , alors ce fibré M est isomorphe au fibré trivial $M \times \mathbb{R}^m$.

D'après la définition même de la structure d'espace fibré vectoriel, tout fibré vectoriel est localement isomorphe à un fibré trivial, car toute carte vectorielle (U, φ) détermine un isomorphisme du fibré vectoriel $\pi^{-1}(U)$ de base U sur le fibré trivial $U \times \mathbb{R}^m$.

4. OPERATIONS SUR LES FIBRÉS VECTORIELS.

On peut construire divers fibrés vectoriels à partir d'un ou plusieurs fibrés vectoriels ; par exemple si E et E' sont des fibrés vectoriels de même base N, on peut construire un fibré vectoriel $E \otimes E'$ de base N, appelé leur produit tensoriel. En tant qu'ensemble, $E \otimes E'$ est la réunion $\bigcup_{b \in N} E_b \otimes E'_b$; la projection de $E \otimes E'$ sur N se définit de façon évidente. Soient (U, φ) et (U, φ') des cartes vectorielles de E et E' sur le même ouvert $U \subset N$; pour tout $b \in U$ l'application $t_b^{-1} \otimes t'^{-1}_b$ est un isomorphisme de $E_b \otimes E'_b$ sur $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m'}$. Si a est un élément de $E \otimes E'$ situé dans la fibre $E_b \otimes E'_b$, posons :

$$\psi(a) = \left(b, (t_b^{-1} \otimes t'^{-1}_b)(a)\right) \in U \times (\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{m'}) .$$

Le couple (U, ψ) est une carte vectorielle de $E \otimes E'$; et toutes les cartes vectorielles obtenues de cette façon sont compatibles entre elles ; elles déterminent donc sur $E \otimes E'$ une structure d'espace fibré vectoriel.

Par des procédés analogues, on peut construire le fibré dual E^* de E, la puissance extérieure $\Lambda^p(E)$, la somme directe $E \oplus E'$, etc...

5. SOUS-FIBRÉS VECTORIELS.

Soit (F, N, π_F) , ou tout simplement F, un fibré vectoriel de base N ; un fibré vectoriel (E, N, π_E) est appelé un sous-fibré vectoriel de F si :

a) E est une sous-variété régulière de F et $\pi_E = \pi_F|E$.

b) chaque fibre E_b est un sous-espace vectoriel de F_b.

Soit maintenant E un sous-ensemble du fibré vectoriel F ; on pose $\pi_E = \pi_F|E$; on suppose que chaque fibre $E_b = \pi_E^{-1}(b)$ est un sous-espace vectoriel de F_b et que pour tout point $b \in N$ il existe des sections différentiables $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ de F définies dans un voisinage V de b, dont les valeurs en tout point $x \in V$ forment une base de E_x ; alors E est un sous-fibré vectoriel de F.

En effet dans un voisinage suffisamment petit U de b on peut encore trouver des sections différentiables $\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_m$ de F telles que en tout point x de ce voisinage, les valeurs $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_l(x), \sigma_{l+1}(x), \ldots, \sigma_m(x)$ forment une base de F_x.

Les sections différentiables $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ définies sur un voisinage U de $b \in N$ déterminent une carte vectorielle (U, ψ) de F, car si $y \in F_x$ (où $x \in U$), on peut écrire $y = \sum y^j \sigma_j(x)$, et l'on posera $\psi(y) = (x;\ldots y^j \ldots) \in U \times \mathbb{R}^m$.

Si l'on appelle φ la restriction de ψ à $\pi_E^{-1}(U)$, (U, φ) est une carte vectorielle de E : toutes les cartes vectorielles de E obtenues ainsi sont compatibles entre elles, car elles sont des restrictions de cartes locales de F et ces dernières sont compatibles entre elles.

Enfin on remarque que $\varphi(\pi_E^{-1}(U))$ est une sous-variété régulière de $\psi(\pi_F^{-1}(U))$, et on en déduit que E est une sous-variété régulière de F. Donc E est un sous-fibré vectoriel de F.

