

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

YOZO MATSUSHIMA

Chapitre I Groupes topologiques

Cours de l'institut Fourier, tome 1 (1966), p. 1-31

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1966__1__A1_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Chapitre IGROUPES TOPOLOGIQUES§1. DEFINITION D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Définition :

On dit qu'un ensemble G est un groupe topologique s'il vérifie les conditions suivantes :

- 1) G est un groupe.
- 2) G est un espace topologique.
- 3) L'application

$$\varphi_1 : G \times G \longrightarrow G$$

qui à (x, y) fait correspondre xy^{-1} est continue,

Soit G un groupe topologique, pour tout $g \in G$, on définit la translation à gauche $L_g : G \longrightarrow G$ par $L_g(x) = gx$ et la translation à droite $R_g : G \longrightarrow G$ par $R_g(x) = xg$. Pour tout $g \in G$, les translations L_g et R_g sont des homéomorphismes de G sur G ; car L_g est continue puisque

$$L_g(x) = \varphi_1(g, \bar{x}^1)$$

et d'autre part L_g est bijective et

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}.$$

De même pour R_g .

Remarque :

La topologie d'un groupe topologique G est uniforme : c'est-à-dire que pour tous $a, b \in G$, il existe un homéomorphisme $f : G \longrightarrow G$ tel que

$$b = f(a).$$

On peut en effet choisir

$$f) L_{b\bar{a}^{-1}}.$$

Exemple 1 :

Le groupe additif des réels \mathbb{R} est un groupe topologique.

Exemple 2 :

Soit $M(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de degré n à coefficients réels, il peut être identifié à \mathbb{R}^{n^2} et muni de la topologie habituelle sur \mathbb{R}^{n^2} ; alors pour la multiplication

des matrices, $M(n, \mathbb{R})$ est un groupe topologique. Soit

$$GL(n, \mathbb{R})$$

le sous-ensemble de $M(n, \mathbb{R})$ des matrices inversibles.

L'application qui à une matrice fait correspondre son déterminant est une fonction continue sur $M(n, \mathbb{R})$, puisque le déterminant d'une matrice est un polynôme en ses coefficients ; et $GL(n, \mathbb{R})$ est l'image réciproque par cette application de l'ouvert $\mathbb{R} - \{0\}$ de \mathbb{R} , c'est donc un ouvert de $M(n, \mathbb{R})$ et, muni de la topologie induite, c'est un groupe topologique.

On l'appelle le groupe linéaire général de degré n .

Soient A et B des sous-ensembles d'un groupe topologique G . on notera \bar{A}^{-1} l'ensemble de tous les éléments de la forme \bar{a}^{-1} où $a \in A$; on notera AB l'ensemble de tous les éléments de la forme ab , où $a \in A$ et $b \in B$, et on notera aB pour $\{a\}B$ et Ab pour $A\{b\}$.

Propriétés :

Si A (ou B) est un sous-ensemble ouvert de G , alors AB est un sous-ensemble ouvert de G . Car

$$AB = \bigcup_{b \in B} R_b(A)$$

et chaque $R_b(A)$ est ouvert puisque R_b est un homéomorphisme de G sur G . (Si c'est B qui est ouvert, le résultat découle de l'égalité

$$AB = \bigcup_{a \in A} L_a(B) \quad) .$$

D'autre part, si A est un ouvert de G , alors \bar{A}^{-1} est un ouvert de G . Car \bar{A}^{-1} est l'image réciproque de A par l'application continue ψ .

Dans ce chapitre et dans les suivants, on appellera voisinage d'un point x d'un espace topologique X , un sous-ensemble ouvert de X contenant x .

Soit G un groupe topologique, on notera e son élément neutre. On considère l'ensemble \mathcal{U} de tous les voisinages de e dans G . Alors pour tout $g \in G$, l'ensemble $g\mathcal{U} = \{gU ; U \in \mathcal{U}\}$ est l'ensemble des voisinages de g ; en effet, si U est un ouvert contenant e , $gU = L_g(U)$ est un ouvert et il contient $ge = g$; réciproquement si V est un ouvert contenant g , alors $U = \bar{g}^{-1}V$ est un ouvert contenant e et

$$V = gU \quad .$$

L'ensemble \mathcal{U} des voisinages de e dans G jouit des cinq propriétés suivantes :

- 1) L'ensemble \mathcal{U} n'est pas vide. En effet, il contient G .
- 2) Pour tous $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, il existe $U_3 \in \mathcal{U}$ tel que U_3 soit contenu dans $U_1 \cap U_2$. On peut en effet choisir pour U_3 , $U_1 \cap U_2$ lui-même.
- 3) Pour tout $U \in \mathcal{U}$, il existe $V \in \mathcal{U}$ tel que $V\bar{V}^{-1}$ soit contenu dans U . En effet, l'application

$$\varphi : G \times G \longrightarrow G$$

est continue, donc

$$\bar{\varphi}^{-1}(U)$$

est un ouvert de $G \times G$, contenant (e, e) , et donc il existe

un voisinage V de e tel que $V \times V$, soit contenu dans $\bar{\varphi}^{-1}(U)$ et on a bien

$$V\bar{V}^{-1} \subset U \quad .$$

4) Pour tout $U \in \mathfrak{U}$, pour tout $a \in U$, il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que aV soit contenu dans U . En effet $V = \bar{a}^{-1}U$ est un ouvert qui contient

$$\bar{a}^{-1}a = e \quad ,$$

c'est donc un élément de \mathfrak{U} et $aV = U$ est contenu dans U .

