

J. P. BENZÉCRI

**Graphe planaire et représentation sur une surface
de genre quelconque pour une courbe à points
multiples donnée par un schéma de Gauss**

Les cahiers de l'analyse des données, tome 8, n° 4 (1983),
p. 439-458

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1983__8_4_439_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GRAPHE PLANAIRE ET REPRÉSENTATION SUR UNE SURFACE DE GENRE QUELCONQUE POUR UNE COURBE A POINTS MULTIPLES DONNÉE PAR UN SCHEMA DE GAUSS

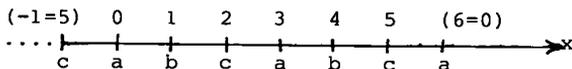
[GRAPH. GAUSS]

par J.P. Benzécri

1 Schéma de Gauss : classiquement (cf. e.g. R.C. Read & P. Rosensthiel *in Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai* 18 Combinatorics, Keszthely (Hongrie) 1976) pp 843-876 : ou H. de Fraysseix et P. Rosensthiel *in Colloque Int. C.N.R.S. n° 260, Problèmes combinatoires et théories des graphes*), un tel schéma est défini par un mot (sur un alphabet de longueur quelconque) tel que toute lettre qui y figure, y figure au moins deux fois. Les mots les plus simples satisfaisant à cette condition sont :

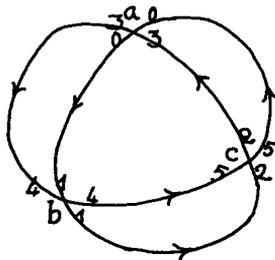
aa ; aaa ; aabb ; abab ;

Un schéma définit une courbe différentiable fermée à points multiples. Prenons par exemple le mot abc abc : on peut l'écrire sur un axe suivant le paramétrage cyclique suivant :



la courbe est quotient de la droite par la relation d'équivalence $x \approx x + 6$, complétée par l'identification à un point de chacune des classes d'équivalences définie par une lettre : ici ($0 \approx 3$) ; ($1 \approx 4$) ; ($2 \approx 5$).

La courbe ainsi définie peut toujours être représentée (plongée) dans l'espace de dimension 3 ; dans le cas particulier de abc abc, il existe une représentation plane, qu'on peut commenter comme suit :



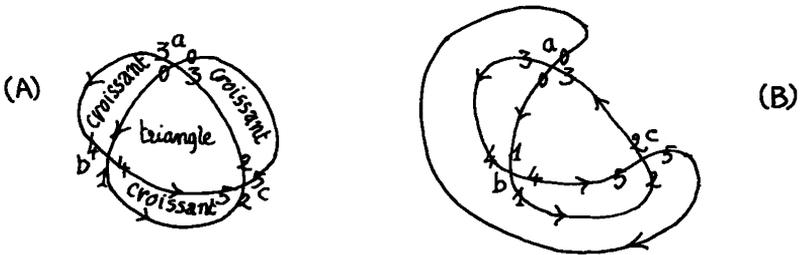
partant du point considéré comme ayant le paramètre 0, on va en b(x = 1) puis en c(x = 2) ; on repasse en a(x = 3) ; en b(x = 4) ; en c(x = 5) pour revenir enfin en a(x = 0 \approx 6).

Cet exemple suggère plusieurs problèmes que nous poserons dans ce § 1, avant de leur donner dans la suite des solutions plus ou moins originales et plus ou moins complètes.

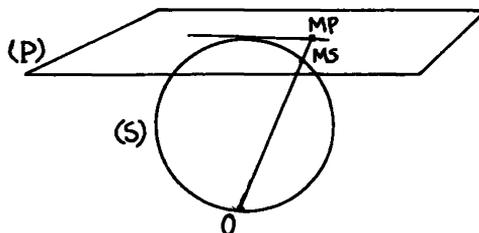
1-er *Problème* : soit un schéma, ou mot m : reconnaître si celui-ci est planaire ; i.e. si la courbe fermée à points multiples qu'il définit peut être représentée dans le plan.

2-ème *Problème* : à supposer que le schéma m soit planaire, de combien de façons différentes la courbe peut-elle être représentée dans le plan. Ici, deux représentations doivent être regardées comme différentes si on ne passe de l'une à l'autre par une déformation continue : en terme de topologie on dit qu'on s'intéresse aux classes de représentations homotopes.

Voici pour le schéma $abcabc$ deux représentations dont l'examen nous amènera à modifier le problème 2. Il est clair que ces deux représentations ne sont pas homotopes : car dans (A) les deux arcs ca



de paramètres respectifs $(2,3)$ et $(5,6) \approx (5,0)$ enferment un croissant plan ne contenant aucun arc de la courbe ; et cette propriété, qui se conserve par déformation continue, n'appartient pas à (B). Cependant voici en quoi diffèrent les deux tracés (A) et (B) : pour x variant de 0 à 5, ils sont identiques (à des déformations irrelevantes près) ; mais le dernier arc ca $(5,6) \approx (5,0)$ est refermé dans (A) le long du premier ca $(2,3)$; tandis que dans (B) le dernier arc ca enveloppe tout le reste de la courbe, supposons maintenant que les deux figures (A) et (B) soient reportées sur l'hémisphère supérieur d'une sphère : il deviendra possible de passer continûment de (A) à (B) en faisant glisser l'arc $(5,6) \approx (5,0)$ en dessous de la sphère. Intéressons nous donc à la classification des représentations sphériques d'un schéma de Gauss, plutôt qu'à celle des représentations planes.



Classiquement, on réalise par projection stéréographique une correspondance biunivoque entre un plan (P) et une sphère (S) privée d'un point ; lequel est sur la figure le pôle sud 0 ; un point MP du plan et un point MS de la sphère se correspondant s'ils sont alignés avec 0. Il est clair qu'à deux représentations sur (P) reliées par une déformation continue (on dira homotope) il correspond (par projection stéréographique) sur (S) deux représentations homotopes. Réciproquement soit (AS) et (AS') deux représentations homotopes sur (S) : il leur correspond sur (P), par projection stéréographique deux représentations homotopes (AP) et (AP'), à condition que la déformation continue de (AS) à (AS') se fasse sans balayer le pôle de projection 0. De façon précise, une classe d'homotopie de représentation sur (P) est définie par la donnée d'une classe d'homotopie de représentation sur (S), en spécifiant de plus dans laquelle des composantes de (S) découpées par la représentation, se trouve le pôle 0.

Reprenons les deux graphiques (A) et (B) ci-dessus : considéré comme tracé dans le plan, (A) divise celui-ci en cinq composantes qui sont :

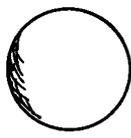
- trois croissants : ca, limité aux arcs (2,3) et (5,0) ; ab, limité à (0,1) et (3,4) ; bc, limité à (1,2) et (4,5).
- un triangle : abc, limité aux arcs (0,1), (4,5), (2,3).
- un domaine extérieur : limité à un contour abc formé de trois arcs (3,4), (1,2) et (5,0).

Si on passe à la représentation sphérique, ce *domaine extérieur* devient un deuxième triangle abc, contenant le pôle 0. La différence entre (A) et (B) consiste en ce que, partant d'une même classe d'homotopie de représentation sur la sphère, on met pour (A), le pôle de projection dans le triangle (3,4) (1,2) (5,0) ; tandis que pour (B) ce pôle est dans le croissant (2,3) (5,0).

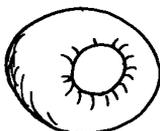
Ainsi la classification des représentations planaires a été ramenée à celle des représentations sphériques. Cependant on sait que tout schéma de Gauss n'admet pas de représentation plane ni donc sphérique. On posera donc un problème plus général :

3-ème *Problème* : étant donné un schéma, classer ses représentations sur les surfaces compactes sans bord, orientables ou non, des divers genres.