6. NOYAU D'UN MORPHISME DE FIBRÉS VECTORIELS.

Soient E et E' deux fibrés vectoriels et f un morphisme du premier vers le second. La restriction de f aux fibres E_b et $E'_{f(b)}$ est une application linéaire dont le noyau sera noté K_b ; le noyau de f est la réunion K des noyaux K_b.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ N \arrow[r, "g"] & N' \end{tikzcd}$$

Pour que K soit un sous-fibré vectoriel de E, il faut et il suffit que la dimension des noyaux K_b soit localement constante. En effet cette condition est manifestement nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que si elle est remplie, au voisinage de tout point $b \in N$, il existe des sections différentiables $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ de E telles que pour tout x assez voisin de b, $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_l(x)$ est une base de K_x. Or cela résulte de la propriété suivante que nous admettrons :

Soit θ une application différentiable d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m'})$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^{m'}$, telle que pour tout $x \in \Omega$, le noyau K_x de $\theta(x)$ est de dimension l constante ; quel que soit $b \in \Omega$, il existe l applications différentiables $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ de Ω dans $\mathbb{R}^m$ telles que pour tout x assez voisin de b, les valeurs $\sigma_1(x),\ldots,\sigma_l(x)$ forment une base de K_x.

7. QUOTIENTS DE FIBRÉS VECTORIELS.

Soit F un fibré vectoriel de base N, et E un sous-fibré vectoriel de F ; on se propose de définir le fibré-quotient E/F. En tant qu'ensemble, E/F est la réunion $\bigcup_{b \in N} E_b/F_b$; la projection π de E/F sur N et l'application canonique p de E sur E/F se définissent de façon évidente.

D'après ce qui a été signalé au §5, quel que soit $b \in N$, il existe des sections différentiables $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ de F, définies sur un voisinage ouvert U de b, telles que pour tout $x \in U$, les valeurs $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_l(x)$ forment une base de E_x et les valeurs $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_m(x)$ une base de F_x. Les sections $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ permettent donc de construire une carte vectorielle (U, ψ) de F ; quant aux sections $p \circ \sigma_{l+1}, \ldots, p \circ \sigma_m$ de E/F elles permettent de construire une carte vectorielle (U, χ) de E/F. Toutes les cartes vectorielles de E/F que l'on obtient de cette façon sont compatibles entre elles, car toutes les cartes vectorielles de E sont compatibles entre elles ; nous avons donc donné à E/F une structure de fibré vectoriel de base N. Il est clair que l'application p est différentiable et de rang maximum partout ; son noyau est E.

Il n'est maintenant plus difficile de montrer que si f est un morphisme du fibré vectoriel E vers le fibré vectoriel E', et si son noyau K est un sous-fibré vectoriel de E, alors l'image de f est un sous-fibré vectoriel de E' isomorphe à E/K.

8. DEFINITION D'UN JET D'ORDRE k.

Soient M et N deux variétés différentiables, $x_0 \in M$ et $y_0 \in N$, f et g deux applications différentiables définies au voisinage de x_0, à valeurs dans N, et telles que $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Soit k un entier positif ou nul. Nous nous donnons des cartes au voisinage de x_0 et y_0, c'est-à-dire des coordonnées locales (x^i) et (y^j) définies sur des ouverts U et V contenant x_0 et y_0 respectivement. Les applications f et g sont alors représentées par des systèmes de fonctions numériques $f^j(x_1, \ldots, x_m)$ et $g^j(x_1, \ldots, x_m)$ (où $j = 1, 2, \ldots, n$).