5) Pour tout $U \in \mathfrak{U}$ et pour tout $g \in G$, il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que

$$gV\bar{g}^{-1}$$

soit contenu dans U . En effet $V = \bar{g}^{-1}Ug$ est un ouvert de G , il contient

$$g\bar{g}^{-1} = e \quad ,$$

c'est donc un élément de \mathfrak{U} et $gV\bar{g}^{-1} = U$ est contenu dans U .

Réciproquement, étant donné un groupe G et une famille \mathfrak{U} de sous-ensembles de G contenant l'élément neutre e et ayant les cinq propriétés ci-dessus, alors il existe sur G une topologie et une seule telle que G soit un groupe topologique et telle que \mathfrak{U} soit un système fondamental de voisinages de l'élément neutre e . Ceci est le cas par exemple si G est un groupe commutatif et \mathfrak{U} un ensemble de sous-groupes de G tel que

si $H_1, H_2 \in \mathfrak{U}$, alors

$$H_1 \cap H_2 \in \mathfrak{U} .$$

On dira qu'un groupe topologique est séparé, s'il est séparé en tant qu'espace topologique.

Proposition :

Soit G un groupe topologique et soit \mathfrak{U} l'ensemble des voisinages de l'élément neutre e de G . La condition nécessaire et suffisante pour que G soit séparé est que

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{e\} .$$

En effet, si G est séparé, pour tout point s de G , il existe un voisinage U de e qui ne contient pas s , alors

$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$ ne contient pas s . Réciproquement, on suppose que

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{e\}$$

et soient s et t deux points distincts de G ; alors $\bar{s}^{-1}t$ est distinct de e et il existe $U \in \mathfrak{U}$ qui ne contient pas $\bar{s}^{-1}t$. D'après la propriété 3) de \mathfrak{U} , il existe $V \in \mathfrak{U}$ tel que

$$V\bar{V}^{-1} \subset U .$$

S'il existait un point a qui appartienne à la fois à sV et à tV , alors s serait dans $a\bar{V}^{-1}$, \bar{s}^{-1} serait dans $V\bar{a}^{-1}$, et t serait dans $a\bar{V}^{-1}$, donc $\bar{s}^{-1}t$ serait dans $V\bar{V}^{-1}$, donc dans U ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc sV et tV sont disjoints, or ce sont des voisinages respectivement de s et t ; donc G est séparé.

§2. SOUS-GROUPES D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe de G . La topologie de G induit une topologie sur H et les applications

$$\varphi : (x, y) \longrightarrow xy^{-1} \quad \text{et} \quad \psi : x \longrightarrow x^{-1}$$

sont continues sur H pour cette topologie. Donc H est un groupe topologique. On dit que H est un sous-groupe (topologique) du groupe topologique G .

Proposition :

Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G , alors :

1) L'adhérence de H est aussi un sous-groupe de G ; et si H est distingué, \bar{H} l'est aussi.

2) Si H est ouvert, alors il est fermé.

En effet, soient s et t deux éléments de \bar{H} et soit U un voisinage quelconque de $\bar{s}^{-1}t$. Puisque l'application qui à (s, t) fait correspondre $\bar{s}^{-1}t$ est continue sur $G \times G$, il existe un voisinage V de s et un voisinage W de t tels que $\bar{V}^{-1}W$ soit contenu dans U . Puisque s et t sont adhérents à H , il existe h appartenant à $V \cap H$ et il existe h' appartenant à $W \cap H$. Alors $\bar{h}^{-1}h'$ appartient à $\bar{V}^{-1}W$, donc à U , et d'autre part $\bar{h}^{-1}h'$ appartient à H puisque H est un sous-groupe. Donc tout voisinage de $\bar{s}^{-1}t$ rencontre H , donc $\bar{s}^{-1}t \in \bar{H}$, donc \bar{H} est un sous-groupe. D'autre part, pour tout $s \in G$, l'application

$$f = L_s \circ R_{\bar{s}^{-1}}$$

est un homéomorphisme de G , donc

$$\overline{f(H)} = f(\bar{H}) \quad ;$$

donc

$$\overline{sHs^{-1}} = f(\overline{H}) = \overline{f(H)} = \overline{sHs^{-1}} = \overline{H} \quad ,$$

c'est-à-dire que \overline{H} est distingué, ce qui montre la première assertion.

La seconde assertion résulte du fait que si H est ouvert, alors les classes à gauche suivant H sont ouvertes et du fait que H est le complémentaire de la réunion des classes à gauche aH , $a \in G$, distinctes de H .

Exemple :

On considère $G = GL(n, \mathbb{R})$. Alors l'ensemble $GL^+(n, \mathbb{R})$ des matrices de G de déterminant positif, est un sous-groupe de G , ouvert (car image réciproque de l'ouvert \mathbb{R}^+). Il est donc aussi fermé d'après la proposition ci-dessus.