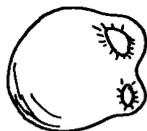
On sait que les surfaces compactes orientables sans bord sont la sphère, le tore : et plus généralement la sphère munie d'un certain nombre p d'anses ; p étant le *genre* de la surface. Une classification analogue existe pour les surfaces non orientables : la plus simple de celles-ci est le plan projectif, qu'on peut aussi définir comme le quotient d'une sphère par la symétrie centrale identifiant tout couple de points diamétralement opposés. Dans la suite nous ne ferons qu'esquisser la classification des représentations d'un schéma de Gauss sur une surface non orientable : en revanche la notion même d'orientabilité jouera un rôle essentiel.



sphère

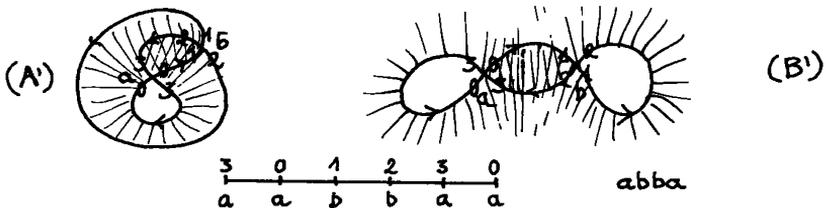


tore

sphère à 2 anses
(dite encore : tore à 2 trous)

Ce problème de classification doit être restreint : en effet, à partir d'une représentation sur la sphère, on peut, en munissant celle-ci d'un nombre indéfini d'anses diversement disposées, obtenir des représentations sur une surface de genre quelconque. Pour écarter ces complications artificielles, on imposera la condition complémentaire qu'on se restreint aux représentations pour lesquelles chacune des composantes délimitées sur la surface par les axes de la courbe, sont homéomorphes à un disque (on a vu ci-dessus le cas de croissants limités à deux arcs ; de triangles limités à trois arcs ; le cas d'un polygone à un nombre quelconque de côtés peut se présenter) : par là on exclut la présence d'anses ayant leurs deux extrémités sur une même composante ; en reliant entre elles deux composantes différentes.

4-ème Problème étant donnée une (classe de représentation d'un schéma m sur la sphère (ou le plan), reconnaître si cette représentation peut être considérée comme la frontière d'un étalement du disque :

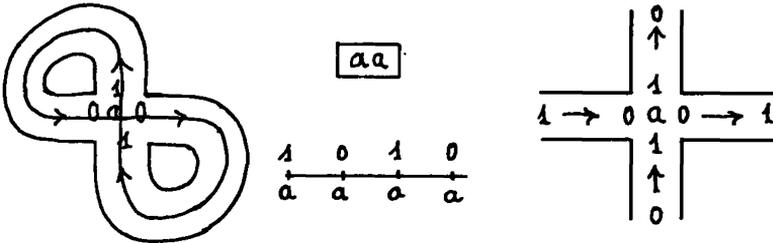


La figure ci-dessus expliquera le problème sur deux représentations (A') et (B') du schéma abba. Dans (A') on reconnaît, d'après les hachures, une amibe dont deux pseudopodes se croisent : ou encore, en termes mathématiques l'image d'un disque homéomorphe localement, mais non biunivoque globalement ; c'est-à-dire un étalement du disque. La figure (B') doit être regardée comme tracée sur l'hémisphère supérieur d'une sphère : la zone hachurée s'étend et recouvre tout l'hémisphère inférieur ; on peut dire qu'on est parti d'une aire hachurée recouvrant toute la sphère sauf une calotte blanche ; puis que deux arcs opposés du bord de la zone hachurée ont été tirés jusqu'à se recouvrir en partie. Ici encore il s'agit d'un étalement ; d'ailleurs sur la sphère (A') ne diffère pas de (B') : (B') est la représentation plane de (A') obtenue en plaçant le pôle de projection à l'intérieur du triangle (hachuré) limité aux trois arcs (1,2), (0,1), (3,0).

Au § 5 nous abordons la solution du problème 4 sans réussir à en faire une discussion complète. Quant au problème 3, après avoir donné au § 2 les principes généraux, nous détaillerons au § 3, le cas des représentations sur une surface orientable (bilatère) d'un schéma n'ayant que des points doubles (i.e. si chaque lettre figure exactement deux fois) ; et nous énumérons ces représentations en en calculant le genre par algorithme exécutable sur machine (§ 4).

2 Représentation d'un schéma de Gauss sur une surface : Si une courbe (C), présentant éventuellement des points multiples est dessinée sur une surface (S), on peut (à condition que (C) ne présente pas de rebroussement et même pour plus de simplicité ait partout une courbure finie ; e.g. soit un plongement deux fois continûment dérivable) définir sur (S) une bande $B\{C\}$ de part et d'autre de (C) ; disons pour faire image, comme si la courbe était non un fil mais un ruban ; en un point multiple, la bande se croise aussi. En fait il est

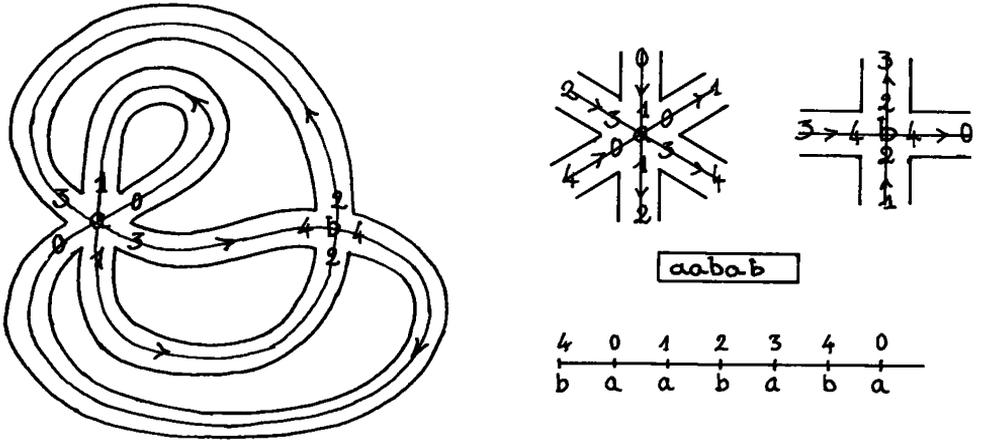
possible de construire la surface (S) à partir de la bande B(C) : partant des étoiles que dessine la bande en chacun des points multiples, on réalise par collage la bande toute entière elle-même ; puis en plaçant des faces (homéomorphes à des disques) ajustés le long des cycles que forment les arcs frontières de la bande, on a une surface (S). Les constructions peuvent être faites sans colle ni ruban suivant les techniques de la géométrie différentielle : toutefois notre but est ici d'aboutir à un calcul combinatoire classant les représentations d'un schéma de Gauss : nous ne précisons donc pas les constructions (systèmes de coordonnées locales, changements de cartes...), mais seulement leur résultat formel. Et pour cela on partira de trois schémas très simples : aa, aabab ; abab.



Le schéma aa définit une courbe à un seul point double, qu'on a dessinée dans le plan, comme une bande présentant une croix au point double a. On peut pour construire la bande partir de la croix: les chiffres que portent les bras de la croix signifient, que suivant le schéma, la courbe passe deux fois en a : d'une part venue de 1 elle arrive en 0 (c'est le côté horizontal gauche) et repart vers 1 (côté horizontal droit) ; d'autre part venue de 0 elle arrive en 1 (tronc vertical inférieur) et repart vers 0 (tronc vertical supérieur). Il faut donc coller le côté droit au tronc inférieur ; et le tronc supérieur au côté gauche. Du point de vue de la variété à bord ainsi obtenue, chacun de ces collages peut être effectué de deux manières : par simple glissement de la bande (supposée déformable) dans le plan ; ou avec un retournement. Mais dans ce dernier cas le recto se trouve collé contre le recto (ou le verso contre le verso...) et quant à la topologie on obtient une surface unilatère. Il n'y a donc qu'une façon de faire les collages si l'on demande une surface bilatère ; à ceci près que dans l'espace ambiant (à trois dimensions) il est possible que les diverses bandes à coller s'entrelacent ; mais seule nous importe la variété à bord réalisée par le collage (non son plongement dans l'espace). Si on admet une surface unilatère, on peut faire une bande de Moebius par l'un ou l'autre des collages ou par les deux.