On dit que les fonctions f et g sont équivalentes à l'ordre k au point x_0 si les fonctions f^j et g^j ont mêmes dérivées partielles au point x_0 jusqu'à l'ordre k inclus, pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Si l'on effectue un changement de coordonnées au voisinage de x_0 et de y_0 , les applications f et g sont représentées par de nouvelles fonctions de m variables :

$$\varphi^j(\xi_1, \ldots, \xi_m) \quad \text{et} \quad \psi^j(\xi_1, \ldots, \xi_m) \ .$$

Les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ de ces fonctions φ^j et ψ^j s'expriment en fonction des dérivées partielles d'ordre $\leq k$ des fonctions f^j et g^j au moyen de polynômes.

Ceci montre que la propriété de f et g d'être équivalentes à l'ordre k au voisinage de x_0 ne dépend pas des cartes choisies au voisinage de x_0 et y_0.

Il est clair que nous venons de définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications différentiables f définies au voisinage de x_0 , à valeurs dans N et telles que $f(x_0) = y_0$. Une classe d'équivalence s'appelle un jet d'ordre k de M dans N ; le point x_0 s'appelle sa source, et le point y_0 son but. L'ensemble des jets d'ordre k de M dans N sera noté $J^k(M, N)$. Si f est une application différentiable définie au voisinage de x, son jet d'ordre k au point x sera noté $j^k_x f$. Les applications qui à un jet $X \in J^k(M, N)$ associent sa source et son but seront notées α et β ; ces applications sont définies sur $J^k(M, N)$ et prennent leurs valeurs dans M et N respectivement. On notera par $\alpha \times \beta$ $(J^k(M,N) \to M \times N)$ l'application qui à X fait correspondre le point $(\alpha(X), \beta(X))$.

Soit f une application différentiable définie sur un ouvert $U \subset M$ et à valeurs dans N. Le symbole $j^k f$ représente l'application qui à tout $x \in U$ associe le jet $j^k_x f$. On peut donc écrire : $\alpha \circ j^k f = id_U$, $\beta \circ j^k f = f$.

Nous allons encore introduire la notation suivante. Soit X un jet d'ordre k de source x_0 et de but y_0 ; nous nous sommes donné des coordonnées locales au voisinage de ces points. Soit I une suite d'indices entiers, positifs ou nuls, $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, telle que $1 \leq i_1+i_2+\ldots+i_m \leq k$. Pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, on pose :

$$p^j_I(X) = \left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_m} f^j}{(\partial x^1)^{i_1}(\partial x^2)^{i_2} \ldots (\partial x^m)^{i_m}}\right)^f_{x_0} .$$

Dans cette formule, f représente n'importe quelle fonction telle que $j^k_{x_0} f = X$. On remarque que le jet X est déterminé par sa source x_0, son but y_0, et tous les nombres $p^j_I X$. Ces derniers peuvent prendre des valeurs arbitraires, c'est-à-dire que si r est le nombre des applications p^j_I (lorsque j et I varient), alors tout point de $\mathbb{R}^r$ détermine un jet et un seul de source x_0 et de but y_0.

9. STRUCTURE DE VARIETE DIFFERENTIABLE SUR $J^k(M,N)$.

Soient U et V deux ouverts de M et N respectivement, et $r(U \to \mathbb{R}^m)$ et $s(V \to \mathbb{R}^n)$ deux cartes locales définies sur U et V. Posons

$$W^k_{U,V} = (\alpha \times \beta)^{-1}(U \times V) ,$$

c'est l'ensemble des jets dont la source est dans U et le but dans V. D'après ce qui précède, il existe une bijection de $W^k_{U,V}$ sur $r(U) \times s(V) \times \mathbb{R}^r$; cette bijection associe au jet $X \in W^k_{U,V}$ l'élément

$$\left(r(\alpha(X)), s(\beta(X)) ; \ldots, p^j_I(X), \ldots\right) \in r(U) \times s(V) \times \mathbb{R}^r ,$$

et elle définit donc une carte locale de $J^k(M,N)$.

Il est manifeste que toutes les cartes locales de $J^k(M,N)$ que l'on obtient de cette façon sont compatibles deux à deux ; $J^k(M,N)$ est donc une variété différentiable.

