K. BENSALEM

Contre-exemple à l'existence d'une mesure positive ayant des marges positives compatibles données

Les cahiers de l'analyse des données, tome 9, nº 2 (1984), p. 227-230

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1984__9_2_227_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. IX - 1984 - nº 2 - p. 227-230

CONTRE-EXEMPLE A L'EXISTENCE D'UNE MESURE POSITIVE AYANT DES MARGES POSITIVES COMPATIBLES DONNÉES

[CONTREXEMPLE MARGES]

par K. Bensalem (1)

0 *Position du problème* : L'objet de la présente note est de montrer par un contre-exemple que sur un produit de plus de deux ensembles, il n'existe pas toujours une mesure positive admettant un système de marges positives données compatibles entre-elles.

1 *Notations* : Plusieurs articles ont été consacrés aux produits finis de plus de deux ensembles finis : nous citerons [*INTER. CORR. MULT.*] (A. Bener : C.A.D. Vol VII n° 1 ; 1982) ; [*INF. TERN.*] (V. Cholakian ; C.A.D. Vol VIII n° 1 ; 1983) ; [*INF. CORR. MULT.*](J.P. Benzécri et K. Ibrahim Hamouda ; C.A.D. Vol VIII n° 1 ; 1983). Nous reprenons les notations de ces articles, à ceci près que dans le cas présent, il est inutile de considérer les densités des mesures, par rapport à une mesure de référence produit de marges simples. On note :

$$S = \Pi\{Jq \mid q \in Q\} \; ; \; \mathrm{Card}\, Q \geq 3 \; ;$$

Le cas $Q = \{1, 2, 3\}$ nous intéresse particulièrement, car il permet de montrer sur une figure le principe de la construction faite en formules pour $\mathrm{Card}\, Q$ quelconque.

Les ensembles Jq sont toujours des ensembles à deux éléments assimilés à $\{0,1\}$; en sorte que S peut être regardé comme l'ensemble des sommets du cube (ou de l'hypercube) construit sur les vecteurs de base de $R^{\mathrm{Card}\, Q}$. Nous parlerons, en bref, du "cube S".

Si a est une partie de Q ($a \subset Q$) on note $X(a)$ la produit partiel :

$$X(a) = \Pi\{Jq \mid q \in A\}.$$

Pour toute mesure μ_S sur le cube S et toute partie a de Q est définie une mesure marginale de "marge" $\mathrm{mar}(a)\mu_S = \mu_{X(a)}$ sur $X(a)$:

$$\forall\, x \in X(a) \; : \; \mu_x = \Sigma\{\mu_{x,y} \mid y \in Y(a)\} \; ,$$

où on a noté : $y(a) = X(Q - a) = \Pi\{Jq \mid q \in Q - a\}$. En particulier, si $a = \emptyset$, $X(\emptyset)$ est réduit à un seul élément, et $\mu_{X(\emptyset)}$ s'identifie à la masse totale de μ_S.

(1) *Ingénieur Informaticien de la Faculté des Sciences de Tunis.*
Docteur Ingénieur en Analyse des Données (Université Pierre et Marie Curie).

0339-3097/84/02 227 4/$ 2.40/© Gauthier-Villars

2 *Construction d'une mesure définie par ses marges*

Notons $A = \{a | a \subset S \; ; \; a \neq S\}$ l'ensemble des parties de S distinctes de S. On dit qu'un ensemble indicé par a dans A de mesures $\mu(a)$ sur $X(a)$, est un système de marges compatibles si la relation $a' \subset a$ implique que $\mu(a')$ est la marge de $\mu(a)$ sur $X(a')$. Il est clair que le système des $\mu(a)$ est complètement fixé par la donnée des $\mu(a)$ pour lesquels $\mathrm{Card}\, a = \mathrm{Card}\, Q - 1$; (les autres $\mu(a')$ étant les marges de celles-ci).

Pour chercher les mesures μ_S admettant pour marges un système compatible donné $\{\mu(a) | a \in A\}$ (i.e. les μ_S telles que : $\forall\, a \in A : \mu_{X(a)} = \mu(a)$), il est commode d'introduire dans l'espace R_S des mesures sur S un produit scalaire et une base orthonormée.

On pose :

$$<\mu_S\, , \nu_S> = \Sigma\{\mu_s\, \nu_s\, 2^{-\mathrm{Card}\, Q} \mid s \in S\} \; ;$$

autrement dit, le produit scalaire est la moyenne (arithmétique usuelle) du produit de la masse d'un sommet s du cube pour les mesures μ et ν.

A chaque partie a de S, on associe la mesure ρ^a_S définie par :

$$\forall\, jQ \in S : \rho^a_{jQ} = (-1)^{\Sigma\{jq | q \in a\}} \; ;$$

autrement dit tout sommet s a pour masse +1 ou -1 ; le signe étant donné par la parité du nombre des coordonnées jq valant 1 pour q $\in$ aux a. En particulier pour $a = \emptyset$ on a la mesure $\rho^{\emptyset}_S$, pour laquelle tout sommet a la masse 1 ; pour a = S, on a la mesure ρ^S_S pour laquelle l'origine (0,0,0,0...) a masse 1, et deux sommets ont des masses de signe contraire s'ils sont réunis par une arête ; dans le cas où Card Q = 3, les sommets de masse (+1) et ceux de masse (-1), forment deux tétraèdres imbriqués.