Soit $SL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de G de déterminant égal à $+1$, on l'appelle le groupe linéaire spécial de degré n , c'est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$.

Soit $O(n)$ l'ensemble des matrices de $GL(n, \mathbb{R})$ qui sont orthogonales, (c'est-à-dire des matrices a telles que

$$t_a \cdot a = 1 \quad).$$

Les éléments de $O(n)$ sont donc les matrices $a = (a_{ik})$ qui vérifient

$$\sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

L'application f_{ij} qui à a fait correspondre

$$\sum_k a_{ki} a_{kj}$$

est une application continue de $GL(n, \mathbb{R})$ dans \mathbb{R} et les

applications f_{ij} sont en nombre fini, donc $O(n)$ est l'intersection finie des images réciproques de 0 ou 1, c'est donc un fermé ; d'autre part $O(n)$ est un groupe ; donc $O(n)$, groupe orthogonal, est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$.

§3. ESPACES QUOTIENTS D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G . On considère le quotient G/H , ensemble des classes à gauche de G selon H et on désigne par π la projection canonique de G sur G/H .

Si G a une structure de groupe topologique, on peut définir sur G/H une topologie de la manière suivante : un sous-ensemble O de G/H sera un ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(O)$ est un ouvert de G . (On vérifie facilement que ceci définit bien une topologie). On a alors les propriétés suivantes :

1) La projection canonique

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

est continue. Car par définition même de la topologie, l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

2) La projection canonique

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

est une application ouverte. Car si U est un ouvert de G , alors

$$\pi^{-1}(\pi(U))$$

est un ouvert de G puisqu'il est égal à UH .

Remarque :

Tout sous-ensemble ouvert O de G/H est de la forme $\pi(U)$ où U est un ouvert de G , car $U = \bar{\pi}^{-1}(O)$ est un ouvert de G , d'après la définition de la topologie et

$$O = \pi(\bar{\pi}^{-1}(O))$$

puisque π est surjective.

On considère la loi d'opération à gauche de G dans G/H , c'est-à-dire l'application $\varphi' : G \times G/H \longrightarrow G/H$ qui à $(s, \pi(x))$ fait correspondre $\pi(sx)$. Pour $s \in G$, on considère l'application $T_s : G/H \longrightarrow G/H$ définie par

$$T_s(\xi) = \varphi'(s, \xi) \quad .$$

On a les propriétés suivantes :

1) L'application $\varphi' : G \times G/H \longrightarrow G/H$ est continue. Car si O est un ouvert contenant $\pi(sx)$, d'après la remarque précédente

$$O = \pi(U)$$

où U est un ouvert de G et puisque φ est continue il existe un voisinage U_1 de s et un voisinage U_2 de t tels que

$$\varphi(U_1, U_2) \subset U \quad ;$$

d'autre part

$$\varphi'(U_1, \pi(U_2)) = \pi(\varphi(U_1, U_2))$$

donc

$$\varphi' (U_1, \pi(U_2))$$

est contenu dans $\pi(U)$, c'est-à-dire dans O , ce qui signifie que φ' est continue car $U_1 \times \pi(U_2)$ est un voisinage de $(s, \pi(x))$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \text{id.} \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times G/H & \xrightarrow{\varphi'} & G/H \end{array}$$

où φ représente la multiplication.

2) L'application T_s est un homéomorphisme de G/H sur G/H . D'abord, elle est continue, car si O est un ouvert de G/H , il est de la forme $O = \pi(U)$ où U est un ouvert de G et $T_s^{-1}(O)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\pi(x)$ tels que

$$sx \in U$$

donc

$$\bar{\pi}^{-1}(T_s^{-1}(O)) = L_s^{-1}(U)$$

qui est ouvert et donc $T_s^{-1}(O)$ est ouvert. D'autre part, l'application T_s est inversible, son inverse faisant correspondre à $\xi = \pi(a)$ l'élément

$$(T_s)^{-1}(\xi) = \pi(\bar{s}^{-1}a)$$

qui est bien indépendant du choix du représentant a ;

et cette application inverse est continue, car si $O = \pi(U)$ est un ouvert de G/H , U étant ouvert de G , alors $T_s(O)$ est l'ensemble des éléments de la forme $\pi(sx)$ où $x \in U$, il est donc ouvert car son image réciproque par π est l'ouvert $L_s(U)$.

Si H est un sous-groupe distingué de G , le quotient G/H est alors muni d'une structure de groupe. Si $\varphi : G \times G \longrightarrow G$ désigne la multiplication dans G et $\psi : G \longrightarrow G$ le passage à l'inverse dans G , alors la multiplication dans G/H , représentée par $\bar{\varphi}$ est définie par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \times & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H & \times & G/H \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi} \\ \\ \xrightarrow{\bar{\varphi}} \end{array} \begin{array}{c} G \\ \downarrow \pi \\ G/H \end{array}$$

et le passage à l'inverse, représenté par $\bar{\psi}$ est définie par le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\psi} & G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G/H & \xrightarrow{\bar{\psi}} & G/H \end{array}$$

On voit, à l'aide de ce dernier diagramme, que l'application $\bar{\psi}$ est continue : en effet, si O est un ouvert de G/H , de la forme $O = \pi(U)$ où U est un ouvert de G , alors $\bar{\psi}^{-1}(O)$ est ouvert puisque ψ est continue (car G est supposé être un groupe topologique) et

$$\bar{\psi}^{-1}(O) = \pi(\psi^{-1}(U))$$

est ouvert. De façon analogue, en s'appuyant sur le premier diagramme commutatif, on montre que l'application $\bar{\varphi}$ est continue. Donc, si H est distingué, le groupe G/H a une structure de groupe topologique.

