

# COURS DE L'INSTITUT FOURIER

YOZO MATSUSHIMA

## Chapitre II Variétés différentiables et champs de vecteurs

*Cours de l'institut Fourier*, tome 1 (1966), p. 1-85

[http://www.numdam.org/item?id=CIF\\_1966\\_\\_1\\_\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CIF_1966__1__A2_0)

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Chapitre II

### VARIETES DIFFERENTIABLES ET CHAMPS DE VECTEURS

#### §1. VARIETES

Définition 1 :

M est appelé une variété topologique de dimension n si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) M est un espace topologique séparé.
- 2) Pour tout élément p de M, il existe un voisinage V de p, qui est homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Si U est un ouvert de M et  $\psi$  un homéomorphisme de U sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que le couple  $(U, \psi)$  est une carte locale de M.

Soit  $(U, \psi)$  une carte locale de M, et soient  $x^1(p), \dots, x^n(p)$  les coordonnées du point  $\psi(p)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le système  $(x^1, \dots, x^n)$  de n fonctions définies et continues dans U est appelé un système de coordonnées locales de M.

Soient  $(U, \psi)$  et  $(U', \psi')$  deux cartes locales de  $M$  ;  
on suppose  $U \cap U' \neq \emptyset$  ; soient les applications

$$\theta = \psi' \circ \bar{\psi}^{-1} : \psi(U \cap U') \longrightarrow \psi'(U \cap U')$$

et

$$\theta' = \psi \circ \bar{\psi}'^{-1} : \psi'(U \cap U') \longrightarrow \psi(U \cap U') ;$$

des applications sont des homéomorphismes. Les cartes locales  $(U, \psi)$  et  $(U', \psi')$  sont dites  $C^r$ -liées si ces applications  $\theta$  et  $\theta'$  sont de classe  $C^r$  .

Définition 2 :

Soit  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha) ; \alpha \in A\}$  un ensemble de cartes locales de  $M$  vérifiant les conditions suivantes :

1)  $\{U_\alpha ; \alpha \in A\}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ .

2) Quels que soient  $\alpha, \beta \in A$  tels que

$$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset ,$$

les cartes locales  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  et  $(U_\beta, \psi_\beta)$  sont  $C^r$ -liées.  
Alors  $\mathfrak{A}$  est appelé un atlas de  $M$  de classe  $C^r$  .

Soit  $\mathfrak{A}$  un atlas de  $M$  de classe  $C^r$  ; une carte locale  $(U, \psi)$  est dite compatible avec  $\mathfrak{A}$  si  $\mathfrak{A} \cup \{(U, \psi)\}$  est encore un atlas de classe  $C^r$  (c'est-à-dire si  $(U, \psi)$  est  $C^r$ -liée avec toute carte  $(U_\alpha, \psi_\alpha)$  de l'atlas, telle que

$$U_\alpha \cap U \neq \emptyset ) .$$

On notera  $\tilde{\mathfrak{A}}$  l'ensemble de toutes les cartes locales compatibles avec  $\mathfrak{A}$ .

Définition 3 :

Soient  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  deux atlas de  $M$  de classe  $C^r$ . On dit que  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  sont équivalents si

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{B}} .$$

On vérifie que c'est une relation d'équivalence.

Définition 4 :

Une classe d'équivalence  $\mathfrak{D}$  de l'ensemble des atlas de classe  $C^r$  de  $M$  est une structure différentiable de  $M$  de classe  $C^r$ .

Soit  $\mathfrak{D}$  une classe d'équivalence des atlas de classe  $C^r$ , il existe dans  $\mathfrak{D}$  un plus grand atlas  $\mathfrak{A}$ .

En effet c'est

$$\mathfrak{A} = \tilde{\mathfrak{A}}$$

quel que soit  $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}$ .

Définition 5 :

Une variété différentiable de classe  $C^r$  et de dimension  $n$ , est un couple  $(M, \mathfrak{D})$  où  $M$  est une variété topologique de dimension  $n$  et  $\mathfrak{D}$  une structure différentiable de  $M$  de classe  $C^r$ .

Soit  $(M, \mathfrak{D})$  une variété différentiable. On dit qu'un système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $M$ , est un système de coordonnées locales de  $(M, \mathfrak{D})$  si la carte locale correspondante appartient au plus grand atlas  $\mathfrak{A}$  de  $\mathfrak{D}$ .

Propriété :

Soit  $(M, \mathfrak{D})$  une variété différentiable, soit  $O$  un ouvert de  $M$  et soit  $p$  un point de  $O$ . Alors, il existe un voisinage  $U$  de  $p$  contenu dans  $O$  et un système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $(M, \mathfrak{D})$  définies sans  $U$  tels que

$$x^1(p) = \dots = x^n(p) = 0 .$$

En effet, dans  $\mathfrak{A}$ , (plus grand atlas de  $\mathfrak{D}$ ), il existe une carte  $(V, \varphi)$  telle que  $p \in V$ . Si  $U = V \cap O$  et si  $\varphi' = \varphi | V \cap O$ , alors  $(U, \varphi')$  est une carte locale appartenant à  $\mathfrak{A}$ .

Soit

$$a = \varphi'(p) \in \mathbb{R}^n$$

et soit  $T_{-a}$  la translation dans  $\mathbb{R}^n : x \longrightarrow x - a$ , soit

$$\psi = T_{-a} \circ \varphi' ;$$

les coordonnées locales définies par la carte  $(U, \psi)$  ont la propriété voulue.

## §2. FONCTIONS DIFFERENTIABLES SUR UNE VARIETE DIFFERENTIABLE

Dorénavant on entendra par "variété différentiable" une variété différentiable de classe  $C^\infty$ .

On écrira souvent  $M$  pour  $(M, \mathfrak{D})$ .

Soit  $O$  un ouvert de  $M$  et  $f$  une fonction à valeurs réelles définie dans  $O$ . Soit  $a$  un point de  $O$ . Il existe  $U$ , voisinage de  $a$  contenu dans  $O$ , avec une carte locale  $(U, \psi)$ ,

$$\psi : U \longrightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

telle que

$$\psi(a) = 0.$$

$\psi^{-1}$  est définie sur  $\psi(U)$  et  $f \circ \psi^{-1}$  est une application de  $\psi(U)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Définition :

La fonction  $f$  est dite différentiable au point  $a$  (sous-entendu de classe  $C^\infty$ ) si la fonction  $f \circ \psi^{-1}$  est de classe  $C^\infty$  dans un voisinage de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

La fonction  $f$  est dite différentiable sur  $O$  si elle est différentiable en tout point de  $O$ .

Cette définition ne dépend pas du choix des coordonnées locales car les cartes différentes sont  $C^\infty$ -liées.

Germes de fonctions différentiables :

Soit  $p$  un point de  $M$ . Soit  $\mathbb{F}_p$  l'ensemble des fonctions définies au voisinage de  $p$  et différentiables. Soient  $f$  et  $f'$  dans  $\mathbb{F}_p$ , soient  $U_f$  et  $U_{f'}$ , les voisinages de  $p$  sur lesquelles elles sont respectivement définies. On dit que

$f$  et  $f'$  sont équivalentes au point  $p$  si il existe un voisinage  $V$  de  $p$ , contenu dans  $U_f \cap U_{f'}$ , tel que  $f|_V$  et  $f'|_V$  coïncident. C'est une relation d'équivalence dans  $\mathbb{F}_p$  ; une classe d'équivalence est par définition un germe de fonctions différentiables au point  $p$ . On notera  $f_p$  le germe de  $f$  au point  $p$ . Soit  $\mathcal{F}_p$  l'ensemble des germes de fonctions différentiables au point  $p$ , c'est une algèbre associative sur  $\mathbb{R}$  (on définit la somme et les multiplications à l'aide d'un représentant de chaque classe et on vérifie que c'est indépendant du choix de ce représentant). C'est l'algèbre locale de  $M$  au point  $p$ . Soit  $C^\infty(M)$  l'ensemble de toutes les fonctions différentiables (de classe  $C^\infty$ ) définies sur tout  $M$ , c'est aussi une algèbre associative sur  $\mathbb{R}$ . Pour  $p \in M$  on considère l'application qui à une fonction différentiable, associe son germe au point  $p$  ; c'est un homomorphisme d'algèbre.

Théorème :

Pour tout  $p \in M$ , l'homomorphisme de  $C^\infty(M)$  dans  $\mathcal{F}_p$  qui, à toute fonction associe son germe en  $p$ , est surjectif.

C'est-à-dire que si  $h$  est une fonction différentiable définie dans un voisinage  $U$  de  $p$ , il existe un voisinage  $V$  de  $p$ , contenu dans  $U$  et une fonction  $f$  différentiable définie sur  $M$  tout entier, tels que sur  $V$ ,  $f$  et  $h$  coïncident. Pour démontrer ce théorème, on démontrera d'abord deux lemmes :

Lemme 1 :

Soit p un point de M et U un voisinage de p, alors il existe un voisinage V de p tel que  $\bar{V} \subset U$  et une fonction  $f \in C^\infty(M)$  tels que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in V \\ 0 & \text{pour } x \in \complement U \end{cases}$$

En effet, il existe un voisinage  $U'$  de p tel que  $\bar{U}' \subset U$  (car dans U, il y a un voisinage de p isomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) et tel que sur  $U'$ , on ait un système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  vérifiant

$$x^1(p) = \dots = x^n(p) = 0 \quad .$$

Soit a un nombre réel positif suffisamment petit pour que

$$W = \{q \in U' ; |x^i(q)| < a \quad \forall i\} \quad \text{vérifie} \quad \bar{W} \subset U' .$$

Soit  $b < a$  et soit

$$V = \{q \in U' ; |x^i(q)| < b \quad \forall i\} \quad .$$

W et V sont des voisinages de p et  $\bar{V}$  est contenu dans W, lequel est contenu dans  $U'$ , donc dans U. On sait qu'on peut trouver une fonction g de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 && \text{pour } t \leq b , \\ 0 < g(t) < 1 && \text{pour } b < |t| < a \end{aligned}$$

et

$$g(t) = 0 \quad \text{pour } |t| \geq a \quad .$$

Soit alors f la fonction définie par

$$f(q) = g(x^1(q)) \times \dots \times g(x^n(q)) \quad \text{si } q \in U'$$

et  $f(q) = 0$  si  $q \in \complement U'$ . Cette fonction f répond à la question; en effet si  $q \in V_p$ , chaque  $|x^i(q)|$  est



inférieur à  $b$  et  $g(x^i(q)) = 1$  pour tout  $i$ , donc

$$f(q) = 1$$

et si  $q \in \bigcup U$ , alors

$$q \in \bigcup U' \text{ et } f(q) = 0 ;$$

et  $f$  est différentiable : elle l'est par définition sur  $U'$  et sur  $\bigcup \bar{U}'$  ; il reste à le montrer, si  $q$  appartient à la frontière de  $U'$  : alors  $q$  n'est pas adhérent à  $W$ , et il existe  $v$  voisinage de  $q$  ne rencontrant pas  $W$ , pour  $x \in v \cap U'$ ,

$$f(x) = 0$$

car  $|x^i(x)| > a$  pour tout  $i$  et pour  $x \in v \cap U'$ ,

$$f(x) = 0$$

par définition, donc  $f = 0$  sur  $v$ , voisinage de  $q$ , donc  $f$  est différentiable.

Lemme 2 :

Soit  $p$  un point de  $M$ ,  $U$  un voisinage de  $p$  et  $h$  une fonction différentiable définie sur  $U$ , alors il existe un voisinage  $V$  de  $p$  tel que

$$\bar{V} \subset U ,$$

et une fonction  $f \in C^\infty(M)$ , tels que

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in V . \\ 0 & \text{si } x \in \bigcup U . \end{cases}$$

En effet, soit  $U'$  un voisinage de  $p$  tel que

$$\bar{U}' \subset U .$$

D'après le lemme 1, il existe un voisinage  $V$  de  $p$  tel que

$$\bar{V} \subset U'$$

et  $g \in C^\infty(M)$  tels que

$$g(x) = 1 \quad \text{si } x \in V$$

et

$$g(x) = 0 \quad \text{si } x \in \left[ U' \right. .$$

Soit  $f$  la fonction sur  $M$  définie par

$$f(x) = g(x) h(x) \quad \text{si } x \in U$$

et

$$g(x) = 0 \quad \text{si } x \in \left[ U \right. .$$

Cette fonction répond à la question, en effet  $f(x) = h(x)$ , si  $x \in V$ , car alors  $g(x) = 1$  ;

$$f(x) = 0 \quad \text{si } x \in \left[ U \right.$$

car  $\left[ U$  est contenu dans  $\left[ U'$  où  $g(x)$  vaut 0, et  $f$  est différentiable ; en effet elle l'est sur  $U$  car  $g$  et  $h$  le sont, elle l'est sur  $\left[ \bar{U}$  car elle y est nulle, et si  $x_0$  appartient à la frontière de  $U$ , alors il existe  $v$  voisinage de  $x_0$  ne rencontrant pas  $U'$ , sur  $v \cap U$ ,  $f$  est nulle car  $g$  est nulle sur  $\left[ U'$  et sur  $v \cap \left[ U$ ,  $f$  est nulle par définition, elle est donc nulle sur  $v$  voisinage de  $x_0$ , elle est donc différentiable au point  $x_0$ .

De ce lemme découle le théorème, car si on considère un germe de fonctions différentiables en  $p$ , c'est une classe d'équivalence dans laquelle on peut choisir un représentant  $h$  qui est une fonction différentiable définie sur un ouvert  $U$  contenant  $p$  ; alors d'après le lemme 2, il existe une fonction  $f \in C^\infty(M)$  qui coïncide avec  $h$  sur un voisinage  $V$  de  $p$ , donc qui a même germe que  $h$ . On peut donc trouver une fonction  $f \in C^\infty(M)$  de germe donné en  $p$ , l'homomorphisme est donc surjectif.

Définition d'une Notation :

Si  $f$  est une fonction différentiable définie dans un voisinage de  $p$  sur lequel on a des coordonnées locales, c'est une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  par l'intermédiaire des coordonnées locales  $x^1, \dots, x^n$ . On a

$$f(p) = F(x^1(p), \dots, x^n(p))$$

où  $F(u_1, \dots, u_n)$  est une fonction réelle sur  $\mathbb{R}^n$ , pourvue de dérivées partielles  $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ . Alors par définition  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$  désignera

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(x^1(p), \dots, x^n(p))$$

et  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$  désignera la fonction de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $p$  fait correspondre  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ .

Autre notation :

On écrira

$$f(x^1, \dots, x^n),$$

ce qui signifiera que  $f(p)$  est sous la forme

$$F(x^1(p), \dots, x^n(p)).$$

Exemple de variété : L'espace projectif réel  $P^n(\mathbb{R})$ .

Par définition  $P^n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension 1 de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Soit  $p$  la projection canonique de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  dans  $P^n(\mathbb{R})$  qui à  $x$  fait correspondre le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{n+1}$  engendré par  $x$ . On peut définir une topologie  $\mathfrak{X}_1$  sur  $P^n(\mathbb{R})$  de la façon suivante : un sous-ensemble  $U$  de  $P^n(\mathbb{R})$  sera un ouvert

si et seulement si  $\bar{p}^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ .

