LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

F. MURTAGH

Recherche d'un scalogramme sur les réponses de 1300 élèves à une batterie d'épreuves de mathématique

Les cahiers de l'analyse des données, tome 6, nº 3 (1981), p. 297-318

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1981__6_3_297_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. VI - 1981 - n° 3 p. 297-318

RECHERCHE D'UN SCALOGRAMME SUR LES RÉPONSES DE 1300 ÉLÈVES À UNE BATTERIE D'ÉPREUVES DE MATHÉMATIQUE [SCAL. MATH.]

par F. Murtagh (1)

1 Origine des données

En 1974 et 1975 l'épreuve DCRMT (*Drumcondra Criterion Referenced Mathematics Test)* a été appliquée sous sa présentation définitive à quelque 1300 élèves scolaires en Irlande. Cette population était, géographiquement, uniformément distribuée et les enquêtés étaient âgés , en moyenne, de 12 ans. L'épreuve aborde tous les points importants du programme de mathématiques (d'où le titre : l'épreuve étant considérée comme un ensemble de critères ou d'aspects fondamentaux du programme). Des versions expérimentales avaient été appliquées auparavant. Après analyse ces versions ont été remaniées et la version finale se compose de 155 questions. Le matériel nécessaire à l'application de l'épreuve comprend un cahier de 14 pages et une feuille de réponses par élève, ainsi que des consignes de notation et d'administration pour l'enquêteur . La passation est collective, d'une durée de trois heures. Enfin les réponses demandées aux élèves se présentent toutes sous la forme de choix multiples.

A partir de 155 questions, 55 critères ou qualités (codées pour la présence ou l'absence de qualité) ont été construits : chacun des critères se compose de 2 ou 3 questions et à l'intérieur des critères les questions sont de difficulté équivalente et portent sur le même sujet. Trente cinq critères concernent la compréhension, 14 le calcul, 6 la solution de problèmes : Pour chaque critère, on avait décidé d'un seuil de succès, généralement 1/2 ou 2/3 des questions qui s'y rattachent. Il serait certainement très intéressant d'analyser les réponses aux questions elles-mêmes ; et cela non seulement en termes d'échec et de succès ; mais aussi en descendant aux modalités mêmes de réponse (e.g. faire telle erreur plutôt que telle autre) mais on n'a pas disposé de telles données. Dans le cours du présent article nous ferons de fréquentes allusions au contenu du test. Comme premier exemple,on donne les questions 120, 121, 122, qui constituent le critère 44 (parallèles et perspective) par lequel débute la section G (géométrie) du test. (En page 318 on trouvera l'introduction au questionnaire).

L'épreuve est donc notée suivant un ensemble de 55 critères. Nous disposons des résultats de deux applications du test, séparées de 6 mois. Dans les deux cas il s'agit de 1390 élèves : en fait 1167 élèves ont passé deux fois le test ; ce qui permet d'en étudier les progrès de façon précise. Les résultats ont indiqué qu'il y avait un accroissement global des connaissances entre les deux passations de l'épreuve ; mais il est resté beaucoup d'élèves d'un niveau très bas. Pour nous, une autre question se pose qui nous intéresse : dans quelle mesure

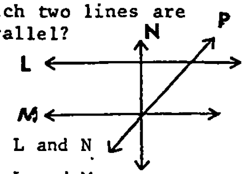
L'auteur remercie vivement le Pr. J.P. Benzécri qui l'a guidé dans la préparation du présent article.

(1) *Docteur 3° cycle et maître-assistant, Département Informatique , University College Dublin, Irlande.*

Section G

Mark the answers for this section in answer spaces 120-137 on your answer sheet.

120. Which two lines are parallel?



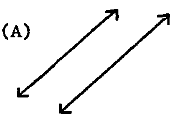
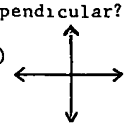
(A) L and N

(B) L and M

(C) N and P

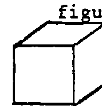
(D) M and N

121. In which diagram are the two lines perpendicular?

(A)  (B) 

(C) (D)