Il est clair que les applications α et β sont différentiables. En outre si f est une application différentiable de M dans N, il est clair que $j^k f$ (qui à $x \in M$ associe $j^k_x f$) est aussi une application différentiable.

Si $h \geq k$, il existe une surjection canonique ρ^h_k de $J^h(M,N)$ sur $J^k(M,N)$, car si deux applications sont équivalentes à l'ordre h au voisinage de x_0, à fortiori elles sont équivalentes à l'ordre k. On remarque que :

$$\rho^k_1 \, \rho^h_k = \rho^h_1 \quad \text{si} \quad h \geq k \geq 1 .$$

Toutes ces applications ρ^h_k sont différentiables.

10. COMPOSITION DES JETS.

Soient M, N et P trois variétés différentiables, soient $x_0 \in X$, $y_0 \in N$ et $z_0 \in P$; soient f_1 et f_2 deux applications différentiables de M dans N telles que $f_1(x_0) = f_2(x_0) = y_0$, et soient enfin g_1 et g_2 deux applications différentiables de N dans P telles que $g_1(y_0) = g_2(y_0) = z_0$. Si f_1 et f_2 sont équivalentes à l'ordre k au point x_0, et si g_1 et g_2 sont équivalentes à l'ordre k au point y_0, alors $g_1 \circ f_1$ et $g_2 \circ f_2$ sont aussi équivalentes à l'ordre k au point x_0. Ceci nous permet de définir une loi de composition qui à tout $X \in J^k(M,N)$ et à tout $Y \in J^k(N,P)$ tels que $\beta(X) = \alpha(Y)$, associe un élément de $J^k(M,P)$ que l'on notera YX ; cet élément YX est défini de la façon suivante :

Si $X = j^k_x f$ et si $Y = j^k_y g$, alors $YX = j^k_x(gf)$.

Cette loi de composition vérifie les propriétés suivantes :

1) Si les produits YX et ZY sont définis, c'est-à-dire si $\beta(X) = \alpha(Y)$ et $\beta(Y) = \alpha(Z)$, alors les produits $(ZY)X$ et $Z(YX)$ sont définis et sont égaux.

2) Si nous notons I_x^k le jet à l'ordre k et au point x de l'application identique de la variété différentiable dont x est un point, nous avons les identités suivantes :

$$XI^k_{\alpha(X)} = X ,$$

$$I^k_{\beta(X)}X = X$$

3) Si $k \geq 1$ et si X et Y sont des jets d'ordre k tels que le produit YX est défini, alors

$$\rho_1^k(YX) = \rho_1^k(Y)\ \rho_1^k(X) .$$

Un jet $X \in J^k(M,N)$ sera dit inversible s'il existe un jet $Y \in J^k(M,N)$ tel que

$$YX = I^k_{\alpha(X)} \quad \text{et} \quad XY = I^k_{\beta(X)} .$$

Le jet Y s'appelle l'inverse de X, et l'on voit tuut de suite que si X est inversible, le jet inverse est unique.

Supposons $k \geq 1$, et soit f une application différentiable définie sur un ouvert de M, à valeur dans N, telle que $X = j_x^k f$; si X est inversible, à fortiori $\rho_1^k(X)$ est inversible, et ceci implique que la matrice jacobienne de f au point x est inversible ; donc f définit un difféomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de $y = f(x)$.

Réciproquement, si f est un difféomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de y, et si $X = j_x^k f$, alors X est inversible ; car f admet une application réciproque g, et si on pose $Y = j_y^k g$, on a :

$$YX = I_x^k \quad , \quad XY = I_y^k .$$

Nous pouvons donc énoncer que pour $k \geq 1$ les 4 assertions suivantes sont équivalentes :

1) X est un jet inversible.

2) le jet $\rho_1^k(X)$ est inversible.

3) X est le jet d'un difféomorphisme local.

4) toute application différentiable f telle que $X = j_x^k f$ est un difféomorphisme local au voisinage de x.