D'autre part, le groupe  $GL(n+1, \mathbb{R})$  opère transitivement dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  et le groupe d'isotropie en  $p(e_1)$  est l'ensemble  $H$  des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & b & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où  $b \in GL(n, \mathbb{R})$ , (on désigne par  $e_1$  le vecteur  $(1, 0, \dots, 0)$ ). L'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est égal à la variété grassmannienne

$$G_{n+1, 1} = GL(n+1, \mathbb{R})/H$$

dont la topologie  $\mathfrak{X}_2$  est la suivante : un sous-ensemble  $U$  de  $G/H$  est un ouvert si et seulement si  $\bar{\pi}^{-1}(U)$  est un ouvert de  $G$ , ( $\pi$  désignant la projection canonique de

$$G = GL(n+1, \mathbb{R})$$

sur  $G/H$ ). On va voir que les topologies  $\mathfrak{X}_1$  et  $\mathfrak{X}_2$  sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  sont les mêmes.

Si on considère la loi d'opération de  $GL(n+1, \mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , le groupe d'isotropie en  $e_1$  est l'ensemble  $\tilde{H}$  des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & b & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où  $b \in GL(n, \mathbb{R})$ , et  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  est égal au quotient

$$GL(n+1, \mathbb{R})/\tilde{H}.$$

Soit  $\tilde{\pi}$  la projection canonique de  $GL(n+1, \mathbb{R})$  dans ce quotient, et soit  $p'$  l'application de  $G/\tilde{H}$  dans  $G/H$  définie

par  $p'(a\tilde{H}) = aH$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & G & \\
 \tilde{\pi} \swarrow & & \searrow \pi \\
 G/\tilde{H} & \xrightarrow{p'} & G/H
 \end{array}$$

est commutatif et  $U$  est un ouvert de  $G/H$  si et seulement si

$$\tilde{\pi}^{-1}(U) = \tilde{\pi}^{-1}(p'^{-1}(U))$$

est un ouvert de  $G$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\tilde{p}^{-1}(U)$  est un ouvert de  $G/\tilde{H}$ .

Soient

$$i : G/H \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$$

et

$$\tilde{i} : G/\tilde{H} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$$

les applications identiques. Un sous-ensemble  $U$  de  $P^n(\mathbb{R})$  est un ouvert pour  $\mathfrak{X}_2$  si et seulement si

$$(i \circ p')^{-1}(U)$$

est un ouvert de  $G/\tilde{H}$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\tilde{p}^{-1}(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  car le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 G/\tilde{H} & \xrightarrow{p'} & G/H \\
 \tilde{i} \downarrow & & \downarrow i \\
 \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{p} & P^n(\mathbb{R})
 \end{array}$$

est commutatif. C'est-à-dire que les deux topologies  $\mathfrak{X}_1$  et  $\mathfrak{X}_2$  sur  $P^n(\mathbb{R})$  sont les mêmes.

Soit  $\alpha = p(x)$  un point de  $P^n(\mathbb{R})$  tel que

$$x = (x^1, \dots, x^{n+1}) ,$$

on dit que  $x^1, \dots, x^{n+1}$  sont des coordonnées homogènes de  $\alpha$ .  
Si  $i$  est un nombre entre 1 et  $n + 1$ , la condition  $x^i \neq 0$   
ne dépend pas du choix de  $x$  tel que

$$\alpha = p(x) .$$

Soit

$$U_i = \{ \alpha \in P^n(\mathbb{R}) ; \alpha = p(x), x^i \neq 0 \}$$

alors

$$\bar{p}^{-1}(U_i) = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} ; x^i \neq 0 \}$$

est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ . La famille des  $U_i$ ,  
 $i = 1, \dots, n + 1$  forme un recouvrement ouvert de  $P^n$ .

Les rapports  $\frac{x^j}{x^i}$  ne dépendent pas du choix de  $x$  tel que

$$\alpha = p(x) ,$$

on peut donc définir les applications

$$\psi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{par} \quad \psi_i(\alpha) = (x_i^1, \dots, x_i^n)$$

où

$$x_i^j = \frac{x^j}{x^i} \quad \text{si} \quad 1 \leq j \leq i$$

et

$$x_i^j = \frac{x^{j+1}}{x^i} \quad \text{si} \quad i \leq j \leq n .$$

Ces applications  $\psi_i$  sont des homéomorphismes et  $P^n(\mathbb{R})$ ,  
muni de l'atlas

$$\{ (U_i, \psi_i), i = 1, \dots, n + 1 \}$$

est une variété différentiable de dimension  $n$ ; c'est une  
variété différentiable compacte.

§3. VECTEURS TANGENTS

Soit  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{F}_p$  l'algèbre locale en  $p$ . A tout  $\alpha \in \mathcal{F}_p$ , on peut faire correspondre

$$\alpha(p) = f(p)$$

où  $f$  est une fonction représentant la classe  $\alpha$  et  $\alpha(p)$  ne dépend pas de  $f$  choisi dans la classe.

Définition :

Un vecteur tangent d'origine  $p$  est une application linéaire  $v$  de  $\mathcal{F}_p$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la condition suivante :  
Pour tout  $\alpha$  et tout  $\beta$  de  $\mathcal{F}_p$ ,

$$v(\alpha\beta) = v(\alpha) \beta(p) + \alpha(p) v(\beta) .$$

Soit  $T_p(M)$  l'ensemble des vecteurs tangents d'origine  $p$ . C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . En effet, si  $u, v \in T_p(M)$ , alors  $u + v$  est linéaire et

$$\begin{aligned} (u + v)(\alpha\beta) &= u(\alpha\beta) + v(\alpha\beta) \\ &= u(\alpha) \beta(p) + \alpha(p) u(\beta) + v(\alpha) \beta(p) + \alpha(p) v(\beta) . \\ &= [(u + v)(\alpha)] \beta(p) + \alpha(p) [(u + v)(\beta)] . \end{aligned}$$

Proposition :

L'espace vectoriel  $T_p(M)$  peut être identifié à l'espace vectoriel  $T'_p(M)$  des applications linéaires  $v'$  de  $C^\infty(M)$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la condition : pour tout  $f$  et tout  $g \in C^\infty(M)$ ,

$$v'(fg) = v'(f) g(p) + f(p) v'(g) .$$

Lemme :

Soit  $v' \in T'_p(M)$  et soit  $f \in C^\infty(M)$  identiquement nulle sur un voisinage de  $p$ , alors  $v'(f) = 0$ .

Soit  $U$  le voisinage de  $p$  où  $f \equiv 0$ . Il existe  $V$  et  $W$ , voisinages de  $p$  tels que

$$\bar{W} \subset V \subset U,$$

et  $g \in C^\infty(M)$  tels que

$$g(x) = 1 \quad \text{si } x \in W$$

et

$$g(x) = 0 \quad \text{si } x \in \complement V.$$

Soit

$$h(x) = 1 - g(x).$$

Alors en tout point

$$f(x) = f(x) h(x),$$

en effet

$$\text{si } x \in U, \quad f(x) = 0$$

et

$$\text{si } x \in \complement V, \quad g(x) = 0$$

donc

$$h(x) = 1.$$

Donc

$$v'(f) = v'(fh) = v'(f) h(p) + f(p) v'(g) = 0$$

car

$$f(p) = h(p) = 0.$$

c.q.f.d.

L'identification de  $T'_p(M)$  avec  $T'_p(M)$  est la suivante:



soit  $v \in T_p(M)$ , on lui fait correspondre  $v' \in T'_p(M)$  défini par  $v'(f) = v(f)$  (c'est-à-dire que pour  $f \in C^\infty(M)$ , on considère son germe  $f$ , sur lequel on fait agir  $v$ ). Cette application  $v' : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$  est bien linéaire et vérifie

$$v'(fg) = v'(f) g(p) + f(p) v'(g)$$

car  $v$  est un vecteur tangent. L'application qui à  $v$  fait correspondre  $v'$  est une application linéaire de  $T_p(M)$  sur  $T'_p(M)$ ; elle est injective car si

$$v'(f) = 0 \quad \text{pour tout } f \in C^\infty(M)$$

alors  $v$  est nul pour tout germe, car tout germe est le germe d'une fonction de  $C^\infty(M)$ ; elle est surjective, en effet soit  $w \in T'_p(M)$ , on considère  $v \in T_p(M)$  défini par  $v(\alpha) = w(f)$  où  $f$  est une fonction dont le germe est  $\alpha$ , (si  $g$  est une autre fonction dont le germe est aussi  $\alpha$ , d'après le lemme  $w(f - g) = 0$ , donc

$$w(f) = w(g)$$

et  $v(\alpha)$  ne dépend pas du choix de  $f$ ). Au vecteur tangent  $v$  correspond dans  $T_p(M)$ ,  $v'$  défini par

$$v'(f) = v(fp) = w(f)$$

donc  $w$  correspond à  $v$ , l'application est donc surjective.

Et  $T_p(M)$  et  $T'_p(M)$  peuvent être identifiés. Et on notera souvent de la même façon l'élément de  $T_p(M)$  et son correspondant dans  $T'_p(M)$ .

Si, autour du point  $p$ , on a un système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$ , l'application qui à  $\alpha$ , germe de  $f$ , associe  $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)$  est un vecteur tangent d'origine  $p$ .

Théorème :

Soit  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées locales définies dans un voisinage de  $p$ . Alors les  $n$  vecteurs tangents,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

constituent une base de l'espace vectoriel  $T_p(M)$  .

Et ce théorème entraînera que la dimension de  $T_p(M)$  est égale à celle de  $M$ .

D'abord les  $n$  vecteurs tangents  $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$  sont linéairement indépendants car si il existe une relation

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = 0 \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad ,$$

alors en faisant agir ce vecteur nul sur les fonctions coordonnées, on a

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = \lambda_j \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, n \quad .$$

Il faut montrer maintenant que tout élément de  $T_p(M)$  s'exprime linéairement en fonction des  $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$  .

Soit  $v$  un élément de  $T_p(M)$  . Soit  $f_p$  le germe d'une fonction différentiable  $f$  en  $p$ , il existe un voisinage de  $p$  où  $f$  s'exprime par  $f(q) = F(x^1(q), \dots, x^n(q))$  où  $F$  est une fonction différentiable définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant le point  $(x^1(p), \dots, x^n(p)) = u_0$  .

D'après la formule de Taylor, on a

$$F(u^1, \dots, u^n) = F(u_0^1, \dots, u_0^n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial u^i} (u^i - u_0^i) + \sum_{i,j} G_{ij}(u) (u^i - u_0^i) (u^j - u_0^j) + \dots$$

et la fonction  $f$  s'exprime par :

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} (p) (x^i - u_0^i) + \sum_{i,j} H_{ij} (x^i - u_0^i) (x^j - u_0^j) + \dots$$

où  $H_{ij}$  est une fonction différentiable dans un voisinage de  $p$ .  
Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des germes de fonctions différentiables nulles au point  $p$ , alors

$$v(\alpha\beta) = 0 \quad \text{pour tout } v \in T_p(M)$$

car

$$v(\alpha\beta) = v(\alpha) \beta(p) + \alpha(p) v(\beta) \quad ;$$

donc en appliquant  $v$  à  $f_p$ , les termes à partir de l'ordre 2 seront nuls et on aura

$$v(f_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} (p) v(x^i_p) = \left[ \sum_{i=1}^n v(x^i_p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right] (f_p) \quad ,$$

ceci pour tout germe  $f_p$ . Donc

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i_p) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

et les  $n$  vecteurs  $\left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$  forment une base de  $T_p(M)$ .

Courbes différentiables :

Par définition une courbe différentiable est une application continue  $\varphi$  d'un intervalle  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ , dans  $M$  telle que pour toute  $f \in C^\infty(M)$  la fonction  $f \circ \varphi$  soit différentiable sur  $]a, b[$  .

Soit  $t_0$  un point de  $]a, b[$  , on considère l'application qui au germe d'une fonction  $f$  différentiable autour du point  $\varphi(t_0)$  de  $M$ , fait correspondre

$$\left[ \frac{d}{dt} (f \circ \varphi) \right]_{t=t_0} ,$$

on vérifie que c'est un vecteur tangent à  $M$  d'origine  $\varphi(t_0)$  , c'est par définition le vecteur tangent à la courbe  $\varphi$  au point  $\varphi(t_0)$  , on le note  $\dot{\varphi}(t_0)$  . Si  $(x^1, \dots, x^n)$  sont des coordonnées locales autour du point  $\varphi(t_0)$  , il existe des fonctions  $f^1, \dots, f^n$  de  $C^\infty(M)$  qui coïncident respectivement avec  $x^1, \dots, x^n$  dans un voisinage de  $\varphi(t_0)$  .

Les fonctions

$$\varphi^i = f^i \circ \varphi$$

sont différentiables et

$$\varphi^i(t) = x^i(\varphi(t))$$

pour  $t$  assez voisin de  $t_0$  . Par rapport à la base

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(t_0)} ,$$

le vecteur tangent  $\dot{\varphi}(t_0)$  s'exprime de la façon suivante :

$$\dot{\varphi}(t_0) = \sum_{i=1}^n \left[ \dot{\varphi}(t_0) f^i \right] \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(t_0)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} (f^i \circ \varphi) \right]_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(t_0)} \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{d\varphi^i}{dt} \right)_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\varphi(t_0)} \cdot
\end{aligned}$$

Définition :

Une forme linéaire  $\xi$  sur l'espace vectoriel  $T_p(M)$  (c'est-à-dire un élément du dual  $T_p^*(M)$ ) est appelée un covecteur de  $M$  d'origine  $p$ .

Par exemple si  $f$  est une fonction différentiable dans un voisinage de  $p$ , soit  $(df)_p$  la différentielle de  $f$  en  $p$  qui à  $v \in T_p(M)$  associe

$$(df)_p(v) = v(f_p) \quad ,$$

c'est un covecteur de  $M$  d'origine  $p$ . Si  $(x^1, \dots, x^n)$  est un système de coordonnées locales au voisinage de  $p$ ,

$$(dx^1)_p \dots (dx^n)_p$$

forment une base de  $T_p^*(M)$ , duale de la base

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$$

de  $T_p(M)$ , en effet ce sont  $n$  formes linéaires sur  $T_p(M)$  linéairement indépendantes car si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (dx^i)_p = 0 \quad ,$$

en appliquant cette forme nulle à  $\left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p$ , on a

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p (x^i) = \lambda_j$$

car

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (x^i) = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p (x^i) = \delta_{ij}$$

signifie que

$$\langle (dx^i)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p \rangle = \delta_{ij}$$

c'est-à-dire que cette base est duale de la base  $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$  de  $T_p(M)$ . Pour une fonction  $f \in C^\infty(M)$ , on a :

$$(df)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) (dx^i)_p$$

car

$$\begin{aligned} (df)_p(v) &= v(f_p) \\ &= \sum_{i=1}^n v(x_p^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) v(x_p^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) (dx^i)_p(v) \quad . \end{aligned}$$

#### §4. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Soient  $M$  et  $M'$  deux variétés différentiables et  $\varphi$  une application de  $M$  dans  $M'$ .

Définitions :

L'application  $\varphi$  est différentiable si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- 1)  $\varphi$  est continue.
- 2) Pour tout  $f \in C^\infty(M')$  ,  $f \circ \varphi \in C^\infty(M)$  .

L'application  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $M$  sur  $M'$  si c'est une application bijective et si  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  sont différentiables.

Différentielle d'une application différentiable :

Soit  $\varphi$  une application différentiable de  $M$  dans  $M'$ .

Soit

$$(\varphi_*)_p : T_p(M) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(M')$$

l'application définie de la façon suivante : soit  $v \in T_p(M)$  ,  $v$  est une application de  $C^\infty(M)$  dans  $\mathbb{R}$ . On lui fait correspondre

$$(\varphi_*)_p(v) = u \quad ,$$

application de  $C^\infty(M')$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par  $u(f) = v(f \circ \varphi)$  . On vérifie que  $u \in T_{\varphi(p)}(M')$  (c'est-à-dire que  $u$  est linéaire et vérifie  $u(fg) = u(f)g + f u(g)$  ) .