Dans le cas général (c'est-à-dire H pas obligatoirement distingué) :

Proposition :

Soit G un groupe topologique séparé et soit H un sous-groupe de G . Pour que l'espace topologique G/H soit séparé, il faut et il suffit que H soit fermé.

Car si G/H est séparé, le point $\{\pi(e)\}$ est un fermé et

$$H = \bar{\pi}^{-1}(\{\pi(e)\})$$

est fermé puisque π est continue.

Réciproquement, on suppose H fermé ; soient $\xi = \pi(s)$ et $\eta = \pi(t)$ deux points de G/H , s'ils sont distincts, $\bar{s}^{-1}t$ n'appartient pas à H et puisque H est fermé, il existe un voisinage V de $\bar{s}^{-1}t$ qui ne rencontre pas H . D'après une propriété des voisinages dans un groupe topologique, il existe un voisinage V_1 de s et un voisinage V_2 de t tels que le voisinage $\bar{v}_1^{-1}V_2$ de $\bar{s}^{-1}t$ soit contenu dans V . Alors $V_\xi = \pi(V_1)$ est un voisinage de ξ et $V_\eta = \pi(V_2)$ est un voisinage de η ; s'il existait un élément α de G/H appartenant à V_ξ et à V_η , on aurait

$$\alpha = \pi(v_1)$$

avec $v_1 \in V_1$ et

$$\alpha = \pi(v_2)$$

avec $v_2 \in V_2$, v_1 et v_2 seraient dans la même classe selon H , c'est-à-dire que $\bar{v}_1^{-1}v_2$ serait un élément de $\bar{v}_1^{-1}V_2$

appartenant à H , ce qui est absurde, donc ξ et η ont des voisinages respectifs V_ξ et V_η qui sont disjoints, donc G/H est séparé.

§4. HOMOMORPHISMES ET ISOMORPHISMES DE GROUPES TOPOLOGIQUES

Définitions :

Soient G et G' deux groupes topologiques et soit φ une application de G dans G' . On dit que φ est un homomorphisme du groupe topologique G dans le groupe topologique G' si c'est un homomorphisme de groupes qui est une application continue. L'application φ est un isomorphisme (de groupes topologiques) de G sur G' , si c'est un isomorphisme de groupes et un homéomorphisme d'espaces topologiques.

Un homomorphisme de groupe topologique est un homomorphisme ouvert si c'est une application ouverte.

Exemple :

Si H est un sous-groupe distingué du groupe topologique G , la projection canonique

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

est un homomorphisme ouvert de groupes topologiques.

Théorème :

Soient G et G' deux groupes topologiques et

$$\varphi : G \longrightarrow G'$$

un homomorphisme ouvert, surjectif. Soit N le noyau de φ . Alors il existe un isomorphisme $\bar{\varphi}$ de G/N sur G' tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\varphi} & G' \\
 \pi \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\
 G/N & &
 \end{array}$$

En effet, d'abord le noyau N est un sous-groupe distingué de G , et G/N est donc bien muni d'une structure de groupe topologique. On peut définir l'application

$$\bar{\varphi} : G/N \longrightarrow G'$$

par

$$\bar{\varphi}(\pi(x)) = \varphi(x)$$

pour $x \in G$, cette application est un isomorphisme de groupes. Cette application $\bar{\varphi}$ est continue car si O est un ouvert de G' , alors $\bar{\varphi}^{-1}(O)$ est un ouvert de G/N , car c'est

$$\pi(\bar{\varphi}^{-1}(O))$$

et π est ouverte et φ continue. (Remarque : cette démonstration de la continuité de $\bar{\varphi}$ n'utilise pas le fait que φ est ouverte ; ce fait n'est utile que pour montrer la continuité de $\bar{\varphi}^{-1}$).

L'application $\bar{\varphi}^{-1}$ est continue car si O est un ouvert de G/N , alors

$$U = \bar{\pi}^{-1}(O)$$

est un ouvert de G et

$$\bar{\varphi}(O) = \varphi(U)$$

est ouvert puisque φ est supposée ouverte.

Remarque :

On montrera ultérieurement que si G et G' sont des groupes topologiques localement compacts et à base dénombrable, alors tout homomorphisme de G sur G' est ouvert, c'est-à-dire que la conclusion du théorème précédent vaut alors pour tout homomorphisme surjectif.

§5. COMPOSANTES CONNEXES D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE

Définition :

Un groupe topologique est dit connexe s'il est connexe en tant qu'espace topologique.