11. JETS D'ORDRE INFINI.

Pour définir les jets d'ordre infini, nous reprenons les notations du paragraphe 8, et nous disons que les fonctions f et g sont équivalentes à l'ordre infini au voisinage de x_o si les fonctions f^j et g^j ont mêmes dérivées partielles de tout ordre au point x_o.

Les classes d'équivalence pour cette relation d'équivalence seront appelées des jets d'ordre infini.

Les notations $j_x^\infty f$, $J^\infty(M,N)$, $\alpha(X)$, $\beta(X)$, ρ_k^∞ , I_x^∞ , se définissent de façon analogue.

12. JETS DES SECTIONS D'UN FIBRÉ VECTORIEL.

Soit E un fibré vectoriel sur une variété N et soit J_kE l'ensemble des jets d'ordre k des sections locales de N dans E (toutes les sections considérées sont supposées différentiables). Nous nous proposons de donner à J_kE une structure de fibré vectoriel sur E. La projection de J_kE sur N est évidemment l'application qui à un jet $X \in J_kE$ associe sa source $x = \alpha(X) = \pi(\beta(X))$.

Chaque fibre de J_kE est munie d'une structure d'espace vectoriel. En effet soient σ et τ deux sections définies au voisinage de $x \in N$, et soit λ un nombre réel ; supposons que σ et τ soient respectivement équivalentes à σ' et τ' à l'ordre k au voisinage de x ; alors $\sigma + \tau$ et $\lambda\sigma$ sont respectivement équivalentes à $\sigma' + \tau'$ et $\lambda\sigma'$. Par conséquent si $X = j_x^k\sigma$ et $Y = j_x^k\tau$, on posera :

$$X+Y = j_x^k(\sigma+\tau) \quad \text{et} \quad \lambda X = j_x^k(\lambda\sigma) .$$

Soit (U, ψ) une carte locale de N sur laquelle on dispose d'une carte vectorielle (U, φ). Un élément $x \in U$ est déterminé par ses coordonnées x^i : $(x^i) = \psi(x) \in \mathbb{R}^n$. Un élément $y \in \pi^{-1}(U)$ est déterminé par sa projection $x = \pi(y)$ et par ses composantes y^j : $(y^j) = \varphi(y) \in \mathbb{R}^m$. Soit X un jet $\in J_kE$ de source x et de but y, et soit σ une section définie au voisinage de x telle que $X = j_x^k\sigma$. Cette section est déterminée par m fonctions f^j de n variables :

$$y^j = f^j(x^1, \ldots, x^n) .$$

Soit I une suite d'indices entiers, positifs ou nuls, $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, telle que $1 \leq i_1+i_2+\ldots+i_n \leq k$. Pour tout $j = 1, 2, \ldots, m$, on pose :

$$p_I^j(X) = \left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\ldots+i_n} f^j}{(\partial x^1)^{i_1}(\partial x^2)^{i_2}\ldots(\partial x^n)^{i_n}}\right)_{x_o}^{f} .$$

On remarque que $p_I^j(X)$ ne dépend pas du choix de la section σ telle que $X = j_x^k\sigma$. Manifestement on a :

$$p_I^j(X+Y) = p_I^j(X) + p_I^j(Y)$$

$$p_I^j(\lambda X) = \lambda p_I^j(X) \qquad \text{si } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Soit r le nombre des applications p_I^j ; l'application qui à un jet X appartenant à la fibre $(J_kE)_x$ associe la suite de nombres $(\ldots, y^j, \ldots; \ldots, p_I^j(X), \ldots) \in \mathbb{R}^{m+r}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En outre l'application φ_k qui à un jet $X \in \alpha^{-1}(U)$ associe le point de $\mathbb{R}^{n+m+r}$ déterminé par les n coordonnées $x^i(\alpha(X))$, les m coordonnées $y^j(\beta(X))$ et les r nombres $p_I^j(X)$, est une carte vectorielle sur J_kE. On montre sans difficulté que toutes les cartes vectorielles obtenues de cette façon sont compatibles deux à deux.