On vérifie que  $(\varphi^*)_p$  est une application linéaire de  $T_p(M)$  dans  $T_{\varphi(p)}(M')$ , c'est par définition la différentielle de l'application  $\varphi$  au point  $p$ ; elle est définie par

$$\boxed{((\varphi^*)_p v) f = v(f \circ \varphi)} \quad \forall f \in C^\infty(M) .$$

Soit  $(\varphi^*)_p$  la transposée de  $(\varphi^*)_p$ . C'est une application de  $T_{\varphi(p)}^*(M')$  (espace vectoriel dual de  $T_{\varphi(p)}(M')$ ) dans  $T_p^*(M)$  (espace vectoriel dual de  $T_p(M)$ ); à  $\alpha \in T_{\varphi(p)}^*(M')$ , elle fait correspondre  $(\varphi^*)_p \alpha$  telle que

$$\langle v, (\varphi^*)_p \alpha \rangle = \langle (\varphi^*)_p v, \alpha \rangle .$$

Si  $f$  est une application différentiable définie dans un voisinage de  $\varphi(p)$ , on a :

$$(\varphi^*)_p (\alpha f)_{\varphi(p)} = (d(f \circ \varphi))_p$$

Définition :

Le rang de l'application différentiable  $\varphi$  au point  $p$  est le rang de la différentielle  $(\varphi^*)_p$  (en tant qu'application linéaire de l'espace vectoriel  $T_p(M)$  dans l'espace vectoriel  $T_{\varphi(p)}(M')$ ).

On a

$$\text{rang}_p(\varphi) \leq \text{Min}(\dim M, \dim M') .$$

Soit  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées locales dans un voisinage de  $p$  et  $(y^1, \dots, y^m)$  un système de coordonnées locales dans un voisinage de  $p' = \varphi(p)$ .



Il existe

$$f^1, \dots, f^m \in C^\infty(M')$$

et un voisinage  $U$  de  $p'$  tels que sur  $U$ ,

$$f^i = y^i$$

(prolongement d'une fonction définie sur un ouvert) pour  $i = 1, \dots, m$ .

Soit  $V$  un voisinage de  $p$  tel que

$$\varphi(V) \subset U \quad .$$

Soit  $\varphi^i = f^i \circ \varphi$ , ce sont des fonctions différentiables sur  $M$ , et si  $q \in V$ ,

$$\varphi^i(q) = \varphi^i(x^1(q), \dots, x^n(q)) \quad .$$

Si on regarde l'action de  $(\varphi_*)_p$  sur les vecteurs de base de  $T_p(M)$ , on a

$$(\varphi_*)_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} (p) \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \quad .$$

Le rang de l'application  $\varphi$ , qui est par définition le rang de  $(\varphi_*)_p$  est donc le rang de la matrice

$$(a_{ij}) = \left( \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} (p) \right)$$

à  $n$  lignes et  $m$  colonnes.

Définitions :

Une application  $\varphi$  différentiable de  $M$  dans  $M'$  est dite une immersion si  $(\varphi_*)_p$  est injective pour tout  $p \in M$ .  
L'application  $\varphi$  est dite un plongement si c'est une immersion et si elle est injective.

Le fait que  $(\varphi_*)_p$  soit injective signifie que le rang de  $\varphi$  au point  $p$  est égal à la dimension de  $M$  ; et pour cela il est nécessaire que la dimension de  $M'$  soit supérieure ou égale à celle de  $M$ .

Théorème (Whitney) :

Toute variété différentiable de dimension  $n$ , à base dénombrable peut être plongée dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

Ici on démontrera seulement le théorème suivant :

Théorème :

Toute variété différentiable compacte peut être plongée dans  $\mathbb{R}^N$  pour  $N$  assez grand.

En effet pour tout point  $p \in M$ , il existe un voisinage  $U_p$  de  $p$  et  $n$  fonctions  $f_p^1, \dots, f_p^n$  différentiables sur  $M$  telles que sur  $U_p$ ,

$$(f_p^1, \dots, f_p^n)$$

soit un système de coordonnées locales. La famille  $\{U_p\}_{p \in M}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ , dont on peut extraire un recouvrement fini  $U_{p_1}, U_{p_2}, \dots, U_{p_k}$ . Pour tout  $U_{p_j}$ ,

il existe une fonction  $f_{p_j}^0 \in C^\infty(M)$ , nulle sur le complémentaire de  $U_{p_j}$  et strictement positive sur  $U_{p_j}$  (car les  $U_p$  peuvent être choisis isomorphes à la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  et alors

$$1 - (x^1)^2 - (x^2)^2 \dots - (x^n)^2$$

répond à la question). On considère l'application  $\varphi$  de  $M$  dans  $\mathbb{R}^{(n+1)k}$  qui à  $q$  fait correspondre

$$(f_{p_1}^0(q), f_{p_1}^1(q), \dots, f_{p_1}^n(q), f_{p_2}^0(q), \dots, f_{p_2}^n(q), \dots, f_{p_j}^i(q), \\ \dots, f_{p_k}^0(q), f_{p_k}^1(q), \dots, f_{p_k}^n(q) ) .$$

C'est une application différentiable. Elle est injective, en effet si  $\varphi(q) = \varphi(q')$ , le point  $q$  appartient à au moins un  $U_{p_j}$  pour lequel  $f_{p_j}^0(q)$  est donc positif, donc  $f_{p_j}^0(q')$ , qui lui est égal, est positif ce qui signifie que  $q' \in U_{p_j}$  et pour tout  $i$  de 1 à  $n$ ,

$$f_{p_j}^i(q') = f_{p_j}^i(q) ,$$

or tout point de  $U_{p_j}$  est caractérisé par ses coordonnées  $f_{p_j}^i$  donc

$$q' = q .$$

L'application  $(\varphi_*)_q$  est injective pour tout  $q \in M$ , en effet soit  $u \in T_q(M)$ , si  $(\varphi_*)_q u = 0$ , alors

$$[(\varphi_*)_q u] x_j^i = 0$$

pour toutes les fonctions coordonnées  $x_j^i$  ( $i = 0, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, k$ ) de  $\mathbb{R}^{(n+1)k}$ , c'est-à-dire

$$u (x_j^i \circ \varphi) = 0$$

or  $x_j^i \circ \varphi = f_{p_j}^i$ , donc

$$u f_{p_j}^i = 0$$

pour tout  $i$  (de 0 à  $n$ ) et tout  $j$  (de 1 à  $k$ ). Le point  $q$  appartient à au moins un  $U_{p_j}$  et  $u$  est nul sur les  $n$  fonctions coordonnées de cet ouvert, donc  $u = 0$ . L'application  $(\varphi_*)_q$  est donc injective pour tout  $q \in M$  et  $\varphi$  est donc un plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R}^{(n+1)k}$ .

## §5. METRIQUES RIEMANNIENNES ET ISOMETRIES

Définition :

Une métrique riemannienne  $g$  sur  $M$  est une application qui à tout point  $p$  de  $M$  fait correspondre un produit scalaire  $g_p$  de l'espace vectoriel  $T_p(M)$ .

Si  $x^1, \dots, x^n$  sont des coordonnées locales dans un voisinage  $U$  du point  $p$ , soit

$$g_{ij}(q) = g_q \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_q, \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_q \right) ;$$

les  $g_{ij}$  sont des fonctions définies sur  $U$ , appelées composantes de  $g$  par rapport à  $(x^1, \dots, x^n)$ . La matrice  $(g_{ij}(q))$  est symétrique, définie positive, puisque par définition  $g_q$  est un produit scalaire.

La métrique  $g$  est dite différentiable si ses composantes sont différentiables (ce qui ne dépend pas du choix des coordonnées locales). Dorénavant on sous-entendra toujours différentiable pour une métrique riemannienne.

Si  $u$  est un vecteur tangent d'origine  $p$ , alors  $\|u\| = \sqrt{g_p(u, u)}$  est la norme de  $u$  (ou longueur de  $u$ ).

Définition :

Une variété riemannienne est un couple, d'une variété différentiable et d'une métrique riemannienne sur elle.

Soit  $\varphi$  une application différentiable d'une variété riemannienne  $M$  dans une variété riemannienne  $M'$ , on dit que  $\varphi$  est isométrique si pour tout  $p \in M$  et tout  $u \in T_p(M)$ , la norme  $(\varphi_*)_p u$  est égale à la norme de  $u$ .

Si  $\varphi$  est un difféomorphisme isométrique de  $M$ , variété riemannienne, on dit que c'est une isométrie.

Exemple : Espace Euclidien.

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$ . Si  $v \in V$ ,

$$v = \sum_{i=1}^n x^i(v) e_i$$

et on peut introduire une structure de variété différentiable dans  $V$  telle que

$$x^1, \dots, x^n$$

soient des coordonnées locales, elles seront des coordonnées globales car elles sont valables autour de tous les points de  $V$ . Soit  $M(V)$  la variété différentiable ainsi obtenue. Sur  $M(V)$ , on peut définir une métrique riemannienne de la façon suivante pour  $p \in M$ ,  $T_p(P)$  est engendré par  $(\frac{\partial}{\partial x^1})_p \dots (\frac{\partial}{\partial x^n})_p$  ; on prendra

$$g_p \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p, \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

La variété riemannienne ainsi obtenue est  $E^n$ , espace euclidien de dimension  $n$ . C'est bien l'espace euclidien habituel et une isométrie est une isométrie au sens habituel.

§6. SOUS-VARIETESDéfinition :

Une variété différentiable M est dite une sous-variété d'une variété différentiable M' si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- 1) En tant qu'ensemble, M est un sous-ensemble de M'.
- 2) L'application identique de M dans M' est un plongement de M dans M'.

Remarque :

La topologie de M peut ne pas être la topologie induite par celle de M'. Si la topologie de M est celle induite par M', alors M est dite sous variété régulière de M' (ou régulièrement plongée dans M'). Si, de plus, M est un sous-ensemble fermé de M', on dit que c'est une sous-variété fermée de M'.

Exemple :

Soit  $M' = \mathbb{R}^2$  et  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}'$  où  $\mathbb{R}'$  est l'ensemble des réels muni de la topologie discrète, alors M est une variété différentiable de dimension 1 (car autour de tout point  $(a, b)$ , on peut choisir l'ouvert  $\mathbb{R} \times \{b\}$ , isomorphe à  $\mathbb{R}$ ). En tant qu'ensemble  $M = M'$  et l'application identique  $i$  de M dans M' est un plongement (car  $i$  est injective et  $(i_*)_{(a, b)}$  fait correspondre au vecteur tangent  $\alpha \frac{\partial}{\partial t}$  le vecteur tangent  $\alpha \frac{\partial}{\partial x}$ , elle est bien injective). Donc M est une sous-variété de M', mais ce n'est pas une sous-variété régulière.

Lemme :

Soit M une variété différentiable de dimension n, et M'  
une variété différentiable de dimension m. Soit  $\varphi$  une appli-  
cation différentiable de M dans M' telle que  $(\varphi_*)_p$  soit  
injective (ce qui suppose  $m \geq n$ ). Alors il existe des  
systèmes de coordonnées locales  $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  autour de p  
et  $(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^m)$  autour de  $\varphi(p)$  tels que

$$\bar{y}^i \circ \varphi = \bar{x}^i$$

pour  $i = 1, \dots, n$  et

$$\bar{y}^j \circ \varphi = 0$$

pour  $j = n + 1, \dots, m$  .

En effet, soit  $(x^1, \dots, x^n)$  un système de coordonnées locales de M autour de p tel que

$$x^i(p) = 0 \quad \text{pour tout } i$$

et soit  $(y^1, \dots, y^m)$  un système de coordonnées locales  $(y^1, \dots, y^m)$  de M' autour de  $\varphi(p)$  tel que

$$y^i(\varphi(p)) = 0 \quad \text{pour tout } i .$$

Si on pose

$$\varphi^i = y^i \circ \varphi \quad \text{pour } i = 1, \dots, m ,$$

le fait que  $(\varphi_*)_p$  est injective signifie que la matrice à m lignes et n colonnes,

$$\left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} (p) \right)$$

est de rang n ; on suppose (question de numérotage) que la matrice carrée d'ordre n

$$\left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} (p) \right) \quad \begin{array}{l} \text{où } i = 1, \dots, n \\ \text{et } j = 1, \dots, n \end{array}$$

a un déterminant non nul.

Soit

$$\bar{x}^i = \varphi^i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n,$$

alors  $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  est un système de coordonnées locales autour de  $p$  (car les  $\varphi^i$  sont  $n$  fonctions différentiables de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  dont le déterminant jacobien

$$\left| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} (p) \right|$$

est non nul). Pour  $j = n + 1, \dots, m$ , les fonctions  $\varphi^j$  s'expriment par

$$\varphi^j = F^j(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$$

où les  $F^j$  sont des fonctions différentiables dans un voisinage de  $0$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit

$$\bar{y}^i = y^i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

et

$$\bar{y}_j = y_j - F^j(y^1, \dots, y^n) \quad \text{pour } j = n + 1, \dots, m,$$

alors le déterminant de la matrice

$$\left( \frac{\partial \bar{y}^j}{\partial y^k} (\varphi(p)) \right) \quad \begin{array}{l} \text{où } j = 1, \dots, m \\ \text{et } k = 1, \dots, m \end{array}$$

est non nul et  $(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^m)$  est un système de coordonnées locales dans  $M$  autour de  $\varphi(p)$ . Pour  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\bar{y}^i \circ \varphi = y^i \circ \varphi = \varphi^i = \bar{x}^i$$

et pour  $j = n + 1, \dots, m$ , on a

$$\begin{aligned} \bar{y}^j \circ \varphi &= y^j \circ \varphi - F^j(y^1 \circ \varphi, \dots, y^n \circ \varphi) = y^j \circ \varphi - F^j(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \\ &= \varphi^j - \varphi^j = 0. \end{aligned}$$

Les systèmes  $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  et  $(\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^m)$  répondent donc bien à la question.



Si  $M$  (de dimension  $n$ ) est une sous-variété de  $M'$  (de dimension  $m$ ) par définition d'une sous-variété l'application identique  $i$  est telle que  $(i_*)_p$  est injective, donc d'après ce lemme, il existe des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $M$  au voisinage de  $p$  et  $(y^1, \dots, y^m)$  de  $M'$  au voisinage de  $p$  telles que

$$y^i \circ i = x^i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

et

$$y^j \circ i = 0 \quad \text{pour } j = n + 1, \dots, m .$$

Pour  $\epsilon > 0$ , soit

$$U_M = \{q \in M, |x^i(q)| < \epsilon \quad i = 1, \dots, n\}$$

et soit

$$U = \{q \in M', |y^i(q)| < \epsilon \quad i = 1, \dots, m\}$$

alors

$$U_M = \{q \in U ; y^{n+1}(q) = \dots = y^m(q) = 0\} .$$

Si  $M$  est une sous-variété régulière de  $M'$ , il existe un voisinage  $V$  de  $p$  dans  $M'$  tel que

$$V \subset U$$

et tel que

$$V_M = V \cap M$$

Soit l'ensemble

$$\{q \in V ; y^{n+1}(q) = \dots = y^m(q) = 0\} .$$

C'est-à-dire que la sous variété  $M$  est localement définie par les équations

$$y^{n+1} = 0, \dots, y^m = 0 .$$

Le théorème suivant est une sorte de réciproque de cette propriété.