Théorème :

Soit G un groupe topologique connexe et U un voisinage de l'élément neutre e tel que

$$\bar{U}^{-1} = U .$$

Alors G est engendré par U.

Remarque :

Pour tout voisinage W de e, il existe un voisinage U de e, contenu dans W et tel que

$$\bar{U}^{-1} = U$$

(en effet,

$$U = W \cap \bar{W}^{-1}$$

répond à la question) ; l'hypothèse du théorème n'est donc pas restrictive.

Démonstration du théorème :

Pour tout entier positif k, soit U^k l'ensemble des éléments de G de la forme $s_1 s_2 \dots s_k$ où les s_i appartiennent à U. Pour $k = 1$,

$$U^k = U$$

est ouvert, pour $k > 1$,

$$U^k = U U^{k-1},$$

ce qui montre par récurrence que U^k est ouvert pour tout k.

Soit G' la réunion des U^k pour tous les entiers k , c'est un sous-groupe de G car si $s, t \in G'$, si $s = s_1 \dots s_k$ alors

$$\bar{s}^{-1} = \bar{s}_k^{-1} \dots \bar{s}_1^{-1}$$

et les \bar{s}_i^{-1} appartiennent à U puisque

$$\bar{U}^{-1} = U,$$

donc $\bar{s}^{-1} \in U^k$ donc $\bar{s}^{-1} \in G'$ et si $t = t_1 \dots t_l$, alors $st \in U^{k+l}$ donc $st \in G'$. Puisque chaque U_k est ouvert, G' est ouvert, or tout sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est fermé ; le sous-ensemble G' est donc ouvert et fermé dans G , c'est donc G lui-même puisque G est supposé connexe, donc pour tout élément s de G , il existe un entier k et k éléments $s_1 \dots s_k$ de U tels que s soit égal au produit $s_1 \dots s_k$.

Proposition :

Soit G un groupe topologique et soit H un sous-groupe de G . Si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.

En effet, si G est réunion de deux ouverts disjoints O_1 et O_2 , alors G/H est réunion des deux ouverts $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$. S'il existait un élément ξ commun à $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$, on aurait

$$\xi = \pi(s_1) = \pi(s_2)$$

où $s_1 \in O_1$ et $s_2 \in O_2$, et la classe $s_1H = s_2H$ serait réunion des deux ouverts $s_1H \cap O_1$ et $s_1H \cap O_2$ qui sont disjoints puisque O_1 et O_2 le sont ; or $s_1H = L_{s_1}(H)$ est connexe puisque H est connexe, donc un des ouverts

$s_1^H \cap O_1$ et $s_2^H \cap O_2$ est vide, ce qui est absurde car $s_1 \in O_1$ et $s_2 \in O_2$, donc un tel ξ n'existe pas. Alors l'espace connexe G/H est réunion des deux ouverts disjoints $\pi(O_1)$ et $\pi(O_2)$, donc l'un de ces deux ouverts est vide et donc l'un des deux ouverts O_1 et O_2 est vide, c'est-à-dire que G est connexe.

Cette proposition est très souvent utilisée pour montrer qu'un groupe topologique est connexe.

Exemple :

Le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$ est connexe : pour $n = 1$,

$$GL^+(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$$

est connexe. Si $n > 1$, soit H le sous-groupe de $G = GL^+(n, \mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A \in GL^+(n-1, \mathbb{R})$. Par l'application

$$B \longrightarrow (A, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

l'espace topologique H est homéomorphe à

$$GL^+(n-1, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$$

donc si l'on suppose, par récurrence, que $GL^+(n-1, \mathbb{R})$ est connexe, alors H est connexe. On considère le quotient

$$GL^+(n, \mathbb{R})/H \quad .$$

deux matrices B et C sont dans la même classe selon H si $\bar{B}^{-1}C \in H$, c'est-à-dire si et seulement si la première ligne de B est identique à la première ligne de C ; l'application de $GL^+(n, \mathbb{R})/H$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ qui à $\pi(B)$ fait correspondre la première ligne de B , est un homéomorphisme, on peut donc identifier le quotient G/H à $\mathbb{R}^n - \{0\}$ qui est connexe puisque $n > 1$. Alors, d'après la proposition précédente, G est connexe puisque H et G/H le sont.

Autre exemple de groupe topologique connexe :

On peut montrer que

$$GL(n, \mathbb{C})$$

est connexe, par récurrence sur n à partir de $GL(1, \mathbb{C})$ qui est connexe, car il est égal à $\mathbb{C} - \{0\}$. (Ceci n'est pas vrai pour $GL(n, \mathbb{R})$ car $\mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas connexe) .

Théorème :

Soit G un groupe topologique et soit G_0 la composante connexe de G contenant l'élément neutre e . Alors G_0 est un sous-groupe, fermé, distingué, de G et la composante connexe de G contenant un élément s est la classe

$$sG_0 = G_0s \quad .$$

D'abord, G_0 est fermé car c'est une composante connexe. C'est un sous-groupe car si $s \in G_0$, alors $\bar{s}^{-1}G_0$ contient e et est connexe puisque $L_{\bar{s}^{-1}}$ est continue, donc $\bar{s}^{-1}G_0$ est contenu dans la composante connexe G_0 , donc pour tout $t \in G_0$, $\bar{s}^{-1}t \in G_0$. Ce sous-groupe est distingué car pour tout $s \in G$,

$sG_0\bar{s}^{-1}$ est contenu dans G_0 puisque c'est un connexe contenant e .