Bornons nous désormais au cas bilatère (sans effet Moebius) qui est celui de la figure. Le bord de variété de dimension 2 (surface) que constitue la bande avec son croisement est visiblement formé de trois cycles : en ajustant à chacun de ces cycles un disque, on complète la bande en une sphère : nous dirons que la bande fournit du schéma aa une représentation orientable (bilatère) de genre 0.

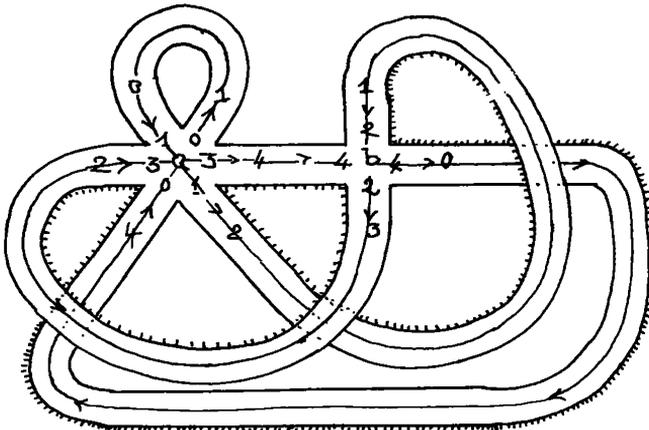
Le schéma aabab définit une courbe présentant un point triple a et un point double b : la bande admet un tracé plan, avec en a une étoile d'où partent 6 pistes et en b une croix. Mais ici la construction de la bande offre à divers titres une indétermination plus grande que pour le schéma précédent (aa). D'abord au point triple a on peut ordonner de plusieurs manières le système de trois branches. De façon précise si l'on suppose que sont mises en place les deux branches correspondant aux valeurs du paramètre x voisines



de 0 et de 1, l'arc (3,4) peut partir dans l'un des 4 secteurs délimités par ces deux branches. En général pour un point p-uple on aura $2^{p-2} \times (p-1)!$ dispositions possibles de l'étoile des (2p) pistes issues de ce point. En un point double (p=2) cette indétermination n'existe pas.

Ceci posé on doit comme pour le schéma (aa) coller les bras issus des deux étoiles : comme le schéma aabab comporte 5 lettres, il y a six collages à effectuer ; soit 2^5 possibilités si on ne demande pas que la bande construite soit bilatère. Si on impose cette condition, le collage n'est ici qu'incomplètement déterminé : le premier collage effectué entre a et b, par exemple celui du bras (3,4) issu de a au bras (3,4) aboutissant en b peut s'effectuer de deux manières ; ce collage fait, l'orientation relative des deux étoiles est fixée, et il n'y a qu'une seule façon d'achever les collages pour construire une surface bilatère.

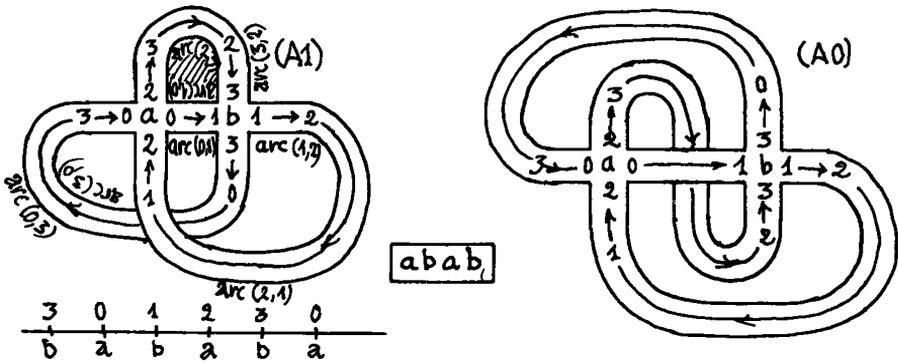
Dans le cas de la figure plane on voit que le bord de la bande comporte 5 cycles : en y ajustant des disques on obtient une sphère. Mais si, en conservant l'ordre des 6 branches de l'étoile a, on effectue de l'autre manière possible un collage construisant une bande bilatère, on a le résultat suivant, où pour faire une figure plane on a réservé des croisements de bandes distinctes (en dehors des



points doubles). Cette fois le bord forme trois cycles : l'un est bien visible formé d'un seul arc (0,1) issu de a et se terminant en a. On peut suivre les deux autres de proche en proche : l'un a été marqué de traits transversaux. En complétant par trois disques la surface obtenue par collage on obtient une variété de genre 1, c'est-à-dire un tore. En effet, en bref puisque dans le cas présent on a le même nombre de sommets et d'arêtes que dans le cas sphérique, mais avec deux faces de moins, la caractéristique d'Euler-Poincaré (sommet-arête+face) est diminuée de 2. Nous reprendrons ce raisonnement au § 3 pour le cas, auquel nous nous bornerons désormais où l'on construit une surface orientable pour un schéma n'ayant que des points doubles.

Le schéma abab définit une courbe fermée ayant deux points doubles : cette courbe n'admet pas de représentation sur le plan ou la sphère : la seule surface orientable où elle puisse être représentée est le tore et il y a deux classes de telles représentations, selon l'orientation relative choisie pour les croix des deux points doubles a et b.

Nous figurons ces deux représentations sur le plan, avec nécessairement un croisement de la bande en plus des deux points doubles imposés par la structure.



Considérons plus en détail la représentation (A1) : le bord de la bande comprend deux cycles : l'un formé de deux arcs a été rempli sur la figure par un domaine hachuré ; l'autre est formé de 6 arcs . Notre but étant de déterminer ces cycles par le calcul, sans considérer la figure (§§ 3 & 4), il convient d'en donner une description numérique complète. Or dans le cas d'une représentation par une figure orientable (bilatère) il est possible de désigner biunivoquement les arcs dont se compose la frontière de la bande par des couples de deux entiers consécutifs, correspondant à un segment du paramétrage de la courbe pris dans le sens direct ou inverse. Cette correspondance biunivoque vaut pour toute représentation orientable ; même s'il y a des points multiples d'ordre supérieur à 2 ; cf. *supra* aabab ; elle tombe seulement en défaut pour le schéma aa ; parce qu'alors les quatre arcs du bord devraient être désignés par (1,0) ou (0,1).

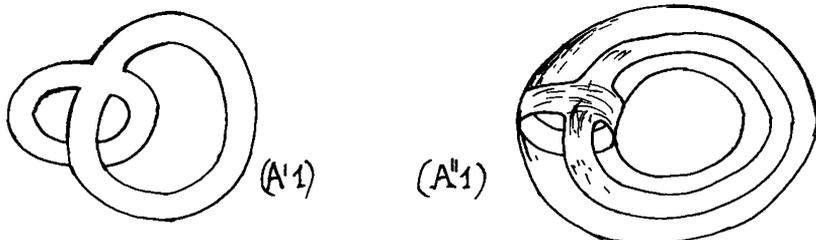
De façon précise soit par exemple le segment (1,2) du paramétrage : il lui correspond un arc frontière de la bande qui suit l'arc (1,2) de la courbe, et est de plus situé à droite de celui-ci dans l'orientation adoptée : c'est donc l'arc qui part horizontalement vers la droite, en dessous de b. De même, le même segment pris dans le sens opposé est (2,1) : sur la figure (A1), l'arc frontière correspondant est situé à droite de l'arc de courbe (2,1) parcouru de

2 vers 1 : cet arc frontière (de la bande) part donc verticalement vers le bas à gauche et en dessous de a, et se termine horizontalement à droite et au dessus de b.

