

KH. ALUDAAT

A. QUAQAZEH

Une généralisation de la notion de médiane à une distribution de masse multidimensionnelle

Les cahiers de l'analyse des données, tome 14, n° 3 (1989),
p. 355-364

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1989__14_3_355_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE MÉDIANE À UNE DISTRIBUTION DE MASSE MULTIDIMENSIONNELLE

[MÉDIANE]

Kh. ALUDAAT, A. QUAQAZEH**

1 Origine du présent travail

D.J. Newman a, dans une très bève note (in *American Math. Soc. Notices*, Vol 5 n°4, Août 1958, p.510) annoncé, entre autres résultats, le théorème de géométrie suivant:

Pour tout ouvert Ω du plan, il existe au moins un point M tel que toute droite passant par M divise Ω en 2 parties dont chacune a une aire \leq au double de celle de l'autre.

Il revient au même de dire que chacune des parties a une aire $\geq 1/3$ de l'aire totale de Ω .

Nous nous proposons de généraliser ce théorème sous plusieurs aspects. Au lieu d'un ouvert Ω , (assimilé à la distribution de masse de densité 1 dont il est le support), nous considérons une distribution de masse positive finie μ à support compact; au lieu du plan nous prenons pour espace support un espace afffin de dimension n quelconque; au lieu du rapport (1/3) nous avons (1/(n+1)). Ceci posé, le résultat à démontrer s'énonce comme suit:

Pour toute distribution de masse positive finie μ à support compact dans R^n il existe au moins un point M tel que l'intégrale de μ étendue à tout demi-espace limité à un hyperplan H passant par M soit $\geq (1/(n+1))$ fois la masse totale de μ .

Il est facile de voir que, dans le cas trivial où $n=1$, nous affirmons ainsi l'existence d'au moins une médiane M pour toute mesure positive μ sur la droite

(*) Université de Jordanie.

\mathbb{R} ; et c'est pourquoi nous parlons d'une "généralisation de la médiane". Afin de présenter le plus simplement possible le plan de notre démonstration, nous revoyons d'abord, au §2, en suivant ce plan, la notion de médiane.

Comme il est commode de se placer dans le cadre d'un espace compact, on considère \mathbb{R}^n comme identifié à un hémisphère ouvert de la sphère de rayon 1, $S(n)$, de l'espace \mathbb{R}^{n+1} ; (l'identification se faisant par projection à partir du centre). On démontre donc, au §3, une propriété des recouvrements de la sphère par des hémisphères ouverts puis de ceux de \mathbb{R}^n par des demi-espaces.

Cette propriété est utilisée, au §4, pour démontrer le résultat annoncé. Des lemmes et compléments restant à démontrer au §5.

2 Variations sur la définition de la médiane

Soit μ une mesure positive de masse totale finie, (qu'on pourra supposer être 1), sur la droite \mathbb{R} . Un point M est une médiane pour μ si est $\geq(1/2)$ l'intégrale de μ étendue à chacune des deux demi-droites $(M, +\infty)$ et $(M, -\infty)$.

Désignons par $\mathbf{H}^<(\mu)$ l'ensemble des demi-droites ouvertes de \mathbb{R} sur lesquelles l'intégrale de μ est strictement inférieure à $(1/2)$. Ces demi-droites se répartissent en deux familles, qu'on peut noter $\mathbf{H}^<(\mu, +\infty)$ et $\mathbf{H}^<(\mu, -\infty)$, selon qu'elles s'étendent vers $-\infty$ ou vers $+\infty$. La réunion des demi-droites de la première famille est une demi-droite ouverte, qu'on peut noter $\mathbf{H}^{\leq}(\mu, +\infty)$; de même, à la 2-ème famille correspond une demi-droite $\mathbf{H}^{\leq}(\mu, -\infty)$.