Soit G_s la composante connexe de G contenant l'élément s . La classe sG_0 est connexe et contient s , donc

$$sG_0 \subset G_s ,$$

d'autre part $\bar{s}^{-1}G_s$ est connexe et contient e , donc

$$\bar{s}^{-1}G_s \subset G_0 ,$$

donc $G_s \subset sG_0$, donc

$$G_s = sG_0 ;$$

et d'autre part

$$sG_0 = G_0s ;$$

puisque G_0 est un sous-groupe distingué.

Exemple :

La composante connexe neutre de $GL(n, \mathbb{R})$ est $GL^+(n, \mathbb{R})$. En effet, on a vu que $GL^+(n, \mathbb{R})$ était connexe, il contient 1 et si G_0 est la composante connexe de 1 de $GL^+(n, \mathbb{R})$, alors l'image $\varphi(G_0)$ de G_0 par l'application $\varphi = G \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ qui à une matrice associe son déterminant, est connexe ; donc

$$\varphi(G_0) \subset \mathbb{R}^+ ,$$

donc $G_0 \subset GL^+(n, \mathbb{R})$, donc

$$G_0 = GL^+(n, \mathbb{R}) .$$

Autre exemple :

On verra plus loin que la composante connexe neutre du groupe orthogonal $O(n)$ est

$$SO(n) = O(n) \cap GL^+(n, \mathbb{R}) .$$

§6. ESPACE HOMOGENE D'UN GROUPE TOPOLOGIQUE ET GROUPE TOPOLOGIQUES LOCALEMENT COMPACTS.

Définitions :

Soient X un espace topologique et G un groupe topologique. On dit que G est un groupe de transformations de X si il existe une application continue φ de $G \times X$ dans X vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $\varphi(st, x) = \varphi(s, \varphi(t, x))$ pour tous s et t dans G et tout x dans X .

2) $\varphi(e, x) = x$ pour tout x dans X .

On dit aussi que G opère dans X .

Pour $s \in G$ et $x \in X$, on note en général

$$\varphi(s, x) = sx \quad .$$

Soit $T_s : X \longrightarrow X$ l'application définie par

$$T_s(x) = sx \quad .$$

Pour tout $s \in G$, T_s est un homéomorphisme et

$$(T_s)^{-1} = T_{s^{-1}} \quad .$$

On dit que G opère effectivement dans X si T_s n'est l'identité que pour $s = e$; c'est-à-dire si la condition " $sx = x$ pour tout $x \in X$ " entraîne $s = e$.

Soit x_0 un point de X . Soit H l'ensemble des éléments s de G tels que

$$sx_0 = x_0 \quad ,$$

c'est un sous-groupe de G . Ce sous-groupe H est appelé le groupe d'isotropie (ou de stabilité) de G au point x_0 .

Propriété :

Si X est séparé, le groupe de stabilité H d'un point x_0 est fermé. Car l'application

$$\beta : G \longrightarrow X$$

qui à $s \in G$ fait correspondre sx_0 , est continue et

$$H = \beta^{-1}(\{x_0\})$$

est donc image réciproque de $\{x_0\}$ qui est fermé.

On dit que G opère transitivement dans X si pour tous points x, y de X, il existe $s \in G$ tel que

$$sx = y \quad .$$

Si G opère transitivement dans X, on dit que X est un espace homogène de G.

Exemple 1 :

Si G est un groupe topologique et H un sous-groupe de G, le quotient G/H est un espace homogène de G. La loi d'opération est définie par

$$\varphi(s, tH) = stH \quad .$$

Exemple 2 :

La sphère S^n est un espace homogène du groupe orthogonal $O(n+1)$: la sphère S^n de dimension n est le sous-ensemble de \mathbb{R}^{n+1} des points (x_1, \dots, x_{n+1}) vérifiant

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \quad .$$

On considère l'application

$$\varphi : O(n+1) \times S^n \longrightarrow S^n$$

qui à $(a, (x_1, \dots, x_{n+1}))$ fait correspondre le transformé de

(x_1, \dots, x_{n+1}) par la matrice a ; ce transformé appartient bien à S^n puisque a est orthogonale. On vérifie immédiatement que c'est une loi d'opération du groupe $O(n+1)$ dans S^n . Cette loi d'opération est transitive, car il existe toujours une matrice orthogonale d'ordre $n+1$ qui fait passer d'un point de S^n à un autre. Quel est le groupe de stabilité du point $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, par exemple ? : on a toujours

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n+1,1} & & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n+1,1} \end{pmatrix}$$

Pour que la matrice (a_{ij}) laisse invariant e_1 , il faut donc qu'elle soit de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ 0 \\ \vdots & & A & \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Une telle matrice orthogonale est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 \\ \vdots & & A & \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $A \in O(n)$. Le groupe d'isotropie de e_1 est le sous-ensemble de $O(n+1)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 \\ \vdots & & A & \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $A \in O(n)$; il peut être identifié à $O(n)$.