On peut maintenant écrire les deux cycles d'arcs-frontière dont se compose le bord de (A1) ; ce sont :

$$(1,0)(2,3) ; \text{ et } : (0,1)(3,0)(2,1)(3,2)(0,3)(1,2).$$

Au § 3 nous calculerons la succession des arcs-frontière, d'où résultera le calcul du nombre des cycles et par conséquent celui de la caractéristique d'Euler-Poincaré et du genre de la surface fermée obtenue en ajustant une face à chacun de ces cycles. Dans le cas présent du schéma simple abab, on peut voir dans l'espace qu'en complétant par deux faces la représentation (A1) on obtient un tore (il en est d'ailleurs de même pour (A0)). Cela apparaît sur les deux figures (A'1) et (A''1), après obturation du cycle hachuré, (A1) est à une déformation continue près égal à (A'1), figure formée de deux anneaux qui se croisent ; et dans (A''1) ces deux anneaux sont placés respectivement sur un parallèle et un méridien d'un tore : l'anneau méridien a seulement été remodelé pour prendre la forme d'un bracelet.



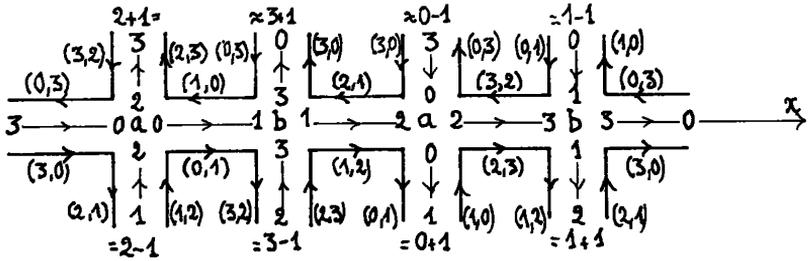
3 Calcul du genre des représentations bilatères d'un schéma à un

point double : Désormais il s'agit exclusivement des représentations orientables d'un schéma où chaque lettre figure exactement deux fois. Plutôt que la donnée du schéma par un mot de $2p$ lettres (p étant le nombre des points doubles ou des lettres distinctes figurant dans le mot), nous utiliserons une fonction φ application involutive de la suite $[0, \dots, 2p-1]$ dans elle-même, qui fait correspondre à chaque position x , l'autre position $\varphi(x)$ où figure la même lettre qu'en x par exemple pour les mots abc abc et abab on a :

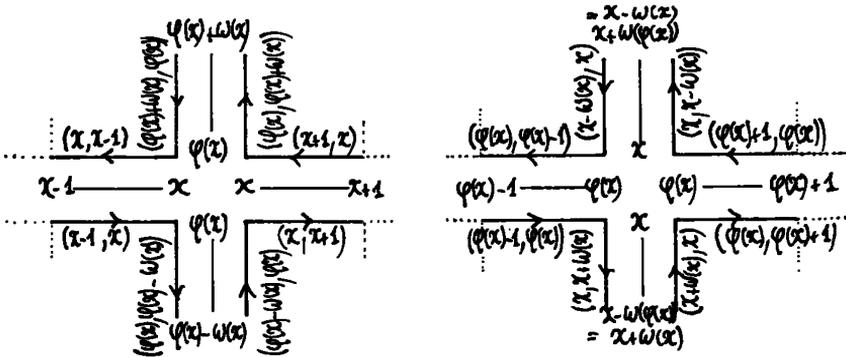
lettre	a	b	c	a	b	c	lettre	a	b	a	b
rang x	0	1	2	3	4	5	rang x	0	1	2	3
$\varphi(x)$	3	4	5	0	1	2	$\varphi(x)$	2	3	0	1

Pour décrire un système d'orientations cohérentes des points doubles, on part d'une représentation géométrique de l'axe de paramétrage $0, 1, \dots, 2p-1, 0$; avec la bande qui encadre l'axe, et de part et d'autre de chaque point double, celle des branches qui y aboutit : pour exemple nous reprenons la représentation du schéma abab désigné au § 2 par (A0).

Considérons sur la bande le deuxième b, dont l'abscisse est 1 : de lui partent deux bras verticaux, l'un supérieur, l'autre inférieur : ces deux bras correspondent à l'autre passage de la courbe



en b, c'est-à-dire à la valeur $\varphi(1)$ du paramètre (ici $\varphi(1) = 3$) ; les arcs de courbes que bordent ces deux bras sont $(\varphi(1), \varphi(1)+1)$ et $(\varphi(1)-1, \varphi(1))$; l'orientation de la croix de b relativement à celle de a est définie par le choix de celle de ses branches qui va vers le haut (et corrélativement de celle qui va vers le bas) : nous conviendrons de noter $(\varphi(1), \varphi(1)+\omega(1))$ la branche qui va vers le haut : la fonction ω qui prend les valeurs $+1$ ou -1 définit l'orientation : on convient de poser toujours $\omega(0) = 1$, ce qui revient à un choix de la face dessinée de la croix du premier point double (ici a) où se superposent les points de paramètres 0 et $\varphi(0)$.



De l'exemple on passe au cas général : on a figuré sur l'axe de la bande, les croix successives de deux points x et $\varphi(x)$; en fait (puisque x et $\varphi(x)$ sont confondus) ces deux croix n'en sont qu'une, reproduite deux fois à une rotation d'angle droit près, (du fait de l'orientabilité de la représentation). De cette identité des deux croix de x et $\varphi(x)$, il résulte que $\omega(\varphi(x)) = -\omega(x)$. En particulier pour le schéma abab on a les deux orientations possibles correspondant aux figures A1 et A0 du § 2, avec les fonctions ω_1 et ω_0 du tableau :

lettre	a	b	a	b
rang x	0	1	2	3
$\varphi(x)$	2	3	0	1
$\omega_0(x)$	1	1	-1	-1
$\omega_1(x)$	1	-1	-1	1

Pour chaque croix, dans la représentation particulière (A0) du schéma abab, ainsi que dans la représentation générale des deux

croix en x et $\varphi(x)$ on a porté sur chaque arc du bord sa désignation suivant le code fixé à la fin du § 2, (précisément sur l'exemple de la représentation (A1)). Comme on le vérifie sur la figure, les fonctions $\varphi(x)$ et $\omega(x)$ permettent de calculer la succession des arcs du bord de la représentation en bande :

$$\tilde{a} \quad (x + \eta, x) \text{ succède : } (\varphi(x), \varphi(x) + \omega(x)\eta)$$

(ici η vaut +1 ou -1 ; et chaque fois que le calcul fournit les nombres $2p$ et -1 on les remplace respectivement par 0 et $2p-1$, conformément au paramétrage cyclique de la courbe). Et par le calcul de la succession des arcs sur le bord, on calcule les cycles dont se compose ce bord : à titre d'exemple ce calcul est fait ici pour les deux orientations ω_0 et ω_1 des points doubles du schéma abab : dans chaque ligne on a donnée d'un arc, des informations auxiliaires, puis l'arc suivant.

$\omega_0 :$	$(x+\eta, x)$	x	η	$\varphi(x)$	$\omega(x)$	$(\varphi(x), \varphi(x) + \omega(x)\eta)$
	(3,0)	0	-1	2	1	(2,1)
	(2,1)	1	1	3	1	(3,0)
	(0,1)	1	-1	3	1	(3,2)
	(3,2)	2	1	0	-1	(0,3)
	(0,3)	3	1	1	-1	(1,0)
	(1,0)	0	1	2	1	(2,3)
	(2,3)	3	-1	1	-1	(1,2)
	(1,2)	2	-1	0	-1	(0,1)

$\omega_1 :$	$(x+\eta, x)$	x	η	$\varphi(x)$	$\omega(x)$	$(\varphi(x), \varphi(x) + \omega(x)\eta)$
	(3,0)	0	-1	2	1	(2,1)
	(2,1)	1	1	3	-1	(3,2)
	(3,2)	2	1	0	-1	(0,3)
	(0,3)	3	1	1	+1	(1,2)
	(1,2)	2	-1	0	-1	(0,1)
	(0,1)	1	-1	3	-1	(3,0)
	(2,3)	3	-1	1	1	(1,0)
	(1,0)	0	1	2	1	(2,3)

Avec les deux orientations (ω_0 ou ω_1) le bord se compose de deux cycles l'un formé de deux arcs et l'autre de six.