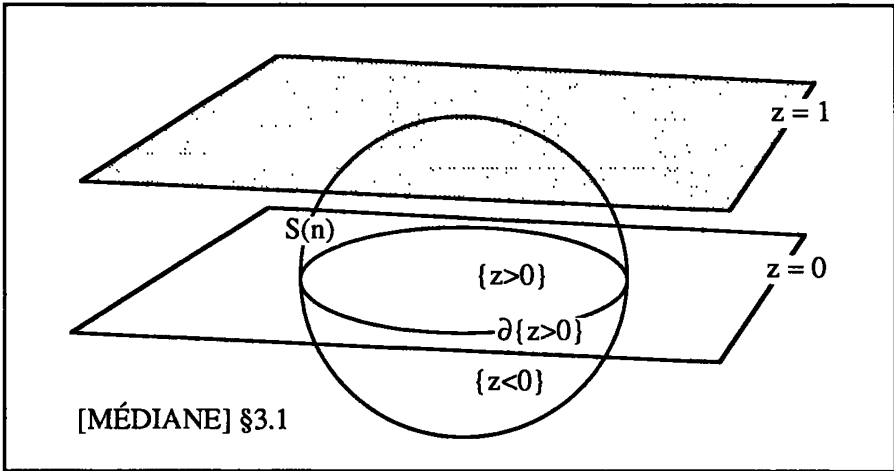
Affirmer l'existence d'une médiane équivaut à affirmer que la réunion des deux demi-droites ouvertes $\mathbf{H}^{\leq}(\mu, +\infty)$ et $\mathbf{H}^{\leq}(\mu, -\infty)$ n'est pas égale à \mathbb{R} , mais qu'il reste, entre les deux demi-droites un point M , voire un intervalle fermé de points, pouvant tenir lieu de médiane à μ . Cette propriété peut se démontrer par l'absurde. Si $\mathbf{H}^{\leq}(\mu, +\infty) \cup \mathbf{H}^{\leq}(\mu, -\infty) = \mathbb{R}$, alors $\mathbf{H}^{\leq}(\mu, +\infty) \cap \mathbf{H}^{\leq}(\mu, -\infty) \neq \emptyset$, et on peut également trouver deux demi-droites incluses respectivement dans $\mathbf{H}^{\leq}(\mu, +\infty)$ et $\mathbf{H}^{\leq}(\mu, -\infty)$, et dont la réunion est \mathbb{R} . Ces deux demi-droites sont des éléments de $\mathbf{H}^<(\mu, +\infty)$ et $\mathbf{H}^<(\mu, -\infty)$; elles portent chacune une masse de μ strictement $<(1/2)$; mais alors la somme des masses est <1 , et ne peut être celle de μ , contrairement à l'hypothèse.

Inutile de dire que cette pesante explication ne se justifie que comme une introduction au cas de \mathbb{R}^n : nous poursuivons cette introduction.

On peut encore envisager l'hypothèse que $H^<(\mu, +\infty) \cup H^<(\mu, -\infty)$ constitue, pour R , un recouvrement ouvert; dont on extrait un recouvrement fini.

Mais ici se rencontre une difficulté: le théorème de Borel-Lebesgue ne s'applique pas directement à R , qui n'est pas compact. On peut, par exemple, compléter R par les deux points $\{-\infty, +\infty\}$; ce qui se fait le plus naturellement en identifiant la droite à un demi-cercle; plus généralement, on identifie l'espace affiné à un hémisphère. C'est pourquoi, au §3, on étudie les recouvrements ouverts de la sphère par des hémisphères avant d'étudier les recouvrements de l'espace affiné par des demi-espaces.

3 Recouvrements génériques de la sphère par des hémisphères ouverts et recouvrements génériques de l'espace affiné par des demi-espaces ouverts



3.1 Cas de la sphère

Nous considérons la sphère $S(n)$ comme l'ensemble des points de l'espace euclidien de dimension $(n+1)$ R^{n+1} situés à la distance 1 de l'origine. Il sera parfois commode de désigner par x^1, x^2, \dots, x^n et z les coordonnées de R^{n+1} et d'identifier R^n d'une part avec l'hyperplan $\{z=1\}$ et d'autre part avec l'hémisphère $\{z>0\}$ de $S(n)$, la correspondance entre les deux images se faisant par alignement avec l'origine. Ainsi R^n reçoit une sphère à l'infini, $S(n-1)$, qui n'est autre que la frontière, $\partial\{Z>0\}$, de l'hémisphère $\{z>0\}$, avec un point à l'infini dans chaque demi-direction orientée.