Nous avons donc mis sur J_kE une structure de fibré vectoriel qui induit sur les fibres les structures d'espace vectoriel définies plus haut. Comme au §9, on peut affirmer que les applications α, β, $j^k\sigma$ (où σ est une section différentiable et ρ_k^h sont différentiables.

13. FIBRE VECTORIEL DEDUIT D'UN FIBRÉ PRINCIPAL.

Soit (P, M, π, G) un fibré principal différentiable de base M et de groupe structural G. Soient TM et TP les fibrés vectoriels tangents à M et à P. L'application canonique de TP sur TM sera notée $d\pi$. Soit Rg la translation à droite dans P définie par l'élément $g \in G$ et soit dRg son extension au fibré tangent TP. Un champ de vecteurs sur P sera dit invariant à droite si toutes les applications dRg (où $g \in G$) le laissent invariant. Soit $z \in P$ un point quelconque, souvent on notera $R_g(z)$ par zg.

Soit E la variété quotient de TP par la relation d'équivalence suivante : deux éléments v_1 et v_2 de TP sont équivalents s'il existe $g \in G$ tel que $dRg(v_1) = v_2$. Cette variété E peut recevoir une structure d'espace fibré vectoriel sur M de façon évidente ; la projection de E sur M sera notée ϖ.
La fibre E_x au-dessus d'un point $x \in M$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à droite définis sur la fibre P_x. C'est E que l'on appellera le fibré vectoriel déduit de P.

Si $v \in TP$ et si $g \in G$, on a la relation :

$$d\pi \circ dRg(v) = d\pi(v) \; ;$$

cette relation montre qu'il existe un morphisme surjectif ρ de fibrés vectoriels de E sur TM.

La projection ϖ n'est autre que le produit de ρ et de la projection de TM sur M.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "\rho"] \arrow[ddrr, bend right, "\varpi"'] & & TP \arrow[dl, "d\pi"'] \arrow[dr] & \\
& TM \arrow[dr] & & P \arrow[dl, "\pi"] \\
& & M &
\end{tikzcd}$$

Soit $x \in M$ et $z \in P_x$; il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels de E_x sur T_zP, espace tangent à P au point z ; il sera noté λ_z. Il vérifie la relation $d\pi \circ \lambda_z = \rho$, et si $g \in G$, on a :

(II,1) $$\lambda_{zg} = dRg \circ \lambda_z .$$

Soit U un ouvert de M et E(U) le module des sections (différentiables) de E définies sur U (il s'agit d'un module sur l'anneau des fonctions différentiables réelles). On peut définir un isomorphisme λ de ce module E(U) sur le module des champs de vecteurs invariants à droite définis sur $\pi^{-1}(U)$. Pour toute section $\sigma \in E(U)$, $\lambda(\sigma)$ est un champ de vecteurs projetable par π, et $d\pi(\lambda(\sigma)) = \rho \circ \sigma$.

Le crochet de deux champs de vecteurs invariants à droite et définis sur $\pi^{-1}(U)$ est encore invariant à droite, et cela nous permet de munir E(U) d'une structure d'algèbre de Lie (de dimension infinie) sur le corps des réels : si σ_1 et σ_2 $\in E(U)$, on pose $[\sigma_1, \sigma_2] = \lambda^{-1}\big([\lambda\sigma_1, \lambda\sigma_2]\big)$. On vérifie aussitôt les deux formules suivantes, où f représente une fonction (différentiable) réelle définie dans U et $(\rho\sigma_1)f$ la dérivée de f par rapport au champ de vecteurs $\rho \circ \sigma_1$:

$$(II,2) \qquad \rho([\sigma_1, \sigma_2]) = [\rho\sigma_1, \rho\sigma_2]$$

$$(II,3) \qquad [\sigma_1, f\sigma_2] = f[\sigma_1, \sigma_2] + (\rho\sigma)f.\sigma_2$$

Désignons par E^o le noyau du morphisme $\rho : E \to TM$; E^o est un sous-fibré vectoriel (différentiable) de E et chaque fibre $E^o{}_x$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel des champs de vecteurs tangents à P_x et invariants à droite ; ceux-ci forment une algèbre de Lie (de dimension finie), donc $E^o{}_x$ a de façon naturelle une structure d'algèbre de Lie.