Théorème :

Soit  $M'$  une variété différentiable de dimension  $m$  et soit  $M$  un sous-ensemble de  $M'$  et  $k$  un entier vérifiant les conditions :

1) Pour tout  $p \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$  dans  $M'$  et des fonctions  $f^1, \dots, f^k$  différentiables sur  $U$  tels que

$$U \cap M = \{q \in U ; f^1(q) = \dots = f^k(q) = 0\}$$

2) Les différentielles

$$(df^1)_p, \dots, (df^k)_p$$

sont linéairement indépendantes.

Alors  $M$  est une sous-variété régulière de  $M'$  de dimension  $m - k$ .

De ce théorème, on déduit le résultat suivant :

Corollaire :

Si  $M'$  est une variété différentiable de dimension  $m$  et  $f^1, \dots, f^k$  des fonctions appartenant à  $C^\infty(M')$ . Soit

$$M = \{q \in M' ; f^1(q) = \dots = f^k(q) = 0\} .$$

Si les différentielles

$$(df^1)_q, \dots, (df^k)_q$$

sont linéairement indépendantes pour tout point  $q \in M$ , alors  $M$  est une sous-variété fermée de  $M'$  de dimension  $m - k$ .

Cette sous-variété est fermée car c'est l'intersection des images réciproques de 0 par les applications continues

$$f^1, \dots, f^k .$$

Démonstration du théorème :

Introduisons dans  $M$  la topologie induite par celle de  $M'$ . Pour tout  $p \in M$ , on peut trouver  $m - k$  fonctions  $y^1, \dots, y^{m-k}$  définies et différentiables autour de  $p$  telles que les différentielles

$$(dy^1)_p, \dots, (dy^{m-k})_p, (df^1)_p, \dots, (df^k)_p$$

soient linéairement indépendantes. Posons

$$n = m - k \quad \text{et} \quad y^{n+i} = f^i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, k .$$

Alors les fonctions  $y^1, \dots, y^m$  forment un système de coordonnées locales de  $M'$  dans un voisinage  $V$  de  $p$ . En choisissant  $V$  suffisamment petit, on peut supposer, d'après l'hypothèse du lemme, que

$$V = \{q ; |y^i(q)| < \epsilon, i = 1, \dots, m\}$$

et

$$V \cap M = \{q \in V ; y^{n+1}(q) = \dots = y^m(q) = 0\} .$$

Alors l'application  $\psi$  du voisinage  $V \cap M$  de  $p$  (dans  $M$ ) dans  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$\psi(q) = (y^1(q), \dots, y^n(q))$$

est un homéomorphisme de  $V \cap M$  sur le cube

$$\{u \in \mathbb{R}^n ; |u^i| < \epsilon, i = 1, \dots, n\} ,$$

$M$  est alors une variété topologique de dimension  $n$  et on peut montrer sans peine que  $M$  est une sous-variété de  $M$ .

Exemple :

La sphère  $S^n$  définie par l'équation

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = p^2$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

## §7. CHAMPS DE VECTEURS

Soit toujours  $M$  une variété différentiable de dimension  $n$ .

Définition :

Un champ de vecteurs  $X$  dans un sous-ensemble  $A$  de  $M$  est une application qui à tout point  $p$  de  $A$  fait correspondre un vecteur tangent  $X_p$  appartenant à  $T_p(M)$  .

Si le champ de vecteurs  $X$  est défini dans un ouvert  $U$ , soit  $p$  un point de  $U$  et soient  $x^1, \dots, x^n$  des coordonnées locales dans  $V$ , voisinage de  $p$  contenu dans  $U$ . Pour tout  $q \in V$ , le vecteur  $X_q$  s'exprime par rapport à la base  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_q$  de  $T_q(M)$  par

$$\sum_{i=1}^n \xi^i(q) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_q .$$

Les  $\xi^i$  sont les composantes du champ de vecteur relativement aux coordonnées  $x^1, \dots, x^n$  .

Définition :

Le champ de vecteur  $X$  est différentiable dans un voisinage de  $p$ , si, dans ce voisinage,  $\xi^1, \dots, \xi^n$  sont des fonctions différentiables. Si  $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  est un autre système de coordonnées locales autour de  $p$ , les composantes de  $X$  sont

$$\bar{\xi}^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \xi^j(q) ,$$

ce qui montre que cette définition est indépendante du choix des coordonnées.

Dorénavant, par "champ de vecteurs", on entendra un champ de vecteurs défini et différentiable sur M tout entier.

Soit  $\mathfrak{X}(M)$  l'ensemble de tous les champs de vecteurs définis sur M,; c'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  si on définit la multiplication par un scalaire  $\lambda$  par

$$(\lambda X)_p = \lambda X_p$$

et la somme par

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad ;$$

d'autre part c'est un module sur  $C^\infty(M)$  car on peut définir la multiplication d'un champ de vecteur X par une fonction  $f \in C^\infty(M)$  par :

$$(fX)_p = f(p) X_p$$

et alors on a

$$f(X + Y) = fX + fY$$

et

$$(fg)X = f(gX) \quad .$$

Définition :

Soit  $\mathfrak{A}$  une algèbre sur un corps  $k$ . Une dérivation  $D$  de  $\mathfrak{A}$  est un endomorphisme d'espace vectoriel de  $\mathfrak{A}$  tel que

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy) \quad .$$

Définition :

Une algèbre  $\mathfrak{G}$  sur  $k$ , dont la loi de composition est notée

$$(x, y) \longrightarrow [x, y]$$

est une algèbre de Lie si les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$1) \quad \underline{[x, x] = 0 \text{ pour tout } x \in \mathfrak{G} .}$$

$$2) \quad \underline{[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0}$$

pour tous  $x, y, z \in \mathfrak{G} .$

Remarque :

La propriété 1) entraîne que :

$$0 = [x+y, x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x]$$

c'est-à-dire que la multiplication est anticommutative, et réciproquement l'anticommutativité entraîne la propriété 1) si la caractéristique de  $k$  est différente de 2..

Exemple 1 :

Soit  $V$  un espace vectoriel. Soit  $\mathfrak{GL}(V)$  l'espace vectoriel de tous les endomorphismes de  $V$ . Si on considère la multiplication

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha ,$$

$\mathfrak{GL}(V)$  est une algèbre de Lie.

Exemple 2 :

Soit  $\mathfrak{A}$  une algèbre et soit  $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$  l'espace vectoriel des dérivations de  $\mathfrak{A}$  ; si

$$D, D' \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) ,$$

ce sont en particulier des endomorphismes de  $V$ , on vérifie que

$$[D, D'] = DD' - D'D$$

est une dérivation de  $\mathfrak{A}$  et  $\mathcal{D}(\mathfrak{A})$  est donc une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{GL}(\mathfrak{A})$  .

Dérivation associée à un champ de vecteurs :

Soit  $\mathfrak{X}(M)$  l'espace vectoriel de tous les champs de vecteurs sur  $M$ . Soit  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ; on considère l'application  $D_X$  de  $C^\infty(M)$  dans  $C^\infty(M)$  qui à  $f$  associe

$$D_X f = Xf \quad ,$$

$Xf$  étant défini par

$$(Xf)(p) = X_p f \quad \text{pour tout } p \in M \quad .$$

Car  $Xf$  est bien dans  $C^\infty(M)$  , car  $f$  s'exprime localement par une fonction

$$\varphi(x^1, \dots, x^n)$$

différentiable des coordonnées  $x^1, \dots, x^n$  et si

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

alors

$$Xf = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial \varphi(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i}$$

qui est une fonction différentiable. L'application  $D_X$  est une dérivation de l'algèbre  $C^\infty(M)$  ; en effet

$$(D_X(fg))(p) = (X fg)_p = X_p(fg)$$

et comme  $X_p$  est un vecteur tangent

$$\begin{aligned} X_p(fg) &= X_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p g \\ &= (D_X f)(p) g(p) + f(p) (D_X g)(p) \quad , \end{aligned}$$

ceci pour tout point  $p$ , donc

$$D_X(fg) = (D_X f)g + f(D_X g) \quad .$$

Réciproquement :

Proposition :

Etant donnée une dérivation D de l'algèbre  $C^\infty(M)$ ,  
il existe un champ de vecteurs X et un seul tel que

$$D = D_X .$$

En effet pour  $p \in M$ , on considère la fonction  $X_p$  de  $C^\infty(M)$  dans  $\mathbb{R}$  qui à f associe

$$X_p f = (Df)(p) ,$$

c'est un vecteur tangent car

$$X_p (fg) = (X_p f) g(p) + f(p) (X_p g)$$

du fait que D est une dérivation. D'autre part, le champ de vecteur

$$X : p \longrightarrow X_p$$

est différentiable, car pour  $p \in M$ , il existe n fonctions

$$f^1, \dots, f^n \in C^\infty(M)$$

telles que les restrictions  $x^i$  des  $f^i$  à un voisinage V de p forment un système de coordonnées locales, et le champ de vecteurs X s'exprime par

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

dans V, où pour  $q \in V$ ,

$$\xi^i(q) = X_q x^i = X_q f^i = (Df^i)(q) ,$$

ce qui montre que les  $\xi^i$  sont des fonctions différentiables. Donc X est un champ de vecteur différentiable et il est tel que

$$D_X = D .$$

C'est le seul jouissant de cette propriété, en effet si Y en est un autre, on considère autour du point p les fonctions  $f^1, \dots, f^i$  susdites, alors pour  $q \in V$ ,  $X_q f^i$  et  $Y_q f^i$  sont égaux car ils sont égaux à  $(Df^i)(q)$ , or  $X_q f^i$  représente les coordonnées de  $X_q$  et  $Y_q f^i$  celles de  $Y_q$  par



rapport à

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \quad .$$

Donc X et Y ont mêmes coordonnées locales autour de tout point p, donc ils coïncident.

### Crochet de deux champs de vecteurs :

Si D et D' sont deux dérivations de  $C^\infty(M)$ , alors

$$[D, D'] = DD' - D'D \quad ,$$

est aussi une dérivation de  $C^\infty(M)$ . Donc étant donnés deux champs de vecteurs X et Y,  $[D_X, D_Y]$  est une dérivation et d'après la proposition précédente il existe un champ de vecteur Z et un seul tel que

$$D_Z = [D_X, D_Y] \quad .$$

Par définition, ce champ Z est le crochet de Poisson (ou de Lie) de X et Y, on le note  $[X, Y]$  et il est défini par

$$[D_X, D_Y] = D_{[X, Y]} \quad .$$

Par définition, il agit sur une fonction f de la façon suivante :

$$[X, Y]f = D_{[X, Y]} f = [D_X, D_Y]f = D_X(D_Y f) - D_Y(D_X f) \quad .$$

Ce crochet jouit des propriétés suivantes :

- 1)  $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$   
 $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$   
 $[X, \lambda Y] = [\lambda X, Y] = \lambda[X, Y]$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$

(bilinearité).

- 2)  $[X, Y] = -[Y, X]$  .

- 3)  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

(identité de Jacobi).

4)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$  pour  $f, g \in C^\infty(M)$  .

Les 3 premières de ces propriétés montrent que, munie du crochet de Poisson,  $\mathfrak{X}(M)$  est une algèbre de Lie, isomorphe à l'algèbre de Lie des dérivations de  $C^\infty(M)$  .

Soient maintenant  $M$  et  $M'$  deux variétés différentiables et  $\varphi$  une application différentiable de  $M$  dans  $M'$ . On peut considérer l'application  $\varphi^*$  de  $C^\infty(M')$  dans  $C^\infty(M)$  qui à  $f$  associe  $f \circ \varphi$  . Soient  $D$  et  $D'$  des dérivations respectivement de  $C^\infty(M)$  et de  $C^\infty(M')$  . On dit que le couple  $(D, D')$  est compatible avec  $\varphi$  si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M') & \xrightarrow{D'} & C^\infty(M') \\ \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ C^\infty(M) & \xrightarrow{D} & C^\infty(M) \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$\varphi^* \circ D' = D \circ \varphi^* .$$

De même si  $X$  et  $X'$  sont des champs de vecteurs sur  $M$  et  $M'$  respectivement, on dit que le couple  $(X, X')$  est compatible avec  $\varphi$  si  $(D_X, D_{X'})$  est compatible avec  $\varphi$ .

La condition nécessaire et suffisante pour que  $(X, X')$  soit compatible avec  $\varphi$  est que, pour tout  $p$  de  $M$ , on ait

$$X'_{\varphi(p)} = (\varphi_*)_p X_p .$$

En effet dire que  $(X, X')$  est compatible avec  $\varphi$ , c'est dire que  $(D_X, D_{X'})$  l'est, donc que

$$(\varphi^* \circ D_{X'})f = (D_X \circ \varphi^*)f$$

pour tout  $f \in C^\infty(M')$  ; or

$$(\varphi^* \circ D_{X'})f = X'f \circ \varphi$$

et

$$(D_X \circ \varphi^*) = X(f \circ \varphi)$$

et

$$X'f \circ \varphi = X(f \circ \varphi)$$

signifie que

$$X'_{\varphi(p)} f = \left[ (\varphi_*)_p X_p \right] f \quad . \quad \text{c.q.f.d.}$$

Si  $(D_1, D'_1)$  d'une part et  $(D_2, D'_2)$  d'autre part, sont compatibles avec  $\varphi$ , alors

$$(D_1 + D_2, D'_1 + D'_2)$$

est compatible avec  $\varphi$  et

$$\left( [D_1, D_2], [D'_1, D'_2] \right)$$

est compatible avec  $\varphi$  ; et on a les propriétés analogues pour les champs de vecteurs.

Si maintenant  $M' = M$ , si  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $M$ , alors  $\varphi^*$  est un automorphisme de  $C^\infty(M)$ . De manière générale, si  $\alpha$  et  $D$  sont respectivement un automorphisme et une dérivation d'une algèbre  $A$ , alors  $\alpha^{-1} D \alpha$  est une dérivation de  $A$ . Ici

$$(\varphi^*)^{-1} D_X \varphi^*$$

est donc une dérivation de  $C^\infty(M)$ , donc il existe un champ de vecteur  $X'$  et un seul tel que

$$D_{X'} = (\varphi^*)^{-1} D_X \varphi^* \quad ,$$

c'est-à-dire tel que

$$\varphi^* \circ D_{X'} = D_X \circ \varphi^*$$

c'est-à-dire que  $(X, X')$  est compatible avec  $\varphi$ . Donc étant donné  $\varphi$  et  $X$ , il existe  $X'$  unique tel que  $(X, X')$  soit compatible avec  $\varphi$ . Or,  $X'$  est défini par  $X'_{\varphi(p)} = (\varphi_*)_p X$ ,

donc

$$X' = \varphi_* X$$

où  $\varphi_*$  est un automorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{X}(M)$ , car si  $(X, \varphi_* X)$  et  $(Y, \varphi_* Y)$  sont compatibles avec  $\varphi$ , alors

$$([X, Y], [\varphi_* X, \varphi_* Y])$$

est compatible avec  $\varphi$ , donc

$$[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_* [X, Y] \quad .$$

Lemme :

Soient  $U$  un ouvert de  $M$  et  $Y$  un champ de vecteurs différentiables, dans  $U$ . Soit  $p$  un point de  $U$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de  $p$  tel que

$$\bar{V} \subset U$$

et un champ de vecteurs  $X$  dans  $M$  tels que

$$X = Y$$

dans  $V$  et

$$X = 0$$

sur le complémentaire de  $U$ .

On sait en effet qu'il existe un tel voisinage  $V$  et une fonction  $f \in C^\infty(M)$  telle que

$$f(q) = 1 \quad \text{si } q \in V$$

et

$$f(q) = 0 \quad \text{si } q \in \bar{U} \quad .$$

Alors le champ de vecteur  $X : q \longrightarrow X_q = f(q) Y_q$ , pour

$q \in U$  et  $q \longrightarrow X_q = 0$ , pour  $q \in \bar{U}$  répond à la question.