Soit G un groupe topologique et X un espace homogène de G . Soit x_0 un point de X et soit H le groupe d'isotropie de G en x_0 . On considère le quotient G/H et on note toujours π la projection canonique : $G \longrightarrow G/H$. Si s et t sont deux éléments de G tels que

$$\pi(s) = \pi(t)$$

alors

$$sx_0 = tx_0$$

car $\bar{s}^{-1}t = h$, élément de H et donc

$$tx_0 = shx_0 = sx_0 \quad .$$

Réciproquement si $sx_0 = tx_0$, alors

$$\bar{s}^{-1}tx_0 = x_0 \quad ,$$

c'est-à-dire que $\bar{s}^{-1}t \in H$; c'est-à-dire que s et t sont dans la même classe selon H . Ceci permet de définir une application

$$\alpha : G/H \longrightarrow X$$

par $\alpha(\pi(s)) = sx_0 \quad .$

Proposition :

Soit X un espace homogène d'un groupe topologique G . Soit H le groupe d'isotropie en un point x_0 . Alors l'application canonique $\alpha : G/H \longrightarrow X$ est bijective et continue.

En effet, α est surjective puisque G opère transitivement dans X ; elle est injective par sa définition même. Le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\beta} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \alpha & \\ G/H & & \end{array}$$

est commutatif, β étant l'application définie par

$$\beta(s) = sx_0 \ ;$$

l'application β est continue. Si O est un ouvert de X alors

$$\bar{\pi}^{-1}(\bar{\alpha}^{-1}(O)) = \bar{\beta}^{-1}(O) \ ,$$

et $\bar{\beta}^{-1}(O)$ est ouvert, donc $\bar{\alpha}^{-1}(O)$ est un ouvert de G/H , donc α est continue.

On rappelle qu'un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si tout point possède un voisinage dont l'adhérence est compacte.

Théorème :

Soit X un espace homogène d'un groupe topologique G .

On suppose que X et G sont localement compacts et à base dénombrable. Soit H le groupe d'isotropie de G en un point x_0 ,
Alors l'application canonique

$$\alpha : G/H \longrightarrow X$$

est un homéomorphisme.

Lemme :

Soit X un espace topologique localement compact tel que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

où les X_n sont des fermés de X . Alors un des sous-ensembles contient un ouvert de X .

En effet, si chaque X_n ne contenait pas d'ouvert de X , si U_0 est un ouvert de X tel que \bar{U}_0 soit compact (U_0 existe puisque X est localement compact), alors $U_0 \cap X_1$ serait un ouvert non vide, et on pourrait trouver un ouvert U_1 contenu dans $U_0 \cap X_1$ tel que \bar{U}_1 serait compact et

$$\bar{U}_1 \cap X_1 = \emptyset .$$

Alors $U_1 \cap X_2$ serait un ouvert non vide et on pourrait trouver un ouvert U_2 contenu dans $U_1 \cap X_2$ tel que \bar{U}_2 serait compact et

$$\bar{U}_2 \cap X_2 = \emptyset ,$$

... et ainsi de suite, on construirait une suite d'ouverts U_n de X tels que

$$U_{n-1} \supset \bar{U}_n$$

et

$$\bar{U}_n \cap X_n = \emptyset .$$

Dans le compact \bar{U}_0 , la suite $\bar{U}_0, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_n, \dots$ serait une suite décroissante (car $\bar{U}_{n-1} \supset \bar{U}_n$) de fermés, dont l'intersection serait donc non vide ; or cette intersection ne rencontrerait aucun X_n puisque $\bar{U}_n \cap X_n = \emptyset$.

ceci est impossible puisque X est réunion des X_n . Donc un au moins des sous-ensembles X_n contient un ouvert de X . c.q.f.d.

Démonstration du théorème :

On va montrer que l'application

$$\beta : G \longrightarrow X ,$$

qui à s fait correspondre sx_0 , est ouverte. Soit V un ouvert de G , soit x un point de $\beta(V)$, il est l'image par β d'un certain $s \in V$:

$$x = \beta(s) .$$

L'application

$$t \longrightarrow s\bar{t}^{-1}t$$

est continue et

$$s\bar{e}^{-1}e = s$$

appartient à V , donc il existe un voisinage U de e tel que

$$s\bar{U}^{-1}U \subset V$$

et il existe un tel U dont l'adhérence est compacte (car G est localement compact) et tel que

$$s\bar{U}^{-1}U \subset V .$$

La famille $\{tU\}_{t \in G}$ forme un recouvrement ouvert de G et puisque G est à base dénombrable, on peut trouver un sous-ensemble dénombrable $\{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ tel que

$$\{t_n U\}_{n=1, \dots, \infty}$$

soit un recouvrement ouvert de G . On a

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} t_n U = \bigcup_{n=1}^{\infty} t_n \bar{U}$$

et si on pose

$$X_n = \beta(t_n \bar{U}) ,$$

alors

$$X = \beta(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n .$$

Pour chaque n , $t_n \bar{U}$ est compact et l'image continue par β d'un compact dans l'espace séparé X est compacte, donc X_n est compact et puisque X est séparé, X_n est fermé. Donc X est réunion dénombrable des fermés X_n et le lemme dit qu'il existe n tel que