Soient σ_1 et σ_2 deux éléments de $E^o(U)$, c'est-à-dire deux sections de E définies sur U et à valeurs dans E^o ; si $x \in U$, on peut écrire :

$$(II,4) \qquad [\sigma_1, \sigma_2](x) = [\sigma_1(x), \sigma_2(x)] \ ;$$

dans le premier membre figure le crochet de deux éléments de E(U dont on prend la valeur en x, et dans le second figure le crochet de deux éléments de $E^o{}_x$.

14. SOUS-FIBRÉ VECTORIEL DEDUIT D'UN SOUS-FIBRÉ PRINCIPAL.

Soit (P', M, π', G') un sous-fibré principal de (P, M, π, G). On voit tout de suite qu'il existe un morphisme injectif η du fibré vectoriel E' déduit de P' dans le fibré vectoriel E déduit de P ; ce morphisme η est tel que $\rho' = \rho_o\eta$. Nous identifierons E' avec son image par η ; après cette identification, E' est un sous-fibré vectoriel (différentiable) de E, et pour tout $x \in M$, E'^o_x est une sous-algèbre de Lie de $E^o{}_x$; en outre ρ' est la restriction de ρ à E'. Nous appellerons E' le sous-fibré vectoriel déduit du sous-fibré principal P'.

Le morphisme ρ' $(E' \to TM)$ est surjectif, tout comme ρ lui-même. Par ailleurs si σ_1 et $\sigma_2 \in E'(U)$, c'est-à-dire si σ_1 et σ_2 sont des sections de E définies sur U et à valeurs dans E', alors $[\sigma_1, \sigma_2]$ est encore un élément de E'(U). Nous verrons bientôt que ces deux propriétés caractérisent les sous-fibrés vectoriels de E qui peuvent être déduits d'un sous-fibré principal de P ; mais nous devons d'abord donner la définition suivante :

Déux sous-fibrés principaux P' et P" de P sont dits équivalents s'il existe un élément $g \in G$ tel que $P'' = P'g$ (c'est-à-dire $P'' = R_g(P')$). On voit tout de suite que si P' et P" sont équivalents, les sous-fibrés vectoriels qui en sont déduits sont identiques.

En outre, soient G' et G" les groupes structuraux de P' et P" ; si $P'' = P'g$, alors $G'' = g^{-1}G'g$. Pour s'en rendre compte, il suffit de se rappeler que G' (resp. G") est l'ensemble des $g \in G$ tels que $P'g = P'$ (resp. $P''g = P''$), car les groupes structuraux opèrent de façon simplement transitive dans chaque fibre de leur espace fibré principal.

Théorème II.1.-

Soit M une variété différentiable connexe, (P, M, π, G) un fibré principal de base M, et E le fibré vectoriel associé à P. Soit E' un sous-fibré vectoriel différentiable de E vérifiant les deux conditions suivantes :

1) Le morphisme $\rho' : E' \to TM$ (restriction de ρ à E') est surjectif.

2) Si σ_1 et $\sigma_2 \in E'(U)$, c'est-à-dire si σ_1 et σ_2 sont deux sections de E à valeurs dans E', alors $[\sigma_1, \sigma_2]$ est encore un élément de E'(U), et cela quel que soit l'ouvert $U \subset M$.

Il existe alors un sous-fibré principal connexe P' (connexe en tant que sous-variété de P), dont le sous-fibré vectoriel déduit est E'.

En outre, deux sous-fibrés principaux connexes de P qui ont E' pour fibré vectoriel déduit, sont équivalents.