Proposition :

Etant donné un vecteur tangent  $v$  en un point  $p$ , il existe un champ de vecteur  $X$  tel que

$$X_p = v \quad .$$

En effet, si  $x^1, \dots, x^n$  sont des coordonnées locales dans  $U$ , voisinage de  $p$ , si

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \quad ,$$

on considère le champ de vecteur défini dans  $U$  par

$$Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad ;$$

alors un champ de vecteur  $X$ , existant d'après le lemme, tel que

$$X = Y$$

dans un voisinage de  $p$ , répond à la question.

## §8. CHAMPS DE VECTEURS ET GROUPES DE TRANSFORMATIONS A 1 PARAMETRE.

Soit  $M$  une variété différentiable. On désigne par  $\mathfrak{X}(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs définis sur  $M$ . Soit  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Définition :

Une courbe différentiable

$$C : ]a, b[ \longrightarrow M$$

est appelée une courbe intégrale du champ de vecteur  $X$  si pour tout  $t$  de  $]a, b[$ , on a

$$\dot{C}(t) = X_{C(t)} \quad .$$

Lemme :

Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux courbes intégrales d'un champ de vecteur  $X$ , définies sur les intervalles  $I_1$  et  $I_2$  de  $\mathbb{R}$ , contenant  $0$ , telles que

$$C_1(0) = C_2(0) \quad .$$

Alors

$$C_1(t) = C_2(t) \quad \text{pour } t \in I_1 \cap I_2 \quad .$$

Ceci découle de l'unicité de la solution d'un système d'équations différentielles.

Définition :

Une famille  $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de difféomorphismes  $\varphi_t$  de  $M$  est appelée un groupe de transformations à un paramètre si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- 1)  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$  pour tout  $s$  et tout  $t$  de  $\mathbb{R}$ .
- 2) L'application de  $\mathbb{R} \times M$  dans  $M$  qui à  $(t, p)$  fait correspondre  $\varphi_t(p)$  est différentiable. ( $\mathbb{R} \times M$  étant muni de la structure canonique de variété différentiable).

Remarque :

Ceci entraîne que  $\varphi_0$  est l'application identique et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t} \quad .$$

Soit  $\varphi_t$  un groupe de transformations à 1 paramètre ; si  $f \in C^\infty(M)$ ,  $f[\varphi_t(p)]$  est fonction différentiable de  $t$  si  $p$  est fixe, et on considère

$$X_p f = \left[ \frac{d f(\varphi_t(p))}{dt} \right]_{t=0} \quad .$$

L'application

$$X_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est un vecteur tangent, et l'application  $X$  qui à  $p$  fait correspondre  $X_p$  est différentiable. On a donc défini à partir de  $\{\varphi_t\}$  un champ de vecteur différentiable sur  $M$ , on l'appelle la transformation infinitésimale du groupe de transformations  $\{\varphi_t\}$ . On considère la courbe

$$C_p : ]-\infty, +\infty[ \longrightarrow M$$

définie par

$$C_p(t) = \varphi_t(p) \quad ,$$

c'est une courbe intégrale de  $X$ , en effet

$$\begin{aligned} \dot{C}_p(t_0) &= \left[ \frac{d f(C_p(t))}{dt} \right]_{t=t_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f[C_p(t_0 + s)] - f[C_p(t_0)]}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f[\varphi_{t_0+s}(p)] - f[\varphi_{t_0}(p)]}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f[\varphi_s(\varphi_{t_0}(p))] - f[\varphi_{t_0}(p)]}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f[\varphi_s(C_p(t_0))] - f[\varphi_0(C_p(t_0))]}{s} \\ &= \frac{df[\varphi_s(C_p(t_0))]}{ds} \Big|_{t=0} = X_{C_p(t_0)} \cdot f . \end{aligned}$$

(L'ensemble des  $\varphi_t(p)$  pour  $t \in \mathbb{R}$  s'appelle l'orbite de  $p$  par  $\varphi_t$ ). Si deux groupes de transformations à un paramètre  $\{\varphi_t\}$  et  $\{\psi_t\}$  ont même transformation infinitésimale  $X$ , ils coïncident. En effet les courbes

$$t \longrightarrow \varphi_t(p) \quad \text{et} \quad t \longrightarrow \psi_t(p)$$

sont des courbes intégrales du champ  $X$  et

$$\varphi_0(p) = \psi_0(p)$$

car  $\varphi_0 = \psi_0 =$  l'identité ; donc d'après le lemme ci-dessus

$$\varphi_t(p) = \psi_t(p) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} ,$$

et cette égalité est vraie pour tout  $p \in M$  , donc

$$\varphi_t = \psi_t \quad .$$

Définition :

Un champ de vecteur  $X$  est dit complet s'il existe un groupe de transformations à un paramètre  $\{\varphi_t\}$  dont  $X$  est la transformation infinitésimale (et il en existe alors un seul, d'après ce qui précède). Le groupe de transformations  $\{\varphi_t\}$  est dit engendré par  $X$  et on pose par définition

$$\underline{\varphi_t = \text{Exp } tX} \quad .$$

On considère  $(\text{Exp } tX)^*$  , automorphisme de  $C^\infty(M)$  défini par

$$(\text{Exp } tX)^* f = f \circ \text{Exp } tX \quad .$$

Cet automorphisme s'exprime de la façon suivante :

$$\boxed{(\text{Exp } tX)^* = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} D_X^m}$$

en un sens que l'on précisera, et cela justifie la notation exponentielle. En effet, pour  $p \in M$  , soit

$$F(t, p) = ((\text{Exp } tX)^* f)(p) = (f \circ \text{Exp } tX)(p) \quad ,$$

c'est une fonction différentiable sur  $\mathbb{R} \times M$  et d'après la formule de Taylor, on peut écrire

$$F(t, p) = F(0, p) + t \frac{\partial F}{\partial t}(0, p) + \dots + \frac{t^m}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial t^m}(0, p) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} F}{\partial t^{m+1}}(\theta t, p)$$

où  $\theta$  est compris entre 0 et 1. Par récurrence sur  $n$ , on va montrer que

$$(D_X^k f)(p) = \frac{\partial^k F}{\partial t^k}(0, p) \quad ;$$



en effet pour  $k = 1$ , on a

$$(D_X f)(p) = X_p f = \frac{\partial F}{\partial t}(0, p) .$$

Si on suppose le résultat montré jusqu'à  $k = n$ , on a pour  $k = n + 1$ ,

$$\begin{aligned} (D_X^{n+1} f)(p) &= (D_X(D_X^n f))(p) = X_p \cdot D_X^n f = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[ (D_X^n f) \circ \text{Exp } sX(p) - (D_X^n f)(p) \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial^n F}{\partial t^n}(0, \text{Exp } sX(p)) - \frac{\partial^n F}{\partial t^n}(0, p) \right] \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{aligned} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[ \left[ \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(\text{Exp } tX(\text{Exp } sX(p))) \right]_{t=0} - \left[ \frac{\partial^n}{\partial t^n} f(\text{Exp } tX(p)) \right]_{t=0} \right] , \end{aligned}$$

et comme

$$\text{Exp } tX(\text{Exp } sX(p)) = \text{Exp}(t+s)X(p) = \text{Exp } sX(\text{Exp } tX(p))$$

cette limite vaut :

$$\left[ \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} f(\text{Exp } tX(p)) \right]_{t=0} = \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} F(0, p) . \quad \text{c.q.f.d.}$$

Et alors d'après la formule de Taylor, on a

$$((\text{Exp } tX)^* f)(p) = \sum_{k=1}^m \frac{t^k}{k!} D_X^k f(p) + \sigma(t^m)$$

où  $\sigma(t^m)$  est, pour  $t$  infiniment petit, un infiniment petit d'ordre supérieur à  $t^m$ .

Exemple : Exponentielle de matrices

Soit  $gl(n, k)$  l'ensemble des matrices de degré  $n$  à coefficients dans  $k$  ( $k = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Soit  $GL(n, k)$  le sous-ensemble de  $gl(n, k)$  des matrices inversibles. On considère l'application

$$\exp : gl(n, k) \longrightarrow gl(n, k)$$

définie par

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(cette série converge pour tout  $x$ ). Cette application jouit des propriétés suivantes :

1) Si  $xy = yx$  alors

$$\exp x \cdot \exp y = \exp y \cdot \exp x = \exp (x + y) .$$

2) Pour toute  $x \in gl(n, k)$ ,  $\exp x$  est inversible.

Donc  $\exp$  est une application de  $gl(n, k)$  dans  $GL(n, k)$  .

3) C'est une application différentiable.

Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on considère  $\exp(tx)$  . On a

$$(\exp tx)(\exp sx) = \exp(t + s)x$$

d'après la propriété 1). C'est-à-dire que  $\exp tx$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est un sous-groupe à un paramètre de  $GL(n, k)$  . Et

$$\frac{d}{dt} (\exp tx) = x \cdot \exp tx$$

car

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\exp (t + h)x - \exp tx] &= \lim_{h \rightarrow 0} (\exp hx - 1) \exp tx \\ &= x \exp tx . \end{aligned}$$

On suppose  $k = \mathbb{R}$  . Alors  $\exp tx$  est une transformation linéaire inversible de  $\mathbb{R}^n$ , c'est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  .

Soit  $X$  un champ de vecteur linéaire de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire de la forme

$$X = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_j^i x^j \right) \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Un tel champ de vecteurs est complet et pour tout  $p \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$(\text{Exp } tX)(p) = (\exp ta)(p)$$

où  $a$  est la matrice  $(a_j^i)$ . En effet,  $\exp ta$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est un groupe de transformations à un paramètre de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $Y$  sa transformation infinitésimale, on a

$$Y_p x^i = \left[ \frac{dx^i(\exp ta)(p)}{dt} \right]_{t=0} .$$

Or la matrice colonne  $(x^i(\exp ta)(p))$  est égale à :

$$\exp ta \cdot \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \vdots \\ x^n(p) \end{pmatrix}$$

et en dérivant par rapport à  $t$ , pour  $t = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_p x^1 \\ \vdots \\ Y_p x^n \end{pmatrix} &= \left( \frac{d}{dt} \exp ta \right)_{t=0} \cdot \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \vdots \\ x^n(p) \end{pmatrix} \\ &= a \times (\exp ta)_{t=0} \cdot \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \vdots \\ x^n(p) \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \vdots \\ x^n(p) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$Y_p x^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j(p) = X_p x^i \quad \text{pour tout } i \in [1, n].$$

Le groupe de transformations  $\exp t a$  est donc engendré par  $X$ .

Définition 1 :

Un difféomorphisme  $\varphi$  d'un ouvert  $U$  de  $M$  sur un ouvert  $V$  de  $M$  est appelé une transformation locale de source  $U$  et de but  $V$ .

Si  $\varphi$  est une transformation locale de source  $U$  et de but  $V$  et  $\varphi'$  une transformation locale de source  $U'$  et de but  $V'$ , alors  $\varphi' \circ \varphi$  est une transformation locale de source

$$\varphi^{-1}(V \cap U')$$

et de but

$$\varphi'(V \cap U').$$

Définition 2 :

Un groupe local (à un paramètre)  $G_\ell$  est un ensemble de triplets

$$(U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha)$$

où  $\alpha$  parcourt un ensemble  $A$ , vérifiant les cinq conditions suivantes :

1)  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  est un recouvrement ouvert de  $M$ .

2)  $\epsilon_\alpha$  est un nombre positif et  $\varphi_t^\alpha$  où  $|t| < \epsilon_\alpha$  est une transformation locale dont la source contient  $U_\alpha$ .

3) L'application de  $]-\epsilon_\alpha, +\epsilon_\alpha[ \times U_\alpha$  dans  $M$  qui à  $(t, p)$  fait correspondre  $\varphi_t^\alpha(p)$  est différentiable.

4) Si  $|t|$ ,  $|s|$  et  $|t + s|$  sont plus petits que  $\epsilon_\alpha$ , la source de  $\varphi_t^\alpha \circ \varphi_s^\alpha$  contient  $U_\alpha$  et

$$\varphi_t^\alpha \circ \varphi_s^\alpha = \varphi_{t+s}^\alpha$$

dans  $U_\alpha$ .

5) Si  $\alpha, \beta \in A$  sont tels que

$$U_\alpha \cap U_\beta$$

est non vide, alors pour tout  $p$  dans  $U_\alpha \cap U_\beta$ , il existe  $U_i$ , voisinage de  $p$  contenu dans  $U_\alpha \cap U_\beta$ , et  $\epsilon$ , nombre positif, tels que pour  $|t| < \epsilon$ ,

$$\varphi_t^\alpha = \varphi_t^\beta$$

dans  $U$ .

Soient deux groupes locaux

$$G_\ell = \{U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha\}_{\alpha \in A}$$

et

$$G'_\ell = \{V_i, \epsilon_i, \psi_t^i\}_{i \in I},$$

ils sont dits équivalents si pour tout  $i \in I$  et tout  $\alpha \in A$  tels que

$$V_i \cap U_\alpha$$

est non vide, pour tout  $p$  dans  $V_i \cap U_\alpha$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$  contenu dans  $V_i \cap U_\alpha$  et un nombre  $\epsilon$  positif, tels que pour  $|t| < \epsilon$ ,

$$\varphi_t^\alpha = \psi_t^i$$

dans  $U$ . La relation " $G_\ell$  est équivalent à  $G'_\ell$ " est une relation d'équivalence.

Soit

$$G_{\mathcal{L}} = \{U_{\alpha}, \varepsilon_{\alpha}, \varphi_t^{\alpha}\}_{\alpha \in A}$$

un groupe local. Soit  $p \in M$ , il existe un  $\alpha \in A$  tel que

$$p \in U_{\alpha}$$

et on définit le vecteur tangent  $X_p$  par

$$X_p f = \left[ \frac{d}{dt} f(\varphi_t^{\alpha}(p)) \right]_{t=0} ;$$

d'après la condition 5) de la définition d'un groupe local, cette définition ne dépend pas du  $\alpha$  tel que

$$p \in U_{\alpha} .$$

L'application qui à  $p$  associe  $X_p$  est un champ de vecteur qu'on appelle la transformation infinitésimale de  $G_{\mathcal{L}}$ .

(On retrouve la définition vue pour un groupe de transformation qui est un cas particulier de groupe local). Si  $G_{\mathcal{L}}$  et  $G'_{\mathcal{L}}$  sont deux groupes locaux équivalents, alors leurs transformations infinitésimales coïncident.

Proposition :

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . Il existe un groupe local dont la transformation infinitésimale est  $X$ .

Deux groupes locaux ayant la même transformation infinitésimale sont équivalents.

En effet, soit  $p$  un point de  $M$  et soient  $x^1, \dots, x^n$  des coordonnées locales dans un voisinage  $U$  de  $p$  telles que

$$x^1(p) = \dots = x^n(p) = 0 .$$

Si  $\xi^i(x^1, \dots, x^n)$  sont les composantes de  $X$  dans  $U$ , on considère le système d'équations différentielles

$$\frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x^1, \dots, x^n) \quad i = 1, \dots, n .$$

Pour  $\delta > 0$ , soit  $U(\delta)$  l'ensemble des points  $q$  de  $U$  tels que

$$|x^i(q)| < \delta$$

pour tout  $i$ . Il existe  $\epsilon_1$ ,  $\delta_1$  et  $n$  fonctions  $\varphi^1(t, q), \dots, \varphi^n(t, q)$  différentiables définies dans  $]-\epsilon_1, +\epsilon_1[ \times U(\delta_1)$ , vérifiant ce système différentiel et la condition initiale

$$\varphi^i(0, q) = x^i(q) \quad .$$

Alors pour  $q$  appartenant à  $U(\delta_1)$  et  $|t| < \epsilon_1$ , soit  $\varphi_t^p(q)$

le point de  $U$  de coordonnées  $\varphi^1(t, q), \dots, \varphi^n(t, q)$ .