On dit qu'un ensemble \mathbf{H} d'hémisphères ouverts de $S(n)$ constitue un recouvrement de $S(n)$ si on a: $S(n) = \cup \{H \mid H \in \mathbf{H}\}$. Du fait de la compacité de $S(n)$, on peut extraire de \mathbf{H} un sous-recouvrement fini \mathbf{H}^f .

Un recouvrement sera dit "générique", ou "en situation générale", si les hyperplans frontière des hémisphères qui le constituent sont eux-mêmes en situation générique, en ce sens que $(n+1)$ d'entre eux ont leur intersection réduite à l'origine. On va montrer que de tout recouvrement générique de $S(n)$ par des hémisphères ouverts on peut extraire un sous-recouvrement formé d'exactly $(n+2)$ hémisphères. La démonstration procédera par récurrence sur n , à partir du cas $n=1$, cas où $S(n)=S(1)$ est un cercle et où le mot "hémisphère" sert à désigner des demi-cercles.

On sait d'abord pouvoir extraire des sous-recouvrements finis. Soit donc \mathbf{H}° un tel recouvrement comprenant un nombre d'hémisphères aussi faible que possible: il faut montrer que ce nombre est exactement $(n+2)$. Il est d'abord clair que le nombre ne peut être $<(n+2)$: car $(n+1)$ hémisphères ne peuvent suffire. En effet, leurs hyperplans frontière, étant en situation générale, forment, dans l'espace ambiant, une figure analogue à ce qu'est dans l'espace usuel un trièdre: nous dirons un $(n+1)$ -èdre. Les hémisphères peuvent être vus comme l'intersection de $S(n)$ avec des demi-espaces ouverts; et le complémentaire de la réunion de ceux-ci est l'un des orthants délimités par le $(n+1)$ -èdre. Cet orthant découpe sur $S(n)$ un simplexe fermé (triangle sphérique si $n=2$) non couvert par la réunion des $(n+1)$ hémisphères.

Le recouvrement \mathbf{H}° comprend donc au moins $(n+2)$ hémisphères: nous distinguerons l'un de ces hémisphères noté H° , son bord étant noté ∂H° ; reste encore au moins un système de $(n+1)$ autres hémisphères.

Dans le cas de départ, $n=1$, ∂H° se réduit à 2 points, soit π^+ et π^- . Il faut avoir dans \mathbf{H}° un demi-cercle ouvert H^+ contenant π^+ ; et de même H^- contenant π^- ; H^+ et H^- sont l'intersection de $S(1)$ avec des demi-plans ouverts dont la réunion laisse libre un angle auquel il correspond un arc fermé sur $S(1)$. Cet arc doit être inclus soit dans le demi-cercle ouvert H° , soit dans le demi-cercle $H^{\circ'}$, symétrique de celui-ci. Mais s'il est inclus dans H° , alors H° est couvert par $H^+ \cup H^-$ et, sans cesser d'avoir un recouvrement de $S(1)$, on peut exclure H° de \mathbf{H}° , qui n'est donc pas minimal, contrairement à l'hypothèse. Donc $H^+ \cup H^-$ contient H° et $\{H^+, H^-, H^\circ\}$ constitue un recouvrement de $S(1)$ comprenant exactement 3 demi-cercles.