A partir du nombre de cycles que comporte le bord de la représentation en bande, il est facile de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré et donc le genre de la surface bilatère sur laquelle est faite la représentation. De façon précise la c. d'E. P. d'une surface se calcule d'après une décomposition de celle-ci en faces polygonales se raccordant suivant des arêtes (ou arcs courbes) ; on a :

$$E. P. = F + S - A ,$$

où F , S , A désignent respectivement le nombre total des faces, sommets et arêtes. Pour une sphère on a $E. P. = 2$; pour un tore $E. P. = 0$;

et en général pour une surface de genre g (sphère à g anses)
 $E. P. = 2(1-g)$.

Dans le cas présent on a pour une représentation une décomposition simple en faces polygonales, visible sur le schéma de la bande qui illustre ce § 3 : on a :

- p faces carrées (une sur chaque point double) ;
- $2p$ faces rectangulaires (une pour chaque arc de la courbe) ;
- f faces supplémentaires, ajustées aux f cycles dont se compose le bord de la bande ;
- $4p$ sommets des traits (4 pour chaque carré)
- $8p$ arêtes (celles-ci allant par groupe de 4, propres à chacune des faces rectangulaires).

$$d'où E.P. = (p + 2p + f) + 4p - 8p = f - p.$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré d'une représentation orientable d'un schéma de Gauss à p points doubles (p lettres présentes chacune deux fois) se calcule en retranchant p du nombre f des cycles du bord de la représentation en bande.

En particulier dans les deux représentations orientables de $abab$ associées à ω_0 et ω_1 on a $f = p = 2$; donc $E.P. = 0$: il s'agit bien comme on l'a vu au § 2, de représentation sur un tore.

Algorithme de calcul du genre des représentations bilatères

d'un schéma à points doubles : Dans l'algorithme ci-dessous, on part d'un schéma, donné par la fonction φ et on calcule la caractéristique d'E.P. pour chaque représentation définie par la fonction ω : on n'a pas prévu de garder l'ordre des arcs des cycles frontières, ni même la composition de ceux-ci (de quels arcs chacun est formé), mais cela serait certes possible.

entier $P, N, TOTF, XD, HD, X, H, Y, R$;

commentaire : on considère un schéma à P points doubles ($2 \cdot P$ lettres) ; le nombre N qui varie de 0 à $((2 + (P-1)) - 1)$ définit par les chiffres de son développement binaire, la fonction ω . Pour chaque N on calcule le nombre total $TOTF$ des cycles du bord (donc des faces à ajouter) ; la construction des cycles se fait de proche en proche à partir d'une arête initiale $(x + \eta, x)$, notée ici $(XD+HD, XD)$; on rencontre des arêtes successives $(X + H, X)$ le cycle étant fermé quand on est revenu à $(XD+HD, XD)$.

étiquette : $NOVN, NOV, NOV, NOV, NOV, FINN$;
entier tableau : $PH[0:2P-1], EP[0:(2+(P-1))-1], OR[0:2P-1],$
 $TA[0:2P-1, -1:1]$;

commentaire : PH est la fonction φ qui décrit le schéma étudié ; EP contiendra les caractéristiques d'E.P. calculées pour chaque fonction ω (notée ici OR) définie par une valeur de N . On utilise le tableau TA pour s'assurer que les cycles qu'on a construits utilisent une fois et une seule chacun des arcs $(x-1, x)$ ou $(x+1, x)$ du bord de la bande : en fait seuls servent les lignes -1 et $+1$ (non la ligne 0).

entier procédure : CYC, BIN ;

commentaire : $BIN(N, Q)$ donne pour un entier positif ou nul N le Q -ème chiffre de son développement binaire ; CYC sert au paramétrage

cyclique : nous donnons seulement la formule de CYC :

$CYC(Z) :=$ si $Z=-1$ alors $2P-1$ sinsi $Z=2P$ alors 0 sinon Z ;

commentaire : ci-dessous commence le programme proprement dit.

N:=0;
NOVN;

commentaire : on passe par NOVN chaque fois qu'on essaie une nouvelle fonction ω définie par une nouvelle valeur de N.

pour Y:=0 pas 1 jusqu'à 2P-1 faire
 TA[Y,1]:=TA[Y,-1]:=0;
OR[0]:=1;Q:=0;
pour R:=1 pas 1 jusqu'à 2P-1 faire
 si PH[R]<R alors OR[R]:=-OR[PH[R]]
 sinon début Q:=Q+1;OR[R]:=-1+BIN(N,Q) fin;

commentaire : le tableau TA est mis à zéro ; on calcule la fonction ω .

TOTF:=0;XD:=0;HD:=-1;

commentaire : au départ on n'a reconnu aucun cycle (TOTF=0) ; on part de l'arc $(2p-1,0)$ du bord pour construire le premier cycle.

NOVF;
TOTF:=TOTF+1;X:=XD;H:=HD;

commentaire : on passe par NOVF chaque fois qu'on construit un nouveau cycle ; TOTF est augmenté de 1 ; la première arête est définie par XD et HD qui sont, soit fixés en tête, soit calculés à la fin du cycle précédent.

NOVL;

commentaire : on passe par NOVL chaque fois qu'on ajoute un nouvel arc au cycle.

H:= - OR[X]*H;X:=CYC(PH[X]-H);

commentaire : au § 3 on a dit qu'à l'arête $(x+\eta, x)$ succède l'arête $(\varphi(x), \varphi(x)+\omega(x)\eta)$; avec les notations du programme le successeur de $(X+H, X)$ est donc bien $(X'+H', X')$ où $H' = -OR[X]*H$ et $X' = PH[X]-H'$.

si $X \neq XD$ ou $H \neq HD$ alors début
 TA[X,H]:=1; aller à NOVL fin;

commentaire : si le cycle n'est pas encore bouclé on marque en TA la dernière arête rencontrée ; et on va chercher l'arête suivante.

NOVX;

commentaire : on passe par NOVX chaque fois qu'on cherche à partir de quel point débiter la construction du cycle suivant :

si $XD <_S (2P-1)$ alors $XD:=XD+1$;
si $XD=2P-1$ et $HD=-1$ alors début $XD:=0;HD:=1$ fin;
si $XD=2P-1$ et $HD=1$ alors aller à FINN;
si $TA[XD,HD]=0$ alors aller à NOVF sinon aller à NOVX;

commentaire : on cherche dans le tableau TA un arc $(x+\eta, x)$ non encore parcouru ; la recherche se fait à partir du point de départ $(XD+HD, XD)$ du cycle précédent ; les arêtes étant considérées dans l'ordre $(2p-1, 0), (0, 1), (1, 2), \dots, (2p-2, 2p-1); (1, 0), (2, 1), \dots, (0, 2p-1)$; c'est-à-dire d'abord les arêtes $(x-1, x)$ puis les arêtes $(x+1, x)$ en faisant croître x de 0 à $2p-1$.

FINN;
 EP[N] := TOTF - P;
 N := N + 1; si $N \leq (2 + (P-1)) - 1$ aller à NOVN

commentaire : on passe par FINN quand est achevé le traitement d'une orientation ω définie par une valeur de N ; on calcule alors la valeur de la caractéristique d'Euler-Poincaré ; et on passe au N suivant si toutefois la valeur maxima n'est pas atteinte.

5 Schéma de la frontière d'un étalement : Le 4-ème problème posé au § 1 peut recevoir l'énoncé général suivant :

"Etant donnée une courbe (C) représentation d'un schéma sur une sphère à p anses (S_p) reconnaître si cette représentation peut être considérée comme le bord orienté d'un étalement d'un disque à q anses (D_q) ; et de combien de manières cela est possible".

On peut concentrer son attention sur le cas $p = q = 0$, d'un étalement du disque (D_0) sur la sphère usuelle (S_0) ; et supposer S_0 munie d'une orientation déterminée (changer l'orientation équivaut ici simplement à poser un deuxième problème tout analogue au premier). Dans la suite nous traiterons du cas $p \neq 0$, ou $q \neq 0$, dans la mesure où cela n'est en rien plus difficile que de se restreindre à $p = q = 0$.