Si  $\epsilon_1$  et  $\delta_1$  sont suffisamment petits,

$$\{U(\delta_1), \epsilon_1, \varphi_t^p\}_p \in M$$

est un groupe local dont la transformation infinitésimale est  $X$ .

Soit maintenant deux groupes locaux

$$\{U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha\}_\alpha \in A$$

et

$$\{V_i, \eta_i, \psi_t^i\}_i \in I$$

dont la transformation infinitésimale est  $X$ . Pour tout point  $p$ , il existe un  $\alpha$  et un  $i$  tels que

$$X \in U_\alpha \cap V_i \quad ,$$

soit  $\epsilon$  un nombre positif inférieur à  $\epsilon_\alpha$  et à  $\eta_i$ , alors pour  $|t| < \epsilon$  les courbes  $t \longrightarrow \varphi_t^\alpha$  et  $t \longrightarrow \psi_t^i$  sont des courbes intégrales de  $X$  et

$$\varphi_0^\alpha(p) = \psi_0^i(p)$$

car ils sont tous les deux égaux à  $p$ , donc

$$\varphi_t^\alpha(p) = \psi_t^i(p)$$

pour tout  $t$  tel que  $|t| < \epsilon$ , les deux groupes locaux considérés sont donc équivalents.

Un groupe local dont la transformation infinitésimale est  $X$ , est dit engendré par  $X$ , (de même que pour un groupe de transformations global).

Proposition :

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . Pour que  $X$  soit complet il faut et il suffit qu'il existe un groupe local

$$\{U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha\}_{\alpha \in A}$$

engendré par  $X$  tel que

$$\inf_{\alpha \in A} \epsilon_\alpha$$

soit strictement positif.

En effet si

$$\{U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha\}_{\alpha \in A}$$

est un tel groupe local, soit

$$\epsilon = \inf_{\alpha \in A} \epsilon_\alpha ;$$

alors pour  $|t| < \epsilon$  soit  $\varphi_t$  la transformation de  $M$  qui à  $p$  associe

$$\varphi_t(p) = \varphi_t^\alpha(p)$$

où  $\alpha$  est tel que  $U_\alpha$  contient  $p$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $\alpha$  tel que  $U_\alpha$  contienne  $p$ , car si  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$  les deux courbes  $t \longrightarrow \varphi_t^\alpha(p)$  et  $t \longrightarrow \varphi_t^\beta(p)$



pour  $|t| < \epsilon$ , sont des courbes intégrales de  $X$  et

$$\varphi_0^\alpha(p) = \varphi_0^\beta(p) = p \quad ,$$

donc

$$\varphi_t^\alpha(p) = \varphi_t^\beta(p)$$

pour tout  $t$  tel que  $|t| < \epsilon$ . On a donc défini sur  $M$  une transformation  $\varphi_t$ . Cette transformation est différentiable car localement elle coïncide avec les  $\varphi_t^\alpha$ . L'application de  $]-\epsilon, +\epsilon[ \times M$  dans  $M$  qui à  $(t, p)$  fait correspondre  $\varphi_t(p)$  est différentiable car dans  $]-\epsilon, +\epsilon[ \times U_\alpha$ ,

$$\varphi_t(p) = \varphi_t^\alpha(p)$$

et l'application

$$(t, p) \longrightarrow \varphi_t^\alpha(p)$$

est différentiable. Si  $|s|, |t|$  et  $|s + t|$  sont inférieurs à  $\epsilon$ , soit  $p \in M$ , il appartient à un certain  $U_\beta$  et  $\varphi_s(p)$  appartient à un certain  $U_\alpha$ , et par définition

$$\varphi_t \circ \varphi_s(p) = \varphi_t^\alpha(\varphi_s^\beta(p)) \quad ;$$

mais  $\varphi_t^\alpha(\varphi_s^\beta(p))$  coïncide avec  $\varphi_t^\beta(\varphi_s^\beta(p))$  car les courbes

$$t \longrightarrow \varphi_t^\alpha(\varphi_s^\beta(p)) \quad \text{et} \quad t \longrightarrow \varphi_t^\beta(\varphi_s^\beta(p))$$

sont courbes intégrales de  $X$  et coïncident en  $t = 0$  (la courbe  $t \longrightarrow \varphi_s^\beta(\varphi_s^\beta(p))$  étant définie autour de  $t = 0$  d'après la condition 4) de la définition de groupe local), donc

$$\varphi_t^\alpha(\varphi_s^\beta(p)) = \varphi_{t+s}^\beta(p)$$

et donc

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s} \quad .$$

Pour  $t = 0$ ,  $\varphi_t$  est l'application identique car  $\varphi_0^\alpha$  est l'application identique pour tout  $\alpha$ , et pour  $|t| < \epsilon$ ,

$$\varphi_{-t} \circ \varphi_t \quad \text{et} \quad \varphi_t \circ \varphi_{-t}$$

sont égaux à  $\varphi_0$  donc

$$(\varphi_t)^{-1} = \varphi^{-t} \quad .$$

Il faut maintenant définir  $\varphi_t$  pour tout  $t$  : pour  $t \in \mathbb{R}$ , il existe un entier positif  $m$  tel que  $|\frac{t}{m}|$  soit inférieur à  $\epsilon$ , et  $\varphi_{\frac{t}{m}}$  est défini. On définira  $\varphi_t$  par  $\varphi_t = (\varphi_{\frac{t}{m}})^m$ , mais il faut vérifier que cette définition est indépendante de l'entier  $m$  tel que  $|\frac{t}{m}|$  soit inférieur à  $\epsilon$  : soit  $l$  un autre entier tel que

$$|\frac{t}{l}| < \epsilon ,$$

on considère  $\varphi_{\frac{t}{ml}}$ , on a  $|k \times \frac{t}{ml}| < \epsilon$ , pour tous les entiers  $k \leq l$  et alors

$$\varphi_{\frac{t}{ml}} = \varphi_{\frac{t}{ml}} \circ \varphi_{(k-1)\frac{t}{ml}} ,$$

ce qui permet de montrer par récurrence que

$$\varphi_{\frac{t}{ml}} = \varphi_{\frac{lt}{ml}} = (\varphi_{\frac{t}{ml}})^l$$

et on montrerait de même que  $\varphi_{\frac{t}{l}} = (\varphi_{\frac{t}{ml}})^m$  donc  $(\varphi_{\frac{t}{l}})^m$  et  $(\varphi_{\frac{t}{l}})^l$  sont égaux car égaux tous les deux à  $(\varphi_{\frac{t}{ml}})^{ml}$ . On a donc

défini  $\varphi_t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On vérifie que c'est un groupe de transformations à un paramètre et que sa transformation infinitésimale est  $X$ , donc  $X$  est complet.

Réciproquement si  $X$  est complet, soit  $\varphi_t = \text{Exp } tX$  alors  $G_\epsilon = \{M, \epsilon, \varphi_t\}$  est un groupe local engendré par  $X$  et  $\inf \epsilon = e$  est strictement positif.

Corollaire :

Sur une variété différentiable compacte, tout champ de vecteurs est complet.

En effet, si

$$\{U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha\}_{\alpha \in A}$$

est un groupe local engendré par X (il en existe toujours), du recouvrement

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} ,$$

on peut extraire un recouvrement fini

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in B} ,$$

alors

$$\{U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha\}_{\alpha \in B}$$

est un groupe local engendré par X et puisque B est fini la borne inférieure des  $\epsilon_\alpha$  est positive. D'après la propriété précédente, X est donc complet.

Proposition :

Soient X un champ de vecteurs sur M,

$$G_\lambda = \{U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha\}_{\alpha \in A}$$

un groupe local engendré par X, et  $\theta$  un difféomorphisme de M.

Alors

$$G_\lambda^\theta = \{\theta U_\alpha, \epsilon_\alpha, \theta \circ \varphi_t^\alpha \circ \theta^{-1}\}_{\alpha \in A}$$

est un groupe local et sa transformation infinitésimale est  $\theta_* X$  .

On vérifie sans difficulté que  $G_\ell^\theta$  possède les 5 propriétés requises pour un groupe local. Soit  $Y$  sa transformation infinitésimale, elle est définie par

$$Y_p f = \left[ \frac{d(\theta \circ \varphi_t^\alpha \circ \bar{\theta}^{-1}(p))}{dt} \right]_{t=0}$$

où  $\alpha$  est tel que

$$\bar{\theta}^{-1}(p) \in U_\alpha,$$

ce qui s'écrit

$$\left[ \frac{d(f \circ \theta)(\varphi_t^\alpha \circ \bar{\theta}^{-1}(p))}{dt} \right]_{t=0}$$

ce qui est l'expression de la transformation infinitésimale  $X$  de  $G_\ell$ , appliquée au point  $\bar{\theta}^{-1}(p)$  à la fonction  $f \circ \theta$ , c'est-à-dire

$$X_{\bar{\theta}^{-1}(p)} f \circ \theta.$$

D'autre part

$$(\theta_* X)_p = (\theta_*)_{\bar{\theta}^{-1}(p)} X_{\bar{\theta}^{-1}(p)}$$

donc

$$(\theta_* X)_p f = X_{\bar{\theta}^{-1}(p)} f \circ \theta.$$

Donc

$$(\theta_* X)_p f = Y_p f$$

pour toute  $f \in C^\infty(M)$ . La transformation infinitésimale de  $G_\ell^\theta$  est  $\theta_* X$ .

Corollaire :

Si  $X$  est complet, alors  $\theta_* X$  l'est aussi et on a

$$\text{Exp } t(\theta_* X) = \theta \cdot (\text{Exp } tX) \cdot \bar{\theta}^{-1} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En effet, si  $X$  est complet,

$$\{M, \epsilon, \text{Exp } tX\}$$

pour  $\epsilon$  quelconque, est un groupe local engendré par  $X$ , alors d'après la proposition

$$\{M, \epsilon, \theta \circ \text{Exp } tX \circ \bar{\theta}^{-1}\}$$

est un groupe local engendré par  $\theta_* X$ , il vérifie  $\inf \epsilon > 0$ , donc  $\theta_* X$  est complet et le groupe de transformations (global) que l'on construit à partir de ce groupe local est

$$\theta \circ \text{Exp } tX \circ \bar{\theta}^{-1}$$

lui-même, donc

$$\text{Exp } t(\theta_* X) = \theta(\text{Exp } tX)\bar{\theta}^{-1}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Soit  $X$  un champ de vecteur engendrant le groupe local

$$\{U_\alpha, \epsilon_\alpha, \varphi_t^\alpha\}$$

et soit  $Y$  un autre champ de vecteurs. Alors pour tout point  $p$ , le crochet de  $X_p$  et  $Y_p$  s'exprime par

$$[X_p, Y_p] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Y_p - (\varphi_t^\alpha)_* Y_{\varphi^{-1}(p)}) .$$

En effet, soient  $x^1, \dots, x^n$  des coordonnées locales dans un voisinage  $U$  de  $p$ , contenu dans  $U_\alpha$ . On suppose que

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

et

$$Y = \sum_{i=1}^n \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

On pose

$$\varphi^i(t, x) = x^i (\varphi_t^\alpha(x))$$

pour  $x \in U$  et  $|t|$  assez petit, alors puisque le groupe local est engendré par  $X$ , on a

$$X_{\varphi_t(x)} x^i = \frac{d\varphi^i}{dt}(t, x) = \xi_i(\varphi^1(t, x), \dots, \varphi^n(t, x)) .$$

Pour alléger l'écriture, on notera  $p_t$  le point  $\varphi_{-t}(p)$  .

Soit  $\zeta^i(t)$  les composantes par rapport à la base  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{p_t}$  du

vecteur tangent  $(\varphi_t^\alpha)_* Y_{p_t}$  . On a

$$\begin{aligned} \zeta^i(t) &= ((\varphi_t^\alpha)_* Y_{p_t}) x^i \\ &= Y_{p_t} (x^i \circ \varphi_t^\alpha) \\ &= \sum_{k=1}^n \eta^k(p_t) \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k}(t, p_t) . \end{aligned}$$

On considère la dérivée de  $\zeta^i(t)$  par rapport à  $t$ , prise pour  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\zeta^i(t)}{dt} \right)_{t=0} &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{d\eta^k}{dt}(p_t) \right]_{t=0} \left[ \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k}(t, p_t) \right]_{t=0} + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \eta^k(p) \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k}(t, p_t) \right) \right]_{t=0} . \end{aligned}$$

D'une part

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\eta^k}{dt}(p_t) \right]_{t=0} &= \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j}(p_t) \frac{d\varphi^j(-t, p)}{dt} \right]_{t=0} \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j}(p) \xi^j(p) \end{aligned}$$

d'autre part

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^k} \varphi^i(t, p_t) \right]_t = 0 = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \delta_i^k \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

donc la première partie de l'expression de

$$\left[ \frac{d\zeta^i(t)}{dt} \right]_t = 0$$

vaut :

$$- \sum_{k=1}^n \delta_i^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j}(p) \xi^j(p) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \xi^j(p) \quad .$$

D'autre part la seconde partie

$$\sum_{k=1}^n \eta^k(p) \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^k}(t, p_t) \right) \right]_t = 0$$

est égale à

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \eta^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial \varphi^i}{\partial t}(t, p_t) \right)_t = 0 \\ & = \sum_{k=1}^n \eta^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k} \xi_i \quad . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\zeta^i(t)}{dt} \right]_t = 0 & = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \times \xi^j(p) + \sum_{k=1}^n \eta^k(p) \times \frac{\partial}{\partial x^k} \xi_i \\ & = - X_p \eta^i + Y_p \xi_i \\ & = - X_p (Y_p x^i) + Y_p (X_p x^i) \\ & = - [X, Y]_p x^i \quad . \end{aligned}$$

Or les  $\zeta^i$  sont par hypothèses les composantes de  $(\varphi_t^\alpha)_* Y_{p_t}$ ,  
c'est-à-dire que

$$(\varphi_t^\alpha)_* Y_{p_t} = \sum_{i=1}^n \zeta^i(t) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

donc

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \left( (\varphi_t^\alpha)_* Y_{p_t} \right) \right]_{t=0} &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \zeta^i(t) \right]_{t=0} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \\ &= - \sum_{i=1}^n \left( [X, Y]_p x^i \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \\ &= - [X, Y]_p \quad . \end{aligned}$$

Or

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( (\varphi_t^\alpha)_* Y_{p_t} \right) \right]_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( (\varphi_t)_* Y_{p_t} - Y_p \right)$$

car on peut remplacer  $\varphi_t^\alpha$  par  $\varphi_t$  simplement car il s'agit  
de prendre une limite lorsque  $t \rightarrow 0$ , donc de considérer  
des  $t$  très petits.

Donc pour tout  $p$ , on a

$$[X, Y]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( Y_p - (\varphi_t)_* Y_{\varphi_{-t}(p)} \right) \quad .$$

On peut donc exprimer le crochet  $[X, Y]$  de la façon suivante :

$$\boxed{[X, Y] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( Y - (\varphi_t)_* Y \right) \quad .}$$



§9. VARIETES PARACOMPACTES ET PARTITIONS DE L'UNITE

Définition 1 :

Une famille

$$\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$$

de sous-ensembles d'un espace topologique  $X$  est dite localement finie si la condition suivante est vérifiée : Pour tout point  $p$  de  $X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $p$  tel que l'ensemble des  $\alpha$  vérifient

$$U_{\alpha} \cap V \neq \emptyset$$

soit fini.