Revenons au cas général. Les hémisphères ouverts H de \mathbf{H}° , autres que H° , ont pour intersection avec ∂H° des hémisphères (de dimension $n-1$: dans le cas

$n=2$, où $S(n)$ est une sphère, il s'agit de demi-cercles du cercle ∂H° . D'après l'hypothèse de récurrence, on peut trouver $(n+1)$ hémisphères H dont la réunion contient ∂H° . Le raisonnement se poursuit alors comme dans le cas $n=2$. La réunion des $(n+1)$ demi-espaces ouverts définissant les H a pour complémentaire un $(n+1)$ -orthant découpant sur $S(n)$ un simplexe fermé qui doit être soit dans H° soit dans son symétrique $H^{\circ'}$ (car il a intersection vide avec ∂H° qui est recouvert par les H). Si ce simplexe était dans $H^{\circ'}$, H° pourrait être éliminé de H° , contrairement à l'hypothèse que ce recouvrement est formé d'un nombre minimum d'hémisphères. Mais alors les $(n+1)$ hémisphères H recouvrent $H^{\circ'}$ en plus de ∂H° ; et avec H° ils recouvrent $S(n)$. C.Q.F.D.

Il importe de noter ici que l'hypothèse de "situation générale" est essentielle. Par exemple, dans le cas $n=1$, on a un recouvrement minimal du cercle comprenant 4 (et non 3) demi-cercles $\{H^\circ, H^{\circ'}, H, H'\}$ deux à deux symétriques. Pour $S(n+1)$ on aura de même un recouvrement minimal formé des $2(n+1)$ hémisphères ayant pour frontière les $(n+1)$ hyperplans de coordonnées.

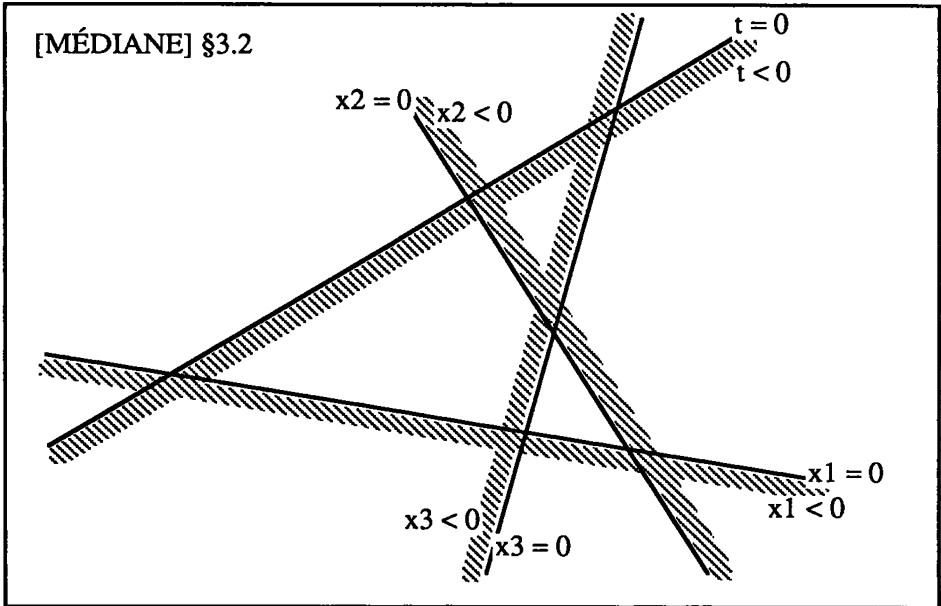
3.2 Cas de l'espace affín

Considérons maintenant le cas d'un recouvrement H de l'espace affín R^n par des demi-espaces ouverts H ; en supposant, de plus, d'une part que ces demi-espaces (i.e., leurs hyperplans frontière) sont en situation générale; et d'autre part, qu'ils recouvrent la sphère à l'infini, en ce sens que, pour toute demi-direction orientée, il existe un demi-espace H de H la contenant (i.e., contenant une demi-droite ayant cette direction). On va montrer qu'on peut extraire de H un revêtement H° de l'espace affín par $(n+1)$ demi-espaces.

À un demi-espace ouvert H de l'espace affín R^n correspond un hémisphère de $S(n)$ (noté également H): il faut seulement noter que l'hémisphère H coupe à la fois les hémisphères $\{z>0\}$ et $\{z<0\}$ de $S(n)$.