5.1 Description combinatoire : Le bord orienté de la bande encadrant la courbe (C) est formé d'un certain nombre de cycles que l'algorithme du § 4 permet de décrire. Le complément sur (S_p) de la courbe (considérée comme une bande infiniment étroite) comprend un certain nombre de composantes, dont chacune est homéomorphe à un disque, et a pour bord orienté l'un des cycles déterminés par l'algorithme, compté avec l'orientation opposée (de celle qu'il a si on le considère dans le bord orienté de la bande).

Avant de considérer deux exemples particuliers, dont le premier est très simple, on posera encore quelques notations générales :

plet = nombre des points doubles de (C) ; (ou nombre des lettres distinctes du schéma) ;

Comp = ensemble des composantes (disques) de $(S_p) - (C)$;

NComp = Cardinal de Comp (ou nombre des composantes) ;

ar(X) = nombre des arcs qui forment la frontière de X.

On a les formules :

$$\sum \{ar(X) \mid X \in \text{Comp}\} = 4 \text{plet} ; \text{NComp} - \text{plet} = 2 - 2p$$

La première formule résulte immédiatement de ce que (C) est formée d'une suite de 2plet arcs, dont chacun contribue à la frontière de deux composantes. Pour démontrer la deuxième formule, on remarque que Comp est une décomposition polyédrale de (S_p) ; dont il est facile de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré (EP).

$N_{som} = plet ; N_{ar} = 2plet ; N_{face} = N_{Comp} ; d'o\grave{u} :$

$N_{som} + N_{face} - N_{ar} = N_{Comp} - plet = EP = 2 - 2p.$

De façon précise, le bord orienté des composantes peut être donné par une matrice d'incidence $Bord(Comp \times Arc)$; où Arc désigne l'ensemble des $2plet$ arcs orientés constituant (C) . On notera :

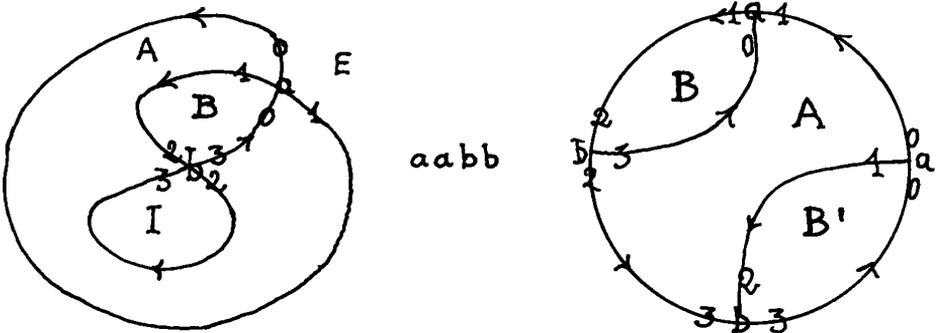
$\forall x \in Comp, \forall A \in Arc : Bord(x,A) \in \{0,1,-1\} ;$

0 : si l'arc A ne figure pas dans le bord de X ;

positive ; 1 : si A figure dans le bord de X avec son orientation

négative. -1 : si A figure dans le bord de X avec l'orientation

5.2 Exemples d'étalement : le premier considéré est une représentation sur (So) (sphère usuelle) du schéma $aabb$ (autre écriture du schéma $abba$ figuré en (A') au § 1). L'algorithme du § 4 donne 4 cycles FA, AFE, FI, FB . Les composantes correspondantes sont notées A, E, I, B sur la figure plane : la lettre E désigne la composante Extérieure s'étendant à l'infini ; I est pour Intérieur ; A et B sont les deux composantes que recouvre l'amibe, ou étalement du disque (Do) dont le corps est A , et les deux bras se croisent suivant B .



Avec la figure nous donnons les cycles et la matrice $Bord$:

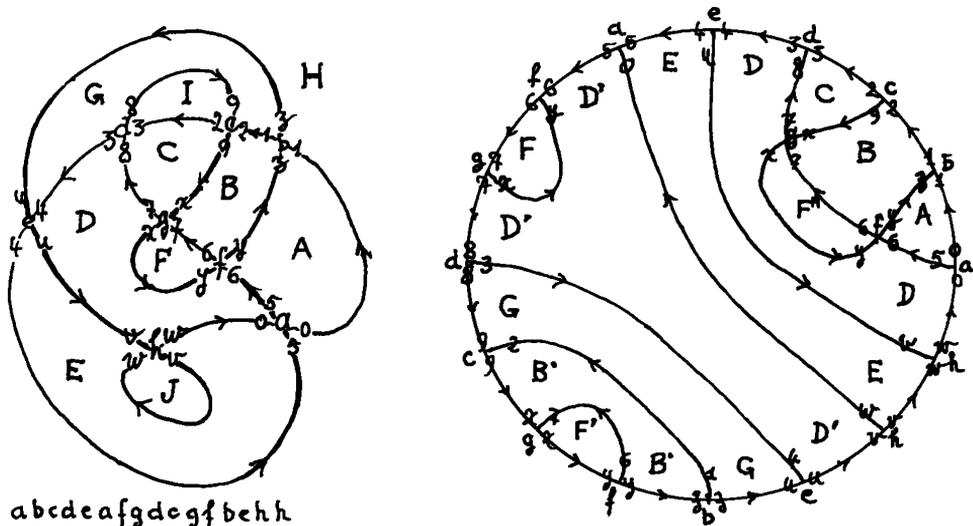
Cycles : $FA = \{(3,0); (1,0); (1,2); (3,2)\} ;$

$FE = \{(0,1)\} ; FI = \{(2,3)\} ; FB = \{(2,1); (0,3)\}.$

face	arc	(3,0)	(0,1)	(1,2)	(2,3)
A		-	+	-	+
E		0	-	0	0
I		0	0	0	-
B		+	0	+	0

Dans le cas présent l'amibe qui couvre une fois A et deux fois B , peut être regardée comme un étalement (image localement biunivoque) du disque (Do) lui-même partagé en trois composantes dont l'une correspond biunivoquement à A et chacune des deux autres à B , le cercle frontière de (Do) allant sur (C) . Sur le disque, les deux composantes B se raccordent à A l'une suivant l'arc $(3,0)$, l'autre suivant l'arc $(1,2)$.

Sur le deuxième exemple, le recouvrement des bras de l'amibe est beaucoup plus complexe ; corrélativement, il en est de même de la portion de (Do) associée à l'étalement : en particulier des trois composantes de (Do) s'appliquant sur la composante F de (S)-(C), l'une notée F'', est limitée par un contour qui ne touche pas le cercle frontière ; alors que dans le premier exemple tous les arcs délimitant des composantes de (Do) appartiennent au cercle de bord ou en relient deux points.



Dans ces deux exemples, la partition du disque associée à l'étalement peut être définie par les formules respectives :

1-er ex : $A+2B$; 2-ème ex : $A+2B+C+2D+E+3F+G$,

ou encore par la donnée d'une fonction positive (X), indice d'étalement, définie sur Comp :

1-er ex : $i(A) = 1 ; i(E) = i(I) = 0 ; i(B) = 2 ;$
 2-ème ex : $i(A) = 1 ; i(B) = 2 ; i(C) = 1 ; i(D) = 2 ; i(E) = 1 ;$
 $i(F) = 3 ; i(G) = 1 ; i(H) = i(I) = i(J) = 0.$

En général l'existence d'un étalement, implique celle d'une fonction d'indice, fonction entière positive (ou nulle) définie sur Comp. Nous nous bornons dans la suite à donner des conditions nécessaires à l'existence d'un tel indice.

5.3 Indice d'une courbe par rapport à un point et indice d'étalement:

Classiquement on appelle indice $i(Q;C)$ d'une courbe (C) du plan orienté (P) par rapport à un point Q le nombre de tours qu'effectue le rayon QM quand le point M parcourt la courbe C dans le sens direct. (En d'autres termes l'indice est la variation de l'angle polaire de QM, divisée par 2π). Il est clair que l'indice $i(Q;C)$ est une fonction algébrique entière constante sur chaque composante X de (P)-(C), et qui diminue de 1 quand le point Q traverse la courbe (C) dans une direction u faisant avec la tangente orientée t à (C) un angle $(u,t) = +\pi/2$. Ceci correspond à sortir du disque dans le cas simple

ou (C) est un cercle orienté dans le sens direct : c'est pourquoi nous dirons en bref : que l'indice x diminue de 1 quand on traverse (C) vers l'intérieur (même si (C) est quelconque).