Démonstration :

Soit $\mathfrak{D}$ la distribution différentiable sur P qui à chaque $z \in P$ associe le sous-espace vectoriel $\lambda_z(E'_{\pi(z)})$ de T_zP. La condition 2) implique que $\mathfrak{D}$ est complètement intégrable ; soit P' une variété intégrale maximale de $\mathfrak{D}$. La condition 1) entraine que, pour tout $z \in P'$, l'application $d\pi$: $T_zP' \to T_{\pi(z)}M$, est surjective ; donc $\pi(P')$ est un ouvert de M.

Si P" est une autre variété intégrale maximale de $\mathfrak{D}$, $\pi(P')$ et $\pi(P")$ sont ou bien identiques ou bien disjoints ; en effet soit $x \in \pi(P') \cap \pi(P")$; on peut trouver $z' \in P'_x$, $z" \in P"_x$ et $g \in G$ tels que $z" = z'g$; comme la distribution $\mathfrak{D}$ est invariante à droite par l'action de G dans P, P'g est aussi une variété intégrale maximale de $\mathfrak{D}$; puisque P" et P'g contiennent z", nécessairement $P" = P'g$; donc $\pi(P') = \pi(P")$.

L'ensemble des ouverts $\pi(P')$, où P' parcourt l'ensemble des variétés intégrales maximales de $\mathfrak{D}$, est une partition de M; puisque M est connexe, $\pi(P') = M$.

La variété intégrale maximale P' étant choisie, soit G' l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $P'g = P'$; G' est un sous-groupe de G. Etant donné $z_o \in P'$, si $g \in G$ est tel que $z_o g \in P'$, alors $g \in G'$. Nous allons montrer que G' est un sous-groupe de Lie de G.

Soit E'^o le noyau du morphisme $\rho' : E' \to TM$. La condition 2) et la formule (II,4) impliquent que si σ_1 et σ_2 sont deux sections de E à valeurs dans E'^o, alors $[\sigma_1, \sigma_2]$ est aussi à valeurs dans E'^o. En particulier E'^o_x est une sous-algèbre de Lie de E^o_x .

Il en résulte que la distribution $\mathfrak{D}'$ sur P qui à chaque $z \in P$ associe le sous-espace vectoriel $\lambda_z(E'^{o}_{\pi(z)})$ de T_zP, est complètement intégrable, et chaque variété intégrale maximale de $\mathfrak{D}'$ est contenue dans une variété intégrale maximale de $\mathfrak{D}$. Plus précisément, chaque fibre P'_x de P' est une réunion de variétés intégrales maximales de $\mathfrak{D}'$. Choisissons $z_o \in P'_x$, et soit $\mathfrak{F} : G \to P_x$ l'application définie par : $\mathfrak{F}(g) = z_o g$; il est clair que $\mathfrak{F}(G') = P'_x$. Soit $\mathfrak{D}''$ la distribution sur G, image réciproque par $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{D}'$ restreinte à P_x ; $\mathfrak{D}''$ est invariante à droite et G' est une réunion de variétés intégrales maximales de $\mathfrak{D}''$; donc G' est un sous-groupe de Lie de G.

Nous pouvons donc affirmer que P' est un sous-fibré principal connexe de P, de groupe structural G' ; son fibré vectoriel déduit est E'.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que si P''' est un sous-fibré principal de P dont le fibré vectoriel associé est E, et si P''' est connexe, alors il existe $g \in G$ tel que $P''' = P'g$. En effet puisque P''' est une variété intégrale de $\mathfrak{D}$, c'est un ouvert d'une variété intégrale maximale P''. D'après ce qui précède, P'' est un sous-fibré principal de P ; soit G'' son groupe structural. L'ensemble des ouverts P'''g, où g parcourt G'', est une partition de P'', et puisque P'' est connexe, nécessairement $P''' = P''$. Or nous avons démontré plus haut qu'il existe $g \in G$ tel que $P'' = P'g$.