Par hypothèse, H recouvre $\partial\{z>0\}$, c'est-à-dire la sphère à l'infini de l'espace affín. En adjoignant à H l'hémisphère $\{z<0\}$, on a un recouvrement générique de $S(n)$ par des hémisphères ouverts. De ce recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement fini minimal H° de $S(n)$; par $(n+2)$ hémisphères ouverts H .

Si $\{z<0\}$ fait partie de H° , alors les autres hémisphères H constituent le recouvrement cherché pour $\{z\geq 0\}$, et donc pour l'espace affín. Dans le cas contraire il reste donc que H° soit formé de $(n+2)$ hémisphères H de H . Parmi ceux-ci, $(n+1)$ devront recouvrir $\partial\{z>0\}$ et aussi $\{z<0\}$, laissant libre un simplexe fermé de l'hémisphère $\{z>0\}$; simplexe qui devra être recouvert par le $(n+2)$ -ème hémisphère de H° . On va montrer que cette situation elle-même implique qu'on puisse trouver, dans H° , $(n+1)$ hémisphères H qui ensemble recouvrent $\{z>0\}$.



Ici, le plus clair nous semble être de calculer dans R^{n+1} , en assimilant un hémisphère H à la forme linéaire qui est sur lui négative.

Nous dirons donc qu'on a $(n+1)$ formes linéaires y_i , avec les hémisphères H_i , $\{y_i < 0\}$, qui recouvrent $\{z \leq 0\}$, et sont donc telles que $z = \sum \{w^i y_i\}$, avec des coefficients w^i tous strictement positifs; et un $(n+2)$ -ème hémisphère H' d'équation $\{t < 0\}$, avec $t = \sum \{u^i y_i\}$ et des coefficients u^i tous négatifs, pour que H' contienne le simplexe fermé laissé libre par les autres hémisphères H_i . On va montrer que, sous ces hypothèses, $\{z > 0\}$ peut être recouvert par H' et n des hémisphères H_i .

Il faut faire un calcul d'échange. Nous supposons, pour simplifier l'écriture que le maximum du quotient w^i/u^i est atteint pour $i=1$. On a alors:

$$z = (w^1/u^1) t + \sum \{(w^i - (u^i w^1/u^1)) y_i \mid i = 2, 3, \dots\};$$

et, dans cette expression de z , les coefficients sont tous négatifs; ce qui implique que la réunion de H'^c et des H_i^c (pour $i = 2, 3, \dots$) recouvre $\{z > 0\}$; C.Q.F.D.

La figure montre, dans le cas de l'espace affine de dimension 2, comment, alors que 3 demi-plans laissent découvert un triangle, un autre demi-plan, qui couvre ce dernier, peut avec deux des 3 premiers, couvrir le plan.

4 Analogie multidimensionnel de la médiane

Revenons aux notations posées au §2 en les étendant à toute valeur de n.

La mesure positive μ , de masse totale 1, portée par un compact de R^n (identifié à l'hyperplan $\{z=1\}$), peut, en même temps, être considérée comme une mesure portée par l'hémisphère $\{z>0\}$ de $S(n)$. À un demi-espace ouvert $H^<$ de R^n contenant une masse de μ moindre que $(1/(n+1))$ il correspond un hémisphère de $S(n)$ (noté également $H^<$) satisfaisant à la même condition: il faut seulement noter, ici encore, que l'hémisphère $H^<$ coupe à la fois les hémisphères $\{z>0\}$ et $\{z<0\}$ de $S(n)$.

Nous entreprenons de montrer que l'ensemble $H^<(\mu)$ des demi-espaces de R^n contenant une masse $<1/(n+1)$ ne constitue pas un recouvrement de R^n . Il en résultera que tout point M n'appartenant à aucun de ces demi-espaces,

$$M \in R^n - \cup \{H \mid H \in H^<(\mu)\},$$

constitue une médiane pour μ , au sens généralisé proposé au §1. En effet, sur tout demi-espace ouvert de R^n contenant M, la mesure μ aura une intégrale $>1/(n+1)$; et donc, par continuité, tout demi-espace fermé de R^n contenant M portera une masse $\geq 1/(n+1)$.

