LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

H. M. BADRAN

Médiane et centre de gravité pour une distribution de masse de densité convexe sur un convexe

Les cahiers de l'analyse des données, tome 15, nº 4 (1990), p. 387-390

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1990__15_4_387_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol XV - 1990 - n° 4 - pp. 387-390.

MÉDIANE ET CENTRE DE GRAVITÉ POUR UNE DISTRIBUTION DE MASSE DE DENSITÉ CONVEXE SUR UN CONVEXE

[MÉD. DIS.]

*H. M. BADRAN**

1 Origine du présent travail

On trouve dans [MÉD. CONV.], le théorème suivant, qui généralise un résultat de D.J. Newman:

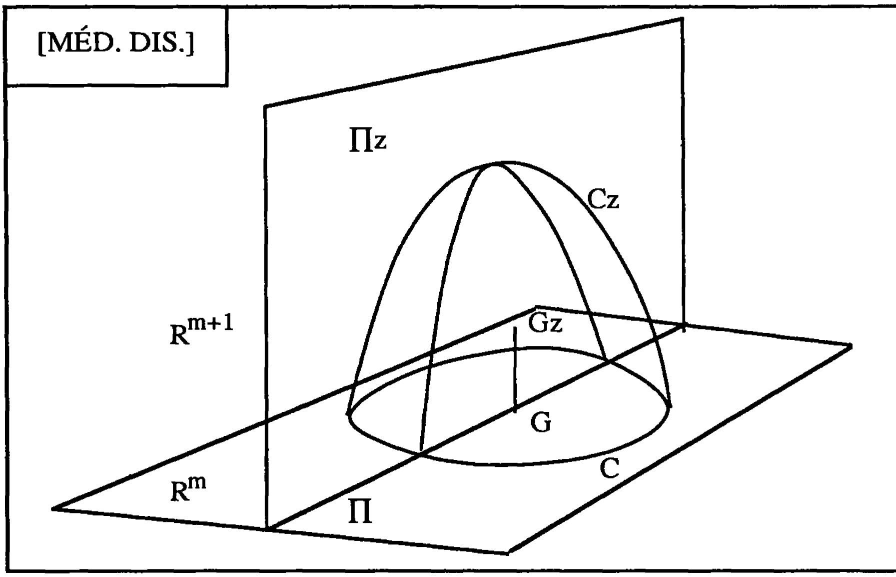
Soit **C** un convexe compact d'intérieur non vide de R^m et G son centre de gravité: tout hyperplan Π passant par G divise **C** en deux parties dont chacune a une mesure inférieure ou égale à $((m+1)^m - m^m) / m^m$ fois celle de l'autre.

Dans ce théorème, il faut entendre par "mesure" l'élément de volume usuel de l'espace ambiant, ou, en d'autres termes, la mesure μ de densité constante et égale à 1 par rapport à cet élément de volume. Nous nous proposons de généraliser ce théorème en considérant le cas d'une mesure μ dont le support est un convexe **C** et la densité est une fonction convexe sur **C**. On a l'énoncé suivant:

Soit **C** un convexe compact d'intérieur non vide de R^m ; μ une mesure ayant **C** pour support, et dont la densité par rapport à l'élément de volume de R^m est une fonction convexe sur **C** (i.e. une fonction induisant sur tout segment une fonction convexe au sens usuel pour les fonctions d'une variable); soit G le centre de gravité de **C**, muni de la mesure μ ; notons f la fonction définie pour tout entier positif p:

(*) Assistant à l'Université Libanaise.

Les cahiers de l'analyse des données-0339-3097/90/04 387 04/$2.40/ c Gauthier-Villars



$f(p) = ((p+1)^p - p^p) / p^p$;

alors, tout hyperplan Π passant par G divise **C** en deux parties dont chacune a (au sens de μ) une mesure inférieure ou égale à $f(m+1)$ fois celle de l'autre.