Définition 2 :

Soit

$$\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$$

deux recouvrements ouverts d'un espace topologique  $X$ . On dit que  $\mathcal{V}$  est plus fin que  $\mathcal{U}$  (et l'on écrit  $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ ) si la condition suivante est réalisée : il existe une application  $\alpha$  de  $I$  dans  $A$  telle que

$$V_i \subset U_{\alpha(i)}$$

quel que soit  $i \in I$  .

Définition 3 :

Un espace topologique  $X$  est dit paracompact si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- 1)  $X$  est séparé.
- 2) Pour tout recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X$ , il existe un recouvrement ouvert  $\mathcal{V}$ , localement fini, plus fin que  $\mathcal{U}$ .

Une variété différentiable est dite paracompacte si l'espace topologique sous-jacent est paracompact.

Définition 4 :

Soit

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

un recouvrement ouvert localement fini d'une variété différentiable M. Une famille  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de fonctions différentiables est appelée une partition de l'unité associée au recouvrement  $\{U_\alpha\}$  si les 3 conditions suivantes sont réalisées :

1) Pour tout  $\alpha$  de A et tout x de M, on a

$$0 \leq f_\alpha(x) \leq 1 \quad .$$

2) Pour tout  $\alpha$  de A, le support de  $f_\alpha$  est contenu dans  $U_\alpha$  .

3) Pour tout x de M, on a

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1 \quad .$$

Remarque :

$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$  est bien défini car  $\{U_\alpha\}$  étant un recouvre-

ment localement fini, l'ensemble des  $\alpha$  tels que  $x \in U_\alpha$  est fini donc

$$f_\alpha(x) = 0$$

sauf pour un nombre fini d'indices  $\alpha$ .

Théorème :

Soit M une variété différentiable paracompacte et  
 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$  un recouvrement ouvert de M, localement fini tel que  
 $\overline{U}_\alpha$  soit compact pour tout  $\alpha \in A$  . Alors il existe une parti-  
tion de l'unité associée au recouvrement  $\{U_\alpha\}$  .

Pour démontrer ce théorème, on utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 1 :

Soit M une variété paracompacte et soit  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un  
recouvrement ouvert de M. Alors il existe un recouvrement  
ouvert  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de M, tel que

$$\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$$

pour tout  $\alpha \in A$  .

En effet, pour tout  $p \in M$ , soit  $V_p$  un voisinage de p tel qu'il existe un  $\alpha \in A$  vérifiant

$$\overline{V}_p \subset U_\alpha .$$

La famille  $\{V_p\}_{p \in M}$  est un recouvrement ouvert de M et comme M est paracompact, il existe un recouvrement localement fini  $\{U_i\}_{i \in I}$  plus fin que  $\{V_p\}_{p \in M}$  .

Soit  $I_\alpha = \{i ; i \in I, \overline{U_i} \subset U_\alpha\}$  . Alors  $I = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$  .

Soit  $V_\alpha = \bigcup_{i \in I_\alpha} U_i$  . La famille  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  forme un

recouvrement ouvert de  $M$ . On a

$$V_\alpha = \overline{\bigcup_{i \in I_\alpha} U_i} \supset \bigcup_{i \in I_\alpha} \overline{U_i}$$

mais on a aussi

$$\overline{\bigcup_{i \in I_\alpha} U_i} \subset \bigcup_{i \in I_\alpha} \overline{U_i}$$

car si  $p$  n'appartient pas à  $\bigcup_{i \in I_\alpha} \overline{U_i}$ , pour tout  $i \in I$ ,

$p$  n'appartient pas à  $\overline{U_i}$ , donc il existe un voisinage  $W_i$  de  $p$  ne rencontrant pas  $U_i$ ; or  $\{U_i\}$  est un recouvrement localement fini, donc un point quelconque est adhérent au plus à un nombre fini de  $U_i$  et dire que  $p$  n'est pas adhérent à chaque  $U_i$ ,  $i \in I_\alpha$ , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage  $W_i$  de  $p$  ne rencontrant pas  $U_i$ , ceci pour tout  $i \in J_\alpha$  fini ( $J_\alpha \subset I_\alpha$ ) et  $W_i$  ne rencontrant pas les  $U_j$  pour  $j \notin J_\alpha$ ; alors

$\bigcap_{i \in I_\alpha} W_i$  est un voisinage de  $p$  qui ne rencontre aucun des  $U_i$ ,

donc  $p$  n'est pas adhérent à  $\bigcup_{i \in I_\alpha} U_i$  . Donc

$$\overline{V_\alpha} = \overline{\bigcup_{i \in I_\alpha} U_i} \subset \bigcup_{i \in I_\alpha} \overline{U_i}$$

or pour tout  $i \in I_\alpha$ ,  $\overline{U_i} \subset U_\alpha$  par définition de  $I_\alpha$ , donc  

$$\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha .$$

Lemme 2 :

Soit K un sous-ensemble compact d'une variété différentiable quelconque M et soit U un ouvert de M contenant K. Alors il existe une fonction  $f \in C^\infty(M)$  vérifiant les 3 conditions suivantes :

- 1) Pour tout  $p \in M$ ,  $0 \leq f(p) \leq 1$  .
- 2) Pour tout  $p \in K$ ,  $f(p) > 0$  .
- 3) Pour tout  $p \notin U$ ,  $f(p) = 0$  .

En effet, soit  $p \in K$ , il existe un voisinage  $V_p$  de  $p$  et une fonction  $f_p \in C^\infty(M)$  tels que

$$\overline{V_p} \subset U ,$$

$$0 \leq f_p(q) \leq 1 \quad \text{pour tout } q \in M ,$$

$$f_p(q) = 1 \quad \text{pour } q \in V_p ,$$

et

$$f_p(q) = 0 \quad \text{pour } q \notin U .$$

Comme K est compact, il est contenu dans la réunion d'un nombre fini de  $V_p$ , soit

$$\bigcup_{i=1}^k V_{p_i}$$

et la fonction

$$f = \frac{1}{k} (f_{p_1} + f_{p_2} + \dots + f_{p_k})$$

répond à la question.

On démontre alors le théorème de la façon suivante :

D'après le lemme 1, il existe un recouvrement ouvert

$$\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

de  $M$  tel que  $\overline{W_\alpha}$  soit contenu dans  $U_\alpha$  pour tout  $\alpha \in A$  et il existe un recouvrement ouvert

$$\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

de  $M$  tel que  $\overline{V_\alpha}$  soit contenu dans  $W_\alpha$  pour tout  $\alpha$ . Comme  $\overline{V_\alpha}$  est compact (puisque'il est fermé et contenu dans  $\overline{U_\alpha}$  qui est supposé compact), d'après le lemme 2 il existe une fonction  $g \in C^\infty(M)$  telle que

$$0 \leq g_\alpha \leq 1 \quad ,$$

$g_\alpha > 0$  sur  $\overline{V_\alpha}$  et  $g_\alpha$  nulle sur le complémentaire de  $W_\alpha$ .  
Alors pour tout  $x \in M$ , on considère

$$g(x) = \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(x) \quad ,$$

cette somme étant bien définie puisque le recouvrement

$$\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

est localement fini (puisque par hypothèse  $U_\alpha$  est localement fini) et donc que  $x$  ne peut pas être commun à une infinité de  $W_\alpha$ . La fonction  $g$  ainsi définie est différentiable car au voisinage de chaque point elle coïncide avec une fonction différentiable. La fonction  $g$  est strictement positive car tout point  $x$  appartient au moins à un  $V_\alpha$  puisque  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$  est un recouvrement de  $M$ , on peut donc pour tout  $\alpha \in A$  considérer la fonction

$$f_\alpha = \frac{g_\alpha}{g} \quad ,$$

cette fonction  $f_\alpha$  est de classe  $C^\infty$ , elle est comprise entre 0 et 1 en chaque point et son support est contenu dans le support de  $g_\alpha$  qui est contenu dans  $U_\alpha$ . Pour un point  $x \in M$ , on a

$$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = \frac{1}{g(x)} \sum_{\alpha \in A} g_\alpha(x) = 1 .$$

On a donc obtenu une partition de l'unité associée au recouvrement

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} .$$

Exemples d'applications de ce théorème :

Exemple 1 :

Sur une variété paracompacte, il existe toujours une métrique riemannienne. En effet pour chaque point  $p$  de  $M$ , on peut trouver un voisinage  $V_p$  tel que  $\bar{V}_p$  soit compact et sur lequel sont définies des coordonnées locales. Alors

$$\{V_p\}_{p \in M}$$

est un recouvrement ouvert de  $M$  et puisque  $M$  est paracompact, il existe un recouvrement ouvert localement fini

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

de  $M$  tel que pour tout  $\alpha \in A$ , il existe  $p \in M$  tel que

$$U_\alpha \subset V_p .$$

D'après le théorème, il existe une partition de l'unité  $f_\alpha$  associée au recouvrement

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} .$$

Sur  $U_\alpha$ , il existe une métrique riemannienne  $g^\alpha$ . Alors pour  $p \in M$ , on considère la fonction  $g_p$  qui à  $u, v \in T_p(M)$

associe

$$g_p(u, v) = \sum_{\alpha \in A_p} f_\alpha(p) g^\alpha(u, v)$$

où  $A_p$  désigne l'ensemble fini des  $\alpha$  tels que  $p \in U_\alpha$ .  
Alors  $g_p$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $T_p(M)$ ,  
définie positive et la métrique riemannienne ainsi définie est  
différentiable car il existe un voisinage de  $p$  dans lequel  
elle l'est.

Exemple 2 :

Soit  $M$  une variété paracompacte, soient  $U$  et  $V$  des ouverts  
de  $M$  tels que

$$\bar{V} \subset U$$

et soit  $h$  une fonction différentiable sur  $V$ . Alors il existe  
 $f \in C^\infty(M)$  telle que

$$f = h$$

sur  $V$ . En effet, pour tout  $p$  dans  $\bar{V}$ , il existe un voisinage  $V_p$   
de  $p$  et une fonction  $g_p \in C^\infty(M)$  tels que  $\bar{V}_p$  soit compact  
et contenu dans  $U$  et que  $g_p$  coïncide avec  $h$  sur  $V_p$  et soit  
nulle sur le complémentaire de  $U$ ; et pour tout  $p$  dans le  
complémentaire de  $\bar{V}$ , il existe un voisinage  $V_p$  tel que  $\bar{V}_p$   
soit compact ne rencontrant pas  $V$ ; et on pose  $g_p = 0$ .  
La famille  $\{V_p\}_{p \in M}$  est un recouvrement ouvert de  $M$  dont on  
peut extraire un recouvrement localement fini  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .  
D'après le théorème, il existe une partition de l'unité

$$\{f_\alpha\}_{\alpha \in A} \cdot$$



associée à ce recouvrement. On peut vérifier que la fonction

$$f = \sum_{\alpha \in A} f_{\alpha} g_{\alpha}$$

répond à la question.

Voici l'énoncé de conditions suffisantes pour qu'un espace topologique soit paracompact :

Proposition 1 :

Soit X un espace topologique localement compact et  $\sigma$ -compact. Alors X est paracompact.

(Rappel de la définition d'un espace  $\sigma$ -compact : X est  $\sigma$ -compact si il existe une suite de parties  $K_i$  compactes telles que

$$X = \bigcup_{i=1,2,\dots,\infty} K_i ).$$

Corollaire :

Un groupe topologique localement compact et connexe est paracompact.

En effet, si G est un tel groupe, il est  $\sigma$ -compact ; car il existe un voisinage de l'unité, V tel que

$$\bar{V}^{-1} = V$$

et tel que  $\bar{V}$  soit compact. Alors

$$G = \bigcup_{n=1,\dots,\infty} (\bar{V})^n$$

et  $(\bar{V})^n$  est compact, car c'est l'image du compact

$$\bar{V} \times \bar{V} \times \dots \times \bar{V} \text{ (n fois)}$$

de

$$G \times G \times \dots \times G \text{ (n fois)}$$

par l'application continue de  $G \times \dots \times G$  dans  $G$  qui à  $g_1, \dots, g_n$  associe le produit  $g_1 \dots g_n$ .

Proposition 2 :

Soit  $X$  une variété topologique, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $X$  est à base dénombrable.
- 2)  $X$  est  $\sigma$ -compact.
- 3)  $X$  est paracompact et le nombre de composantes connexes de  $X$  est dénombrable.

## §10. SYSTEMES DIFFERENTIELS COMPLETEMENT INTEGRABLES

Définitions :

Soit  $M$  une variété différentiable. Un système différentiel  $D$  de dimension  $r$  sur  $M$  est une application qui à  $p \in M$  fait correspondre un sous-espace vectoriel  $D_p$  de dimension  $r$  de  $T_p(M)$ , de telle sorte que : pour tout  $p \in M$ , il existe  $U$ , voisinage de  $p$ , et  $r$  champs de vecteurs différentiables  $X_1, \dots, X_r$  définis sur  $U$  tels que

$$\{(X_1)_x, \dots, (X_r)_x\}$$

engendre  $D_x$  pour tout  $x \in U$ .

La famille  $\{X_1, \dots, X_r\}$  est dite une base locale de D.

Si X est un champ de vecteur défini dans un ouvert V, on dit que X appartient à D si  $x \in D_x$  pour tout x dans V.

Soit N une sous-variété de dimension r de M, c'est une variété intégrale de D si l'on a

$$D_x = T_x(N)$$

pour tout  $x \in N$ .

Un système différentiel D est dit complément intégrable si pour tout p de M, il existe une base locale  $\{X_1, \dots, X_r\}$  de D, définie dans un voisinage U de p, telle que le crochet

$$[X_i, X_j]$$

appartienne à D pour tout i et tout j entre 1 et r ; c'est-à-dire que  $[X_i, X_j] \in D_x$  pour tout  $x \in U$ .

Théorème de Frobenius :

Pour qu'un système différentiel D, sur la variété différentielle M, soit complètement intégrable, il est nécessaire et suffisant que pour tout  $p \in M$ , il existe des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$  de M dans un voisinage U de p telles que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^r} \right\}$$

forme une base locale de D.

Pour tout  $i$  et tout  $j$  dans  $[1, r]$ , le crochet  $\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right]$  est nul donc appartient au sous-espace engendré par  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^2}$ , ce qui montre que la condition est suffisante.

On admettra ici que la condition est nécessaire (pour la démonstration, c.f. Chevalley, Theory of Lie groups, p. 89).

Etant donné un système différentiel  $D$  complètement intégrable sur la variété différentiable  $M$ , on dit que des coordonnées  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $M$  sont des coordonnées distinguées de  $M$  autour de  $p$  si elles vérifient les deux conditions :

- 1)  $x_i(p) = 0$  pour tout  $i \in [1, n]$ .
- 2)  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^2} \right\}$  forme une base locale de  $D$ .

Soit un système de telles coordonnées, pour un nombre  $\epsilon$  positif, on considère  $Q_\epsilon$  ensemble des  $q \in M$  tels que

$$|x^i(q)| < \epsilon \quad \text{pour tout } i \in [1, n],$$

on dit que c'est un voisinage distingué de  $p$ . Soit  $q$  un point de  $Q_\epsilon$ , soit  $a^i = x^i(q)$  et soit  $W_q$  l'ensemble des  $y$  de  $Q_\epsilon$  tels que

$$x^j(y) = a^j \quad \text{pour } j = r+1, \dots, n,$$

c'est la section de  $Q_\epsilon$  passant par  $q$ . Alors  $W_q$  est une sous-variété régulière de  $M$  et c'est une variété intégrale de  $D$  car pour  $y \in W_q$ ,  $T_y(W_q)$  est engendré par  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)_y, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^r} \right)_y \right\}$  donc c'est  $D_y$ .