Comme il est clair qu'il y a dans $H^<(\mu)$ des demi-espaces $H^<$ s'étendant à l'infini dans toute direction, on conclut qu'en termes d'hémisphères, $H^<(\mu)$ induit un recouvrement de $\partial\{z>0\}$; c'est-à-dire de la sphère à l'infini de R^n . Si $H^<(\mu)$ constitue un recouvrement de R^n , on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini minimal H^o ; dont nous supposons qu'il est générique, propriété (revue dans la suite au §5) qui résulte, en bref, de ce qu'il est permis de déplacer, au besoin, les éléments d'un recouvrement fini pour les mettre en situation générale. D'après le §3, H^o est un système de $n+1$ hémisphères $H^<$ recouvrant $\{z>0\}$ (ou R^n).

Mais cette hypothèse est à éliminer, car alors la mesure μ est recouverte par les $(n+1)$ hémisphères $H^<$, dont chacun contient une masse $<1/(n+1)$; ce qui ferait un total strictement <1 . Cette remarque démontre qu'est absurde l'hypothèse:

$$R^n - \cup \{H \mid H \in H^<(\mu)\} = \emptyset .$$

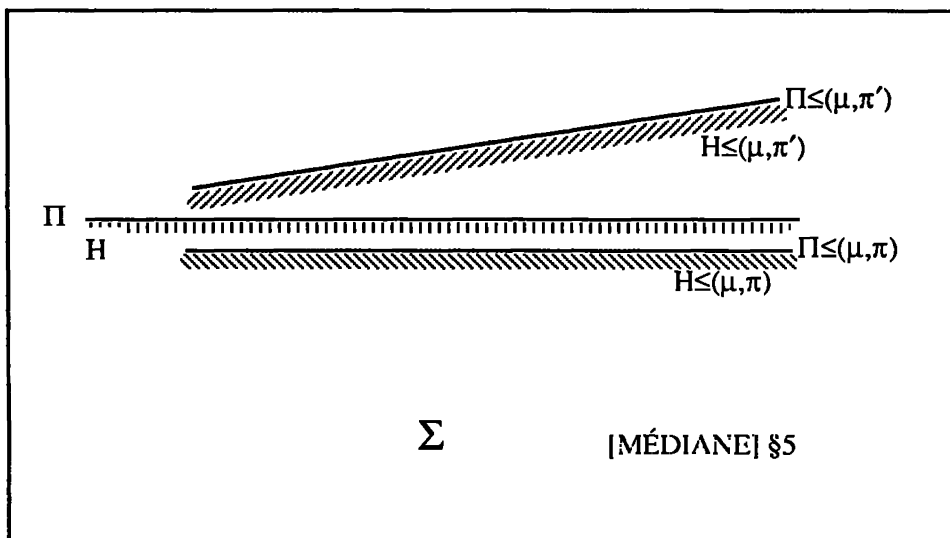
Pour achever la démonstration, il reste toutefois à établir que les hypothèses de "situation générale" sont légitimes; ce que nous ferons en nous plaçant dans l'espace affini support de la mesure; ce qui nous permettra également de préciser la définition de l'ensemble des points M susceptibles d'être pris pour médiane généralisée, d'où le titre du §5.

5 L'ensemble des points médiane

Raisonnons maintenant dans \mathbb{R}^n , supposé muni de sa structure euclidienne usuelle, afin de simplifier le langage géométrique. À tout point π de la sphère à l'infini $\partial\{z>0\}$ correspondent des demi-espaces de $H^<(\mu)$ contenant π et limités à un hyperplan perpendiculaire à la direction π . Parce que μ est à support compact, la réunion de tous ces demi-espaces est aussi un demi-espace ouvert qu'on peut noter $H^<(\mu, \pi)$, comme on a noté $H^<(\mu, +\infty)$ sur la droite \mathbb{R} , au §2. La masse de μ sur $H^<(\mu, \pi)$ est $\leq 1/(n+1)$. L'ensemble des points médiane M de μ n'est autre que le complémentaire M de la réunion $\cup \{H^<(\mu, \pi) \mid \pi \in \partial\{z>0\}\}$; ou encore l'intersection convexe des demi-espaces fermés complémentaires des $H^<(\mu, \pi)$.