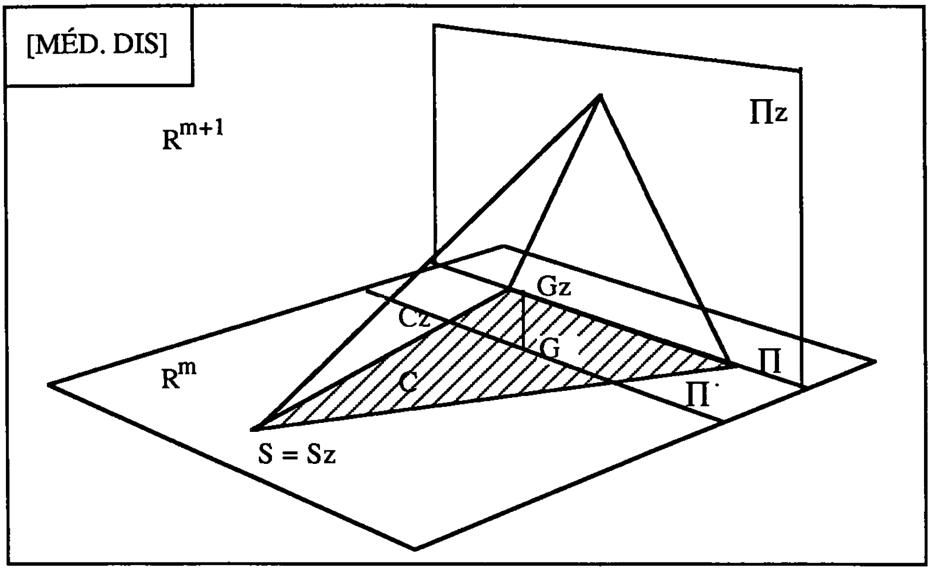
2 Démonstration du théorème

Le présent théorème diffère de celui de [MÉD. CONV.], dont il est une généralisation, en ce que, pour une dimension donnée *m*, de l'espace ambiant à **C**, la valeur limite supérieure du rapport des deux parties est $f(m+1)$ au lieu de $f(m)$. Il importe de noter ici que, quand p —> ∞, la fonction $f(p)$ tend, par valeur croissante, vers (e - 1), où e désigne la base des logarithmes népériens:

$$f(p) = ((p+1)^p - p^p) / p^p = (1 + (1/p))^p - 1 \longrightarrow e - 1 = 1,71\ldots ;$$

substituer $f(m+1)$ à $f(m)$ affaiblit donc le théorème (comme il est normal), mais l'affaiblit peu; puisque, pour toute dimension, vaut la borne supérieure 1,72 et que l'on a déjà $f(3) = 1,37\ldots$; $f(4) = 1,44\ldots$

Ceci posé, le présent théorème apparaît comme un corollaire de celui de [MÉD. CONV.]. Ajoutons, en effet, à l'espace ambiant R^m, une dimension supplémentaire qu'il sera commode d'appeler dimension verticale, ou axe des z: dans l'espace R^{m+1} ainsi construit, s'élève, au dessus du convexe **C** support de



μ, un volume convexe Cz, en pain de sucre, délimité par l'espace horizontal R^m et par l'hypersurface (surface usuelle dans le cas de la figure, où m = 2) représentative de la fonction densité de la mesure μ.

Le centre de gravité G de C, muni de la mesure μ, n'est autre que la projection horizontale (parallèlement à l'axe des z) du centre de gravité Gz du convexe Cz (muni de l'élément de volume usuel de l'espace R^{m+1} dans lequel il se trouve). À tout hyperplan Π de R^m passant par G, il correspond un hyperplan vertical Πz, de l'espace R^{m+1}, passant par Gz. (Sur la figure, Π est une droite et Πz est un plan.) Les deux parties de C que délimite Π ont, au sens de la mesure μ, des mesures qui ne sont autres que les volumes usuels des parties correspondantes de Cz délimitées par l'hyperplan vertical Πz de R^{m+1}.

Dès lors, on voit que les rapports de mesures calculées en dimension *m*, pour les parties de C délimitées par Π, ne sont autres que les rapports de volume usuels calculés en dimension *m*+1 pour les parties de Cz délimitées par Πz. Et c'est pourquoi, dans le présent théorème, on a dû substituer la borne $f(m+1)$ à la borne $f(m)$ valable dans [MÉD. CONV.].

Il est, d'autre part, aisé de montrer que la borne proposée ne peut être améliorée car elle est réalisée exactement sur un exemple tel que celui proposé sur la figure. Pour cet exemple, le convexe C est (dans R^m) une pyramide (ou, plus généralement un cône) de sommet S dont la base est dans un hyperplan Π de R^m; et le graphe Cz est (dans R^{m+1}) une pyramide (ou cône) dont le sommet Sz coïncide avec S et dont la base est dans l'hyperplan vertical Πz passant par Π. On voit alors qu'un hyperplan Π' parallèle à Π et passant par le centre de gravité G délimite deux parties de **C** dont la plus grande, qui s'étend du côté de Π, a une mesure qui vaut f(m+1) fois celle de la plus petite, qui est du côté du sommet S. En effet c'est ce rapport qui est réalisé entre les deux parties de Cz délimitées par l'hyperplan vertical Π'z (de R^{m+1}) passant par P'.

Références bibliographiques

D.J. Newman : Partitioning of areas by straight lines, in *American Math. Soc. Notices*,Vol 5 n°4, Août 1958, p.510.

Kh. Aludaat et A. Quaqazeh: Une généralisation de la notion de médiane à une distribution de masse multidimensionnelle, in *CAD*, Vol XIV, n°3, pp. 355-364.

HASSAN H. Anwar: Médiane et centre de gravité pour une distribution de masse de densité constante sur un convexe, in *CAD*, Vol XV, n°4.