Il est clair que les μ^a_S sont de masse totale zéro ; à l'exception de $\rho^{\emptyset}_S$ dont la masse totale est $2^{\mathrm{Card}\, Q} = \mathrm{Card}\, S$. Pour vérifier que les $\{\rho^a_S \mid a \subset Q\}$ forment une base orthonormée de R_S, il suffit de remarquer que la fonction $(\rho^a_s\, \rho^{a'}_s)$, (produit des masses de s pour les deux mesures d'indice a et a') n'est autre que la masse ρ^b_s de s pour la mesure dont l'indice b est la différence symétrique de a et a'.

$$b = (a \cup a') - (a \cap a')$$

en effet, ont même parité, les deux sommes :

$$\Sigma\{jq | q \in a\} + \Sigma\{jq | q \in a'\}, \text{ et : } \Sigma\{jq | q \in b\}.$$

D'où il résulte que $< \rho^a_S\, , \rho^{a'}_S > = 0$ si $b \neq \emptyset$; i.e. si $a \neq a'$.

Comme il est de règle avec une base orthonormée, les coordonnées d'une mesure quelconque μ_S se calculent par produit scalaire :

$$\mu_S = \Sigma\{<\mu_S , \rho^a_S> \rho^a_S \mid a \subset Q\} ;$$

(le nombre des coordonnées étant $\mathrm{Card}\, S = 2^{\mathrm{Card}\, Q}$) .

D'ailleurs si a est inclus dans a', le produit scalaire $<\mu_S , \rho^a_S>$ est déterminé par la loi marginale $\mathrm{mar}(a')\mu_S$: car, en bref la masse ρ^a_s ne dépend pas des coordonnées jq de s dont l'indice q est dans $Q - a$, et en particulier dans $Q - a'$. La donnée de l'ensemble, $\{\mu(a) \mid a \in A\}$ d'un système de marges compatibles, permet de déterminer toutes les coordonnées $<\mu_S , \rho^a_S>$, exceptée la coordonnée $<\mu_S , \rho^S_S>$; le caractère de "compatibilité" des marges, signifiant que le calcul de $<\mu_S , \rho^a_S>$ aboutit au même résultat quelle que soit la marge $\mu(a')$, $\mu(a'')$... utilisée pourvu que $a \subset a'$, $a \subset a''$,...

Une mesure μ_S est complètement déterminée par la donnée d'un système de marges compatibles $\{\mu(a) \mid a \in A\}$, et de la masse d'un sommet du cube, par exemple la masse μ_0 de l'origine : en effet , μ_0 fournit une équation qui détermine $<\mu_S , \rho^S_S>$ si les autres $<\mu_S , \rho^a_S>$ sont connus. On peut se figurer ce résultat directement, sans recourir à la base des ρ^a_S , en cherchant à déterminer les μ_S à partir de μ_0, d'après les marges $\mu(a)$. En effet, en bref la connaissance des marges équivaut à celle des masses de toutes les arêtes (si l'on entend par "masse d'une arête" la somme des masses des sommets qui en sont les extrémités) ; ceci permet de fixer la masse d'une extrémité si on connaît celle de l'autre ; d'où, de proche en proche toutes les masses, à partir de celle de l'origine. De plus, augmenter de 1 la masse de l'origine amène à diminuer de 1 la masse des sommets reliés à l'origine par une arête, et , de proche en proche, à ajouter à μ_S la mesure ρ^S_S .

3 *Le contre-exemple*

Pour définir un système $\{\mu(a) \mid a \in A\}$ de marges compatibles, il suffit de se donner une mesure μ_S et de poser : $\mu(a) = \mathrm{mar}(a)\mu_S$: la compatibilité est évidemment vérifiée. On choisit ici pour μ_S une mesure qui comporte des masses négatives (en fait une seule μ_0) mais dont les marges sont positives. Le contre-exemple résultera de ce qu'aucune mesure $\mu_S + x\,\rho^S_S$ n'est dépourvue de masse négative. On pose :

$$\forall\, jQ \in S : \mu_{jQ} = f(\,\Sigma\{jq \mid q \in Q\}) ;$$

où f est la fonction $f(0) = -1$; $f(1) = 1$; et $f(n) = 0$ si $n \geq 2$. En termes géométriques, l'origine a la masse (- 1) ; les extrémités des arêtes issues de l'origine ont la masse 1 ; les autres sommets ont la masse nulle.

Il est clair que les marges $mar(a)\mu_S$, ($a \neq Q$), ne comportent pas de masse négative, toujours dans la projection la masse négative de l'origine est compensée par au moins une masse positive qui se projette au même point qu'elle.

D'autre part, une mesure $\mu_S + x\rho^S_S$ (où x est un nombre réel) admettra nécessairement des masses négatives. En effet, pour que la masse à l'origne soit positive ou nulle, il faut que $x \geq 1$; pour que soit positive la masse en un sommet jQ où $\Sigma\{jq | q \in Q\} = 3$, il faut que $x \leq 0$ (car en un tel sommet $s, \rho^S_S = -1$ et $\mu_S = 0$) ; or les conditions $x \leq 0$ et $x \geq 1$ sont incompatibles !

Si on le désire, on peut produire un contre-exemple avec des marges $\mu(a)$ ne comportant pas de masse nulle : il suffit de prendre au lieu des marges de μ_S celles de $\mu'_S = \mu_S + \varepsilon\rho^{\emptyset}_S$ (i.e. ajouter une masse ε à chaque sommet) : on voit par continuité qu'il reste impossible de trouver x tel que $\mu'_S + x\rho^S_S$ ne comporte pas de masse négative.

La figure se rapporte au cas Card $Q = 3$; à gauche on a la mesure μ_S sur le cube avec ses marges binaires projetées sur des carrés parallèles aux faces ; à droite on a tenté de déterminer les étages $x2 = 0$ et $x2 = 1$ d'une mesure positive qui aurait ces marges: en faisant la somme de ces deux étages, on a une marge en $(x1, x3)$ qui n'est pas celle demandée ; d'où impossibilité.