Nous nous proposons de montrer que le demi-espace $H^<(\mu, \pi)$, ou, ce qui revient au même, l'hyperplan orienté $\Pi^<(\mu, \pi)$ qui en est le bord, dépend continûment de π . Désignons par Σ une boule choisie une fois pour toute et contenant toute la masse de μ . Il est clair que $\Pi^<(\mu, \pi)$ coupe Σ (du fait de la condition de masse définissant $H^<(\mu)$). Bien plus, tout autre hyperplan $\Pi^<(\mu, \pi')$, pour π' voisin de π , a une intersection non vide avec $\Sigma \cap \Pi^<(\mu, \pi)$; car si, par exemple, on avait $\Sigma \cap H^<(\mu, \pi') \supset \Sigma \cap H^<(\mu, \pi)$, on pourrait trouver un hyperplan Π de direction π , intercalé entre $\Sigma \cap \Pi^<(\mu, \pi)$ et $\Sigma \cap \Pi^<(\mu, \pi')$, avec un demi-espace H (de frontière Π) où $H^<(\mu, \pi)$ est strictement inclus et ayant pourtant une masse $< 1/(n+1)$ parce que son intersection avec Σ peut être strictement incluse dans celle de Σ avec un demi-espace $H^<$ de direction π' .

La figure, qui illustre le présent §, montre comment peut être intercalé le plan Π . Bien que correspondant à la dimension $n=2$, cette figure représente le cas général car il suffit de considérer que l'on a projeté les objets multidimensionnels sur le plan engendré par les normales issues du centre de Σ aux hyperplans $\Pi^<(\mu, \pi)$ et $\Pi^<(\mu, \pi')$.



Il en résulte que $H^{\leq}(\mu, \pi)$ dépend continûment de π . Par conséquent $H^{\leq}(\mu)$ est inclus dans la fermeture de son intérieur; en ce sens qu'au voisinage de tout $H^{\leq}(\mu, \pi)$ il existe un H^{\leq} de direction π tel que tout demi-espace suffisamment voisin de lui soit un élément de $H^{\leq}(\mu)$.

Revenons dans $S(n)$. Supposons que $H^{\leq}(\mu)$ constitue un recouvrement de $\{z \geq 0\}$. Du fait de la compacité de $\{z \geq 0\}$, on peut d'abord extraire, de ce recouvrement, un sous-recouvrement fini H° . Supposons de plus que l'ensemble des hémisphères de $S(n)$ est muni d'une structure d'espace métrique compact (par exemple celle définie par la distance entre pôles). Alors il existe un ϵ suffisamment petit pour qu'on puisse substituer à chacun des H^{\leq} de H° un H^{\leq} quelconque situé à une distance de H^{\leq} inférieure à ϵ , sans cesser d'avoir un recouvrement. On peut supposer chacun de ces H^{\leq} intérieur à $H^{\leq}(\mu)$, ce qui permet de les déplacer pour les mettre en situation générale. C.Q.F.D.

N.B. Le rapport $(1/n+1)$ ne peut être amélioré. On s'en assure d'après l'exemple d'un mesure μ formée de $n+1$ masses ponctuelles égales situées au sommet d'un simplexe: M est alors le simplexe fermé. Plus remarquable encore est le cas de $n+1$ segments divergeant à partir d'un point M et portant chacun une masse totale $1/(n+1)$ répartie uniformément: alors M se réduit à $\{M\}$.

Référence bibliographique

D.J. Newman : Partitioning of areas by straight lines, in *American Math. Soc. Notices*, Vol 5 n°4, Août 1958, p.510.