122. What is this figure called?



(A) cube

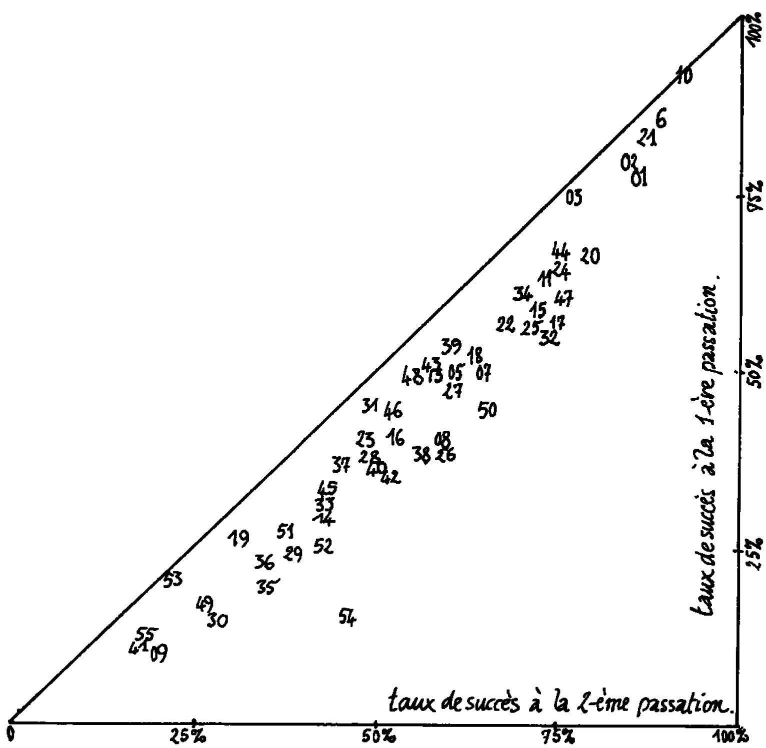
(B) square

(C) cylinder

(D) rectangle

peut-on ordonner les critères ? Un ordre de facilité-difficulté, commun aux diverses applications de l'épreuve, impliquerait un matériel digne d'intérêt pour l'examen des connaissances mêmes.

Ici une première idée se présente à l'esprit :
se baser simplement sur les taux de succès des élèves aux deux passations de l'épreuve ; les critères s'ordonnant des plus faciles aux plus difficiles suivant l'ordre décroissant du taux de succès. Le graphique ci-joint montre en effet que les taux (calculés pour 748 jeunes



[SCAL. MATH] §1 : taux de succès calculés pour 748 jeunes filles.

filles ayant participé aux deux passations) s'ordonnent de façon cohérente : les points figurant les critères (avec pour abscisse et ordonnée respectivement les taux afférents aux passations 1 et 2) décrivent un étroit fuseau (presque une ligne), situé en dessous de la diagonale ; (ce qui montre bien que comme on l'a annoncé ci-dessus les taux de succès progressent d'une passation à l'autre).

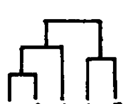
Pourtant le taux de succès n'est peut-être pas un indice absolu de la véritable facilité : des questions faciles peuvent être manquées par étourderie, particulièrement par de bons élèves ; ou encore, la réussite des questions de difficulté moyenne peut dépendre du programme suivi dans une école particulière. L'idéal nous semble être de définir un ordre qui tienne compte des intercorrélations entre les comportements des élèves pour tous les critères. On tente de faire apparaître un tel ordre, d'abord par la classification automatique et ensuite par l'analyse factorielle.

2 *Recherche d'une échelle par la classification automatique d'après le modèle de Guttman* : Partons de l'exemple simple de 4 questions de difficulté croissante 1, 2, 3, 4, soumises à 5 sujets de force décroissante A, B, C, D, E : le tableau des succès et des échecs prend (selon le modèle du scalogramme) la forme suivante :

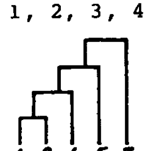
	succès				échec			
	4	3	2	1	4'	3'	2'	1'
A	1	1	1	1	0	0	0	0
B	0	1	1	1	1	0	0	0
C	0	0	1	1	1	1	0	0
D	0	0	0	1	1	1	1	0
E	0	0	0	0	1	1	1	1

On lit, e. g., dans la colonne 2 que la deuxième question a été réussie par les sujets A, B, C ; et complémentairement, dans la colonne 2' que cette même question 2 n'a pas été réussie par les sujets D et E. Parce que sujets et questions ont été convenablement rangés, le tableau des succès est une matrice dont la partie au dessus de la diagonale est composée de uns tandis que la partie sous-diagonale est remplie de zéros ; et pour le tableau des échecs on a la disposition inverse. En général quand on recherche une sériation ou un ordre total sur les critères, on peut permuter lignes et colonnes du tableau des succès jusqu'à obtenir une forme aussi proche que possible de celle du modèle : cette voie a été explorée par Guttman dès 1941.