Lemme :

Soit  $N$  une variété intégrale de  $D$  et soit  $p$  un point de  $N$ .  
Pour  $\epsilon > 0$  soit  $Q_\epsilon$  un voisinage distingué de  $p$  et soit  $W_p$   
la section de  $Q_\epsilon$  passant par le point  $p$ . Alors si  $\epsilon$  est  
suffisamment petit,  $W_p$  est une sous-variété ouverte de  $N$ .

En effet, soit  $V_p$  la composante connexe (pour la topologie de  $N$ ) de  $Q_\epsilon \cap N$ .  $V_p$  est un ouvert de  $N$  car dans un espace localement connexe, une composante connexe est ouverte,  $V_p$  est une variété intégrale de  $D$  car c'est une sous-variété ouverte de  $N$ . Soit  $y^i$  la restriction de  $x^i$  à  $V_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En tout point de  $V_p$ ,

$$\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^r}$$

engendrent l'espace tangent à  $V_p$  (parce que les  $x^i$  sont des coordonnées distinguées), donc pour tout  $q \in V_p$ , on a

$$x^{r+1}(q) = \dots = x^n(q) = 0$$

et  $y^1, \dots, y^r$  sont des coordonnées locales de  $V_p$ , qui est contenu dans  $W_p$ . Si  $\epsilon$  est assez petit, pour tout  $(a^1, \dots, a^r)$  tel que

$$|a^i| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, r,$$

il existe  $q \in V_p$  tel que

$$y^i(q) = x^i(q) = a_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Donc

$$V_p = W_p$$

en tant que variété différentiable (car mêmes coordonnées locales). Donc  $W_p$  est une sous-variété ouverte de  $N$ .

On va définir une nouvelle topologie dans l'ensemble  $M$ , sous-jacent à la variété différentiable  $M$ . On appelle  $\mathfrak{M}$  l'espace topologique obtenu : par définition, un sous-ensemble  $O$  sera un ouvert de  $\mathfrak{M}$  si :

ou bien  $O = \emptyset$  .

ou bien  $O \neq \emptyset$  et pour tout  $p \in O$  , il existe une sous-variété intégrale  $N$  de  $D$ , contenant  $p$  et contenue dans  $O$ .

On vérifie que

1)  $M$  et  $\emptyset$  sont des ouverts de  $\mathfrak{M}$ .

2) Si  $O_i$  ,  $i \in I$  sont des ouverts de  $\mathfrak{M}$ , alors

$$\bigcup_{i \in I} O_i$$

est un ouvert de  $\mathfrak{M}$ .

3) Si  $O_1$  et  $O_2$  sont des ouverts de  $\mathfrak{M}$ , alors

$$O_1 \cap O_2$$

est un ouvert de  $\mathfrak{M}$ .

L'assertion 3) résulte du fait que si  $N_1$  et  $N_2$  sont des variétés intégrales de  $D$  passant par  $p$ , d'après le lemme, on peut trouver  $Q_\epsilon$  tel que  $W_p$  soit une sous-variété de  $N_1$  et de  $N_2$  .

L'espace topologique  $\mathfrak{M}$  ainsi défini est un espace topologique séparé : car si  $p, q \in \mathfrak{M}$  ,  $p \neq q$  , dans  $M$ , il existe  $Q_\epsilon$  voisinage distingué de  $p$  et  $Q'_\epsilon$  , voisinage distingué de  $q$  tels que

$$Q_\epsilon \cap Q'_\epsilon = \emptyset .$$

Alors  $W_p$  et  $W'_q$  sont des ouverts de  $\mathfrak{M}$  tels que

$$W_p \cap W'_q = \emptyset .$$

On considère l'application identique

$$i : \mathfrak{M} \longrightarrow M ,$$

elle est continue car si  $U$  est un ouvert de  $M$ , pour  $p \in U$  , il existe un voisinage distingué  $Q_\epsilon$  de  $p$  contenu dans  $U$  tel que  $W_p$  soit une sous-variété intégrale de  $D$ , donc un ouvert de  $\mathfrak{M}$ , donc

$$\bar{i}^{-1}(U)$$

est un ouvert de  $\mathfrak{M}$ . On considère la restriction de  $i$  à  $W_p$ . Soit  $O$  un ouvert de  $\mathfrak{M}$  contenu dans  $W_p$ , pour tout  $p \in O$ , il existe une sous-variété intégrale  $N$  de  $D$  telle que

$$p \in N \subset O .$$

Mais au voisinage de  $p$ , cette sous-variété coïncide avec

$$W_p \cap Q_\varepsilon,$$

pour un  $\varepsilon'$  assez petit, et  $W_p \cap Q_\varepsilon$  est un ouvert de  $W_p$  pour la topologie induite par  $M$ , et il est contenu dans  $O$ , donc  $O$  est voisinage de chacun de ses points pour la topologie induite par  $M$  sur  $W_p$ , c'est donc un ouvert. L'image par  $i$  d'un ouvert de  $W_p$  est donc un ouvert de  $W_p$ . La restriction  $i|_{W_p}$  est donc un homéomorphisme, ou autrement dit :

$\mathfrak{M}$  et  $M$  induisent sur  $W_p$  la même topologie.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 W_p & \xrightarrow{i} & W_p & \xrightarrow{j} & Q_\varepsilon & \xrightarrow{\psi} & P_\varepsilon^n \subset \mathbb{R}^n \\
 (\mathfrak{M}) & & (M) & & & & \downarrow p \\
 & & & \searrow \varphi & & & P_\varepsilon^r \subset \mathbb{R}^r
 \end{array}$$

où  $j$  est l'application identique de  $W_p$  dans  $Q_\varepsilon$ ,  $\psi$  l'application

$$q \longrightarrow (x^1(q), \dots, x^n(q))$$

de  $Q_\varepsilon$  dans le cube  $P_\varepsilon^n$ , et  $p$  la restriction à  $P_\varepsilon^n$  de la projection canonique de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^r$ . Alors

$$\varphi = p \circ \psi \circ j$$

est un homéomorphisme de  $W_p$  sur  $P_\varepsilon^r$  et donc l'application

$\theta = \varphi \circ i$ , qui à  $q$  fait correspondre  $(x^1(q), \dots, x^r(q))$ ,

est un homéomorphisme de  $W_p$  sur  $P_e^r$ . Or pour tout point  $p$  de  $\mathfrak{M}$ , il existe un tel  $W_p$ , ouvert de  $\mathfrak{M}$  contenant  $p$ , donc  $\mathfrak{M}$  est une variété topologique de dimension  $r$ . On vérifie sans difficulté que  $\mathfrak{M}$  est une variété différentiable (pour la structure différentiable déduite de celle de  $M$ ).

Proposition :

L'application identique

$$i : \mathfrak{M} \longrightarrow M$$

est un plongement. Et

$$i_* (T_p(\mathfrak{M})) = D_p \quad \text{pour tout } p \in M .$$

Ceci est immédiat, d'après les structures de  $\mathfrak{M}$  et  $M$ . Donc  $\mathfrak{M}$  est une sous-variété de  $M$ , et c'est une variété intégrale de  $D$ .

Soit  $p$  un point de  $M$  et soit  $F_p$  la composante connexe de  $\mathfrak{M}$  contenant  $p$ . C'est un ouvert de  $\mathfrak{M}$ , donc une sous-variété régulière de  $\mathfrak{M}$ , c'est donc une sous-variété de  $M$ , intégrale de  $N$ .

Proposition :

Soit  $p \in M$  et soit  $F_p$  la composante connexe de  $\mathfrak{M}$  contenant  $p$ . Toute variété intégrale connexe  $N$  de  $D$  passant par  $p$  est un ouvert de  $F_p$  (pour la topologie de  $\mathfrak{M}$ ).

Démonstration de la proposition :

Désignons par  $N'$  le sous-espace de  $\mathfrak{M}$  dont l'ensemble sous-jacent est celui de  $N$ . Alors, par la définition même de la topologie de  $\mathfrak{M}$ ,  $N'$  est un ouvert de  $\mathfrak{M}$ , et donc une sous-variété ouverte de  $\mathfrak{M}$ . L'application identique de  $N$  sur  $N'$  est un difféomorphisme, d'après le lemme et la définition de la structure différentiable de  $\mathfrak{M}$ .



Définition :

Une variété intégrale connexe N de D est une feuille de D si toute variété intégrale connexe de D contenant N coïncide avec N.

D'après ce qui précède, les feuilles de D sont les sous-ensembles  $F_p$ , c'est-à-dire les composantes connexes de  $\mathfrak{M}$ . Et par tout point de M, il passe une feuille et une seule.

Théorème :

Soit M une variété différentiable à base dénombrable et soit D un système différentiel complètement intégrable sur M. Soit M' une variété différentiable et soit  $\varphi$  une application différentiable de M' dans M telle que

$$\varphi(M')$$

soit contenu dans une feuille F de D. Alors  $\varphi$  induit une application différentiable de M' dans F.

La démonstration s'appuie sur les lemmes suivants :

Lemme 1 :

Soient M et M' des variétés différentiables et F une sous-variété de M. Soit  $\varphi$  une application différentiable de M' dans M telle que

$$\varphi(M') \subset F .$$

Si l'application induite

$$\varphi : M' \longrightarrow F$$

est continue, alors elle est différentiable.

(Démonstration facile).

Lemme 2 :

Soit M une variété différentiable à base dénombrable.  
Soit N une sous-variété connexe de M. Alors N est aussi à base dénombrable.

(Pour la démonstration, c.f. Chevalley : Theory of Lie Groups, p. 92).

Lemme 3 :

Avec les notations du théorème, soit  $p \in F$  et soit

$$(x^1, \dots, x^n)$$

un système de coordonnées distinguées autour de p tel que

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

engendrent D, soit  $Q_\epsilon$  voisinage distingué de p et soit  $W_p$  la section de  $Q_\epsilon$  passant par p. Alors  $W_p$  est la composante connexe de

$$Q_\epsilon \cap F$$

contenant p, pour la topologie de M.

En effet, les composantes connexes de  $Q_\epsilon \cap F$  pour la topologie de F, sont des sections de  $Q_\epsilon$ , soient  $W_{q_\alpha}$ , alors

$$Q_\epsilon \cap F = \bigcup_{\alpha \in A} W_{q_\alpha} .$$

D'après le lemme 2, F est à base dénombrable, (puisque F est connexe) donc  $\sigma$ -compact :

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

où les  $K_i$  sont compacts. Chaque  $K_i$  ne rencontre qu'un nombre fini de  $W_{q_\alpha}$ , parcequ'il est compact et que les  $W_{q_\alpha}$  sont des

ouverts vérifiant  $W_{q_\alpha} \cap W_{q_\beta} = \emptyset$ , pour  $\alpha \neq \beta$ , d'autre part chaque  $W_{q_\alpha}$  rencontre au moins un  $K_i$ , donc l'ensemble des indices  $\alpha$  est dénombrable. Soit  $\psi : Q_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R}^{n-r}$  l'application qui à  $q$  associe  $\psi(q) = (x^{r+1}(q), \dots, x^n(q))$ , l'image par  $\psi$  d'une section  $W_{q_\alpha}$  est un point, donc l'image par  $\psi$  de  $Q_\epsilon \cap F$  est dénombrable. Si  $\tilde{W}_p$  est la composante connexe de  $Q_\epsilon \cap F$  contenant  $p$  pour la topologie de  $M$ ,  $\psi(\tilde{W}_p)$  est un sous-ensemble connexe et il est dénombrable car il est contenu dans  $\psi(Q_\epsilon \cap F)$  donc  $\psi(\tilde{W}_p)$  est un point, c'est  $\{0\}$  puisque  $p \in \tilde{W}_p$  et que  $x^{r+1}(p) = \dots = x^n(p) = 0$ , donc

$$\tilde{W}_p \subset W_p$$

car  $W_p = \bar{\psi}^{-1}(0)$ . Or  $W_p$  est connexe, donc

$$\tilde{W}_p = W_p \quad . \quad \text{c.q.f.d.}$$

Alors, soit  $V$  un ouvert de  $F$ , soit  $x$  un point de  $M'$  appartenant à l'image réciproque de  $V$  par  $\varphi$  et soit  $p = \varphi(x)$ . Il existe un voisinage distingué  $Q_\epsilon$  de  $p$  tel que  $W_p$  soit contenu dans  $V$ , et il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que

$$\varphi(U) \subset Q_\epsilon$$

car  $\varphi$  est continue, et il existe un tel  $U$  connexe. Alors

$$\varphi(U) \subset Q_\epsilon \cap F$$

puisque  $\varphi(M') \subset F$ , et  $\varphi(U)$  est connexe, donc  $\varphi(U)$  est contenu dans la composante connexe de  $Q_\epsilon \cap F$  contenant  $p$ , c'est-à-dire dans  $W_p$  d'après le lemme 3. Or  $W_p \subset V$ , donc

$$\varphi(U) \subset V ;$$

l'image réciproque de  $V$  par  $\varphi$  est donc voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire que  $\varphi$  est continue comme application de  $M'$  dans  $F$ .

Et le lemme 1, entraîne que  $\varphi$  est une application différentiable de  $M'$  dans  $F$ .

Proposition :

Soit  $D$  un système différentiel complètement intégrable sur  $M$  et soit  $\varphi$  un difféomorphisme de  $M$  qui laisse  $D$  invariant (i.e.  $\varphi_* D_x = D_{\varphi(x)}$ ,  $\forall x \in M$ ). Alors  $\varphi$  applique toute feuille de  $D$  sur une feuille de  $D$ .

En effet, soit  $F_{p_0}$  une feuille de  $D$  passant par  $p_0$  et soit  $i : F_{p_0} \longrightarrow M$  l'application identique, alors  $\bar{\varphi} = \varphi \circ i$  est un plongement de  $F_{p_0}$  dans  $M$ . On peut définir une structure

différentiable sur  $\bar{\varphi}(F_{p_0})$  telle que  $\bar{\varphi}$  soit un difféomorphisme de  $F_{p_0}$  sur  $\bar{\varphi}(F_{p_0})$ . Puisque  $\bar{\varphi}$  est un plongement,

$$\bar{\varphi}(F_{p_0})$$

est une sous-variété de  $M$ ; c'est une sous-variété intégrale de  $D$  parce que  $\varphi$  laisse  $D$  invariant; c'est donc une sous-variété ouverte de  $F_{\varphi(p_0)}$ . Donc  $\varphi$  induit un difféomorphisme de  $F_{p_0}$  sur une sous-variété ouverte de  $F_{\varphi(p_0)}$ . On montrerait de manière analogue que  $\bar{\varphi}^{-1}$  induit un difféomorphisme de  $F_{\varphi(p_0)}$  sur une sous-variété ouverte de  $F_{p_0}$  (car  $\bar{\varphi}^{-1}$  laisse aussi invariant  $D$ ). Donc  $\varphi$  induit un difféomorphisme de  $F_{p_0}$  sur  $F_{\varphi(p_0)}$ ; en particulier  $\varphi$  est une bijection de  $F_{p_0}$  sur  $F_{\varphi(p_0)}$ .

Définition :

Une courbe différentiable dans  $M$  est appelée une courbe intégrale du système différentiel  $D$  si tous les vecteurs tangents à cette courbe appartiennent à  $D$ .

On peut montrer la proposition suivante :

Proposition :

Soit

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

une courbe intégrale d'un système différentiel  $D$  complètement intégrable. Alors l'image  $\varphi(I)$  est contenue dans une feuille de  $D$  (car  $I$  est un intervalle connexe).