Pour une courbe (C) tracée sur la sphère (So) on ne peut définir d'indice de manière unique : toutefois il existe une infinité de fonctions x différant entre elles seulement par une constante entière algébrique et qui possèdent la propriété de diminuer de 1 quand on traverse (C) "vers l'intérieur". On obtient sans peine une de ces fonctions en projetant stéréographiquement (So) sur le plan (cf. § 1) à partir d'un point de (So) non situé sur (C).

En général, nous dirons qu'une fonction entière x (définie sur (Sp) ou simplement sur Comp) est un "indice" relativement à la courbe orientée (C) si i diminue de 1 quand on traverse vers l'extérieur un arc de (C). Cette condition s'exprime très simplement sur le tableau "Bord" et il est clair que l'indice i , à supposer qu'il existe, est défini à une constante additive près. On a la condition :

$$\forall A \in \text{Arc} : \sum \{i(X) \text{ Bord}(X,A) \mid X \in \text{Comp}\} = 1 ;$$

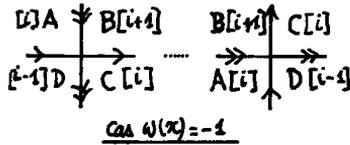
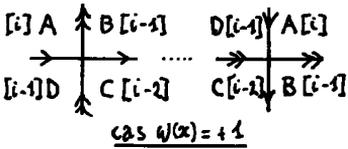
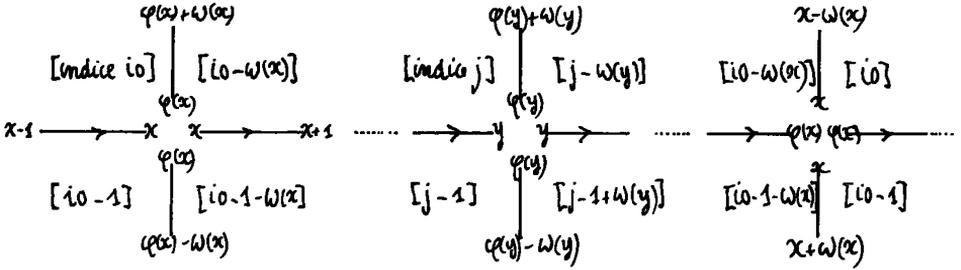
en effet l'équation associée à l'arc A, exprime exactement le fait que quand on traverse A en passant de la composante $XA+$ dont le bord comporte A compté dans le sens + (i.e. $\text{Bord}(XA+,A) = 1$) vers la composante $XA-$ (telle que $\text{Bord}(XA-,A) = -1$) l'indice i diminue de 1.

Or à supposer qu'il existe un étalement de (Dq) sur (Sp) ayant pour bord (C), est associé à cet étalement une fonction $i(X)$ donnant pour chaque composante X de (Sp)-(C) le nombre de fois que celle-ci est recouverte par l'étalement. Et $i(X)$ est un indice au sens qu'on a défini, car l'équation linéaire ci-dessus n'exprime rien d'autre que le fait que (C) est le bord orienté de l'image par l'étalement de (Dq) partagé en composantes dont $i(X)$ s'identifiant à X, $i(X')$ à X' etc. ; selon ce qu'on a vu avec les exemples du § 5.2. D'où l'intérêt pour le problème de l'étalement de chercher à caractériser les indices $i(X)$. A ce propos nous donnerons deux résultats simples :

1-er : une condition nécessaire et suffisante sur la fonction ω (définissant la représentation (C) : cf. § 3), pour l'existence d'un indice.

2-ème : le calcul de q (nombre d'anses de (Dq)) en fonction de l'indice i : calcul qui laisse en général un seul indice x possible pour un étalement de (Do).

5.4 Propriété de l'indice d'étalement : Le premier résultat énoncé ci-dessus s'obtient en suivant par continuité la variation de l'indice $i(X)$ le long de la courbe (C) représentée comme au § 3. Nous ferons trois figures : l'une générale avec le point x , un point intermédiaire y et le point $\varphi(x)$ étiquetés par la même lettre que x : en laissant $\omega(x)$ comme une quantité algébrique indéterminée pouvant valoir +1 ou -1 ; puis deux figures particulières correspondant aux cas + et - et sur lesquelles on peut préciser l'identification des composantes (A,B,C,D) entourant le point double qui agrégerait en x et $\varphi(x)$. Plaçons nous par exemple sur le bord interne de (C), (c'est-à-dire sur les figures au dessus de l'axe des x ; compte tenu de l'orientation choisie) : on voit qu'à la traversée de chaque point double y l'indice i doit diminuer de $\omega(y)$: pour qu'au passage de x et $\varphi(x)$ les indices ainsi déterminés s'accordent, il faut que soit nulle la somme des $\omega(y)$ afférents aux points intermédiaires. Cette condition nécessaire relative à ω est aussi suffisante pour l'existence d'un indice i , car elle permet de définir celle-ci le long



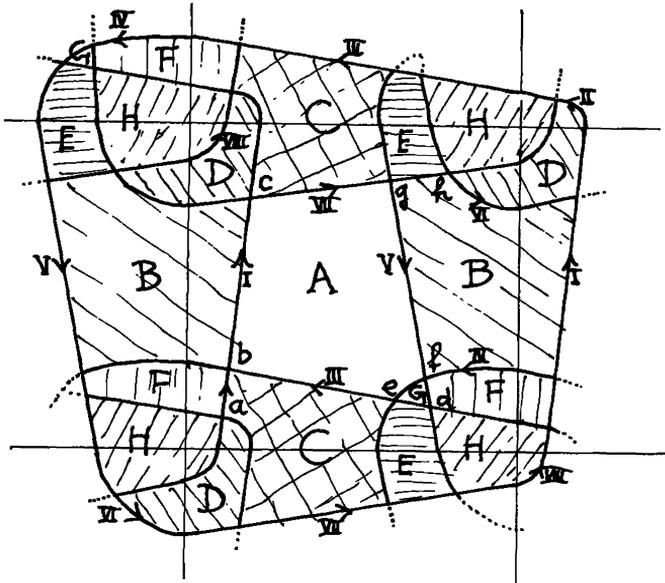
des deux côtés de chaque arc de (C) ; et de telle sorte qu'à chaque angle d'une composante se raccordent deux arcs orientés le long desquels i a la même valeur. Nous énoncerons donc :

Théorème : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une représentation orientable ω d'un schéma donné par la fonction φ (cf. § 3), possède un indice i est qu'on ait :

$$\forall x : \sum \{ \omega(y) \mid y \in x, \varphi(x) \} = 0.$$

Cette formule est ambiguë dans la mesure où il y a deux intervalles $x, \varphi(x)$ sur le cycle du schéma : mais en fait la distinction importe peu car il est facile de voir que la somme des $\omega(y)$ est la même sur les deux intervalles ; du fait de la condition (cf. § 3) $\omega(\varphi(y)) + \omega(y) = 0$.