$$X_n = \beta(t_n \bar{U})$$

contienne un ouvert Z de X . Or $\beta(t_n \bar{U}) = t_n \bar{U} x_0$, donc

$$\beta(\bar{U}) = \bar{U} x_0 = \bar{t}_n^{-1} \beta(t_n \bar{U})$$

et puisque l'application $x \longrightarrow \bar{t}_n^{-1} x$ est un homéomorphisme et que $\beta(t_n \bar{U})$ contient un ouvert Z , $\beta(\bar{U})$ contient l'ouvert $W = \bar{t}_n^{-1} Z$. Soit y un point de W , y est dans $\beta(\bar{U})$ donc il existe $h \in \bar{U}$ tel que

$$y = \beta(h) = h x_0 ;$$

alors

$$\beta(s) = s h^{-1} h x_0$$

appartient à $s h^{-1} W$; d'autre part, $s h^{-1} W$ est contenu dans $s h^{-1} \beta(\bar{U}) = s h^{-1} \bar{U} x_0$ et puisque

$$s h^{-1} \bar{U} \subset s \bar{U}^{-1} \subset V ,$$

$s h^{-1} W$ est contenu dans $V x_0 = \beta(V)$. On a donc trouvé un ouvert $s h^{-1} W$ qui contient

$$x = \beta(s)$$

et qui est contenu dans $\beta(V)$, donc $\beta(V)$ est voisinage de chacun de ses points, donc il est ouvert. L'application β est donc ouverte. On en déduit facilement que l'application α est ouverte : en effet, si O est un ouvert de G/H , alors

$$\alpha(0) = \beta(\bar{\pi}^{-1}(0))$$

qui est ouvert. L'application α qui est bijective, continue et ouverte est donc bien un homéomorphisme de G/H sur X .

Application 1 :

Le groupe

$$SO(n) = O(n) \cap GL^+(n, \mathbb{R})$$

est connexe : le groupe

$$SO(n+1)$$

opère transitivement sur la sphère S^n de dimension n ; le groupe d'isotropie de $SO(n+1)$ au point $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ est le sous-groupe de $SO(n+1)$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $A \in SO(n)$. Donc, d'après le théorème précédent, le quotient

$$SO(n+1)/SO(n)$$

est homéomorphe à S_n , donc il est connexe. Alors si $SO(n)$ est connexe, $SO(n+1)$ est connexe, ceci montre par récurrence que pour tout n , $SO(n)$ est connexe.

La composante connexe neutre de $O(n)$ est contenue dans l'image réciproque de $+1$ par l'application qui à une matrice associe son déterminant, cette image réciproque est $SO(n)$. Puisque $SO(n)$ est connexe, c'est la composante neutre de $O(n)$.

Application 2 :

On a montré au §5 que $GL^+(n, \mathbb{R})$ était connexe. Dans cette démonstration, le fait que

$$GL^+(n, \mathbb{R})/H$$

est homéomorphe à $\mathbb{R}^n - \{0\}$ peut s'obtenir en appliquant le théorème précédent car $GL^+(n, \mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et H est le groupe d'isotropie de $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Application 3 :

Soit X un ensemble et G un groupe opérant transitivement sur X (ceci sans topologie). Soit H le groupe d'isotropie de G en un point x_0 de X . Soit α l'application canonique de G/H sur X . Alors si G est muni d'une topologie, on peut définir sur X une topologie et une seule telle que α soit un homéomorphisme.

Variété grassmannienne :

Soit V un espace vectoriel réel de dimension N . Soit $G_{N,n}$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de dimension n de V . On considère le groupe topologique

$$GL(V) = GL(N, \mathbb{R}) ,$$

il opère transitivement sur $G_{N,n}$ de la façon suivante : si $W \in G_{N,n}$ et $s \in GL(V)$ alors sW est l'ensemble des transformés par s des vecteurs de W (sW est bien un élément de $G_{N,n}$ puisque s est un automorphisme). Si W et W' sont des éléments de $G_{N,n}$, il existe des bases $\{e_1, \dots, e_n, \dots, e_N\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n, \dots, e'_N\}$ de V telles que

$$\{e_1, \dots, e_n\}$$

soit une base de W et

$$\{e'_1, \dots, e'_n\}$$

une base de W' , alors il existe un automorphisme s tel que

$$s(e_i) = e'_i$$

pour tout i de 1 à N , donc tel que

$$sW = W' ,$$

ce qui prouve que la loi d'opération est transitive. On identifie V à \mathbb{R}^n et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ sa base usuelle ; soit W_0 le sous-espace engendré par $\{e_1, \dots, e_n\}$; le groupe d'isotropie de $GL(n, \mathbb{R})$ en W_0 est l'ensemble H des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & \\ \vdots & & \vdots & B & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & \\ & & 0 & C & \end{pmatrix}$$

et $G_{N,n}$ est, d'après le théorème précédent, homéomorphe à $GL(N, \mathbb{R})/H$. L'ensemble $G_{N,n}$ s'appelle une variété grassmannienne. On peut montrer que $G_{N,n}$ est compacte et connexe.