En particulier pour qu'un tel ω existe, il est nécessaire que dans le schéma de Gauss deux occurrences d'une même lettre soient toujours séparées par un nombre paire d'autres lettres. De plus le théorème donne une condition nécessaire simple pour que ω décrive une représentation sphérique (ou planaire) sur (S_0) (ou P) : car à une telle représentation est associé un indice i . Toutefois l'existence d'un indice i n'implique pas que la représentation définie par ω soit sur (S_0) : car, en bref, une amibe peut de ses pseudopodes recouvrir une surface de genre quelconque (Sp) . On a figuré un exemple d'étalement du Disque (Do) sur le tore $(S1)$ afin de permettre une vérification des formules. Le tracé de cette figure a été facilité par le fait que le revêtement du tore est le plan : le tore étant le quotient du plan par un groupe engendré par deux translations. Dès lors le contour de l'amibe peut être dessiné sur le plan : c'est ici simplement un quadrilatère aux angles arrondis. Les translatsés de son contour donnent, dans le domaine fondamental carré qui correspond biunivoquement au tore, une suite d'arcs qui constituent (C) et nous en font voir les points doubles abcdefgh. On a numéroté en chiffres romains de I à VIII les parties de la frontière de l'amibe contenues dans les différents carrés qu'elle coupe ; et marqué du même chiffre les portions de (C) qui leur correspondent dans le domaine fondamental. Il est ainsi facile de lire un schéma de Gauss que nous donnons ici en marquant entre parenthèses



les lettres qui tombent dans les portions successives de I à VII (il n'y en a pas dans VIII) : (abc) (a) (deb) (fe) (gfd) (h) (cgh). Il y a huit composantes A,B,C,D,E,F,G,H distinguées par des hachures : on peut vérifier que les fonctions $i(X)$, $\varphi(x)$, $\omega(x)$ sont celles données ci dessous :

lettre	a	b	c	d	e	b	f	e	g	f	d	h	c	g	h	
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(x)$	3	6	13	0	11	8	1	10	5	14	7	4	15	2	9	12
$\omega(x)$	+	+	-	-	+	+	-	+	-	+	-	-	+	+	-	-
composante			A	B	C	D	E	F	G	H						
indice $i(X)$			1	2	2	3	3	3	2	4						

Reste le calcul annoncé de la caractéristique d'EP du domaine étalé (Dq) en fonction de l'indice i ; c'est-à-dire d'après la partition de (Dq) en composantes. On lira les nombres NFA, NAR, NSO des faces, arêtes et sommets de cette décomposition avec la fonction $i(X)$. D'abord on a évidemment :

$$NFA = \sum \{i(X) | X \in \text{Comp}\}.$$

Ensuite chaque arête de la décomposition est commune à deux composantes ; à l'exception des arêtes frontières (au nombre de $NARF = 2\text{plet}$) qui n'appartiennent qu'à une seule composante ; d'où :

$$2NAR = \sum \{i(X) \text{ ar}(X) | X \in \text{Comp}\} + NARF .$$

Enfin de chaque sommet partent quatre bouts d'arêtes ; à l'exception des sommets frontières (au nombre de $NSOF = NARF$) d'où il n'en part que trois : cette propriété, visible sur les figures résulte en bref de ce que l'éclatement est un homéomorphisme local ,

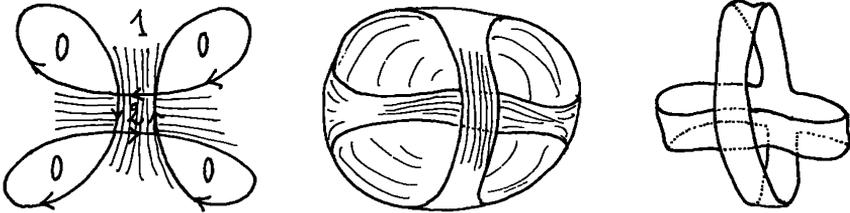
et de ce que sur (Sp) , la courbe (C) n'a d'autre singularité que des points doubles. On a donc :

$$\begin{aligned} 4NSO - 4NAR &= \Sigma \{i(X) \ar(X) \mid X \in \text{Comp}\} ; \\ NFA - NAR + NSO &= \Sigma \{i(X) (1 - (\ar(X)/4)) \mid X \in \text{Comp}\} \\ &= EP(Dq) = 1 - 2g. \end{aligned}$$

De la relation démontrée au § 5.1, il résulte que si on remplace l'indice $i(X)$ (relatif à (C)) par un autre indice $i'(X) = i(X) + cte$, la valeur trouvée pour EP sera augmentée de $(2 - 2p)$. Donc, en particulier, sauf pour le cas du tore ($p = 1$) il n'y a qu'une seule fonction $i(X)$ au plus qui puisse convenir à un étalement du disque usuel (D_0) , avec $EP = 1$; tout autre indice différent de i par cte , donnera une autre valeur pour EP .

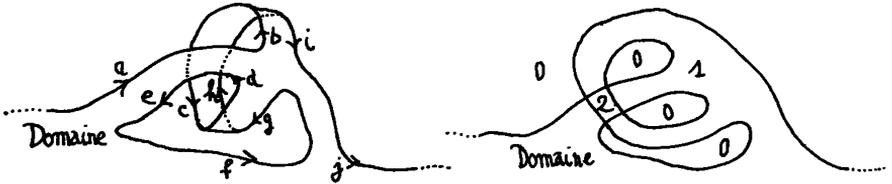
5.5 Existence d'étalements de (D_q) sur (Sp) : Nous donnons un exemple d'étalement de (D_1) , le disque à une anse (ou tore percé d'un trou) sur (S_0) , la sphère usuelle ; et indiquons sommairement une construction générale d'un étalement de (D_q) sur (Sp) pour q et p quelconques (l'étalement ayant pour frontière une courbe C qui découpe (Sp) en composantes homéomorphes à un disque).

5.5.1 Etalement de (D_1) sur (S_0) : Voici d'abord une représentation symétrique de cet étalement : à gauche, on a marqué les valeurs de



l'indice sur chacune des 6 composantes : on voit que la composante d'indice 1 (qui s'étend à l'infini dans le plan, ou contient le pôle de projection sur la sphère) partent deux bandes qui se croisent suivant la composante d'indice 2 : tel est l'étalement. Une vision sphérique, donnée au milieu, est celle d'un disque (ou panier) dont les deux anses se croisent. A droite enfin, on a deux bracelets qui en avant se croisent, mais en arrière se soudent suivant un carré : c'est la figure de la fin du § 2 (A^1 et A^{11}) il s'agit bien de la surface d'un tore (S_1) privé d'un disque.

5.5.2 Étalement de (Dp) sur $(S0)$:



Le dessin de gauche représente une modification apportée à un domaine D (qu'on peut supposer homéomorphe à un disque) le long d'un arc de sa frontière C (laquelle doit être prolongée à ses deux extrémités suivant les pointillés : la frontière modifiée reste un arc continu unique, comme on peut s'en assurer en suivant les flèches et les lettres $abcdefghij$: si on ajoute au domaine un disque suivant sa frontière, il se forme une anse au niveau de la modification. La figure spatiale de gauche est représentée à droite, à plat, comme un étalement ; lequel ne diffère de la figure du § 5.5.1 que par une déformation continue.

Grâce à cette présentation nouvelle, on voit que la modification indiquée peut être reproduite q fois sur la frontière d'un disque D , ce qui équivaut à étaler sur la sphère un disque à q anses (complémentaire d'un disque sur une surface de genre q).

5.5.3 Étalement de (Dq) sur (Sp) :

Ainsi qu'on l'a écrit au 5.4 "une amibe peut de ses pseudopodes recouvrir une surface de genre quelconque Sp ". De même partant d'un étalement de (Dq) sur (So) on obtiendra un étalement de (Dq) sur (Sp) en adjoignant p anses à (So) , puis recouvrant celles-ci par des pseudopodes de (Dq) .

5.6 Conclusion : Partant d'un schéma de Gauss $\varphi(x)$, nous disposons d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\omega(x)$ définisse une représentation (C) relativement à laquelle existe un indice i et nous savons que l'existence de i est nécessaire pour que (C) soit le bord d'une amibe. De plus un calcul de caractéristique d'EP impose en général la constante additive dont dépend cet indice. Mais à supposer que nous ayons une fonction ω définissant une représentation (C) , avec un indice associé i donnant un caract. d'EP valant 1, nous ne savons pas s'il existe nécessairement un étalement amibien de (Do) qui lui soit associé ; ni s'il en existe plusieurs ; ni comment en construire un. Evidemment $i(X)$ étant connu la décomposition de (Do) doit se faire en composantes au nombre de $i(X)$ par chaque X ces composantes étant jointes suivant leurs arcs frontières : mais nous ne savons pas essayer de manière rationnelle toutes les combinaisons possibles, ni, en particulier relier les sommets intérieurs à la frontière du disque (ils sont 2 dans le deuxième exemple du § 5.2 ; ils sont 11 sur la figure du § 5.4...).