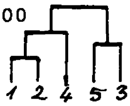
Une manière voisine de faire la même recherche, est d'appliquer un algorithme de classification automatique aux colonnes (critères) du tableau des succès. En général, un algorithme de classification ascendante hiérarchique (C.A.H.) conduit à une structure arborescente telle que celle figurée ci-dessous à gauche pour 5 objets 1, 2, 3, 4, 5 :



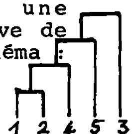
(cas général typique)



(effet de chainage total)



Ici , 1 est agrégé à 2, puis (1 , 2) à 4 et d'autre part 5 est agrégé à 3 ; puis ((1 , 2) 4) est agrégé à (5 , 3). Mais parfois on rencontre un effet de chaînage, tel que celui figuré à droite : il se forme à partir des deux premiers éléments agrégés (ici 1 et 2) une suite croissante de classes emboîtées, par agrégation successive de tous les éléments au noyau initial : ici (à droite) on a le schéma :



((((1,2)4)5)3) ; noté encore en bref : (1,2)4)5)3).

Il se trouve précisément que dans le cas de l'échelle de Guttman, l'application des diverses procédures de C.A.H. conduit à un effet de chaînage total ; ce qui définit sur les éléments un ordre (l'ordre de leur adjonction au noyau initial) qui est aussi celui de leur niveau de difficulté. C'est en particulier ce que l'on obtient quand on applique la C.A.H. suivant le critère du saut minimum avec pour indice de proximité entre deux critères q et q' le coefficient de Jaccard :

$$Pr(q,q') = n(1,1)/(n(1,1) + n(1,0) + n(0,1)) ,$$

où n(1,1) désigne le nombre de sujets ayant réussi à la fois q et q'; tandis que n(0,1) et n(1,0) sont respectivement les nombres des sujets ayant réussi q' sans q ou q sans q'. Avec cet indice classique, la proximité entre deux critères atteint sa valeur maxima qui est 1) si n(1,0) = n(0,1) = 0 ; i.e. s'il n'existe pas de sujets ayant réussi l'un des critères sans l'autre, ce qui implique que tous les sujets aient eu à ces deux critères la même note. Cependant, il est important de noter que succès et échecs ne jouent pas un rôle symétrique, surestimant en général la proximité des questions faciles relativement à celle des questions difficiles : c'est ce que montre l'exemple suivant de deux couples tout à fait symétriques, l'un de critères faciles qF, q'F, l'autre de critères difficiles qD , q'D, où l'on a inversé les taux de succès et d'échecs :

facile : (qF,q'F) : n(1,1) = 60 ; n(0,1) = 10 ; n(1,0) = 10 ; n(0,0) = 20

difficile : (qD,q'D) : n(1,1) = 20 ; n(0,1) = 10 ; n(1,0) = 10 ; n(0,0) = 60

Pr(qF,q'F) = 60/80 = 0,75 ; Pr(qD,q'D) = 20/40 = 0,5.

En général on justifie ce traitement dissymétrique des concordances de 1 et des concordances de 0 par le fait qu'il est plus significatif de s'accorder quant à la possession d'un trait que de se trouver ne pas avoir un même trait. Dans le cas présent, la similitude entre questions difficiles est *a priori* aussi intéressante que celle entre questions faciles ; et de plus l'indice étant appliqué à un ensemble de critères défini par des sujets et non à un ensemble de sujets définis par des qualités, la justification usuelle de l'indice de Jaccard ne s'applique pas. Mais cette dissymétrie a pour nous le mérite de provoquer une agrégation en chaîne des critères à partir du plus facile jusqu'au plus difficile . D'ailleurs, cf. *infra* NOTE, en inversant le rôle des échecs et des succès dans la définition de l'indice, on obtient une agrégation analogue dans l'ordre opposé.

En appliquant à nos données réelles, la C.A.H. suivant le saut minimum avec l'indice de Jaccard, on trouve comme dans le modèle de Guttman un chaînage parfait : et on peut dire que l'ordre de la chaîne obtenue est un candidat à être l'ordre de sériation, (en difficulté croissante) que nous cherchions. Voici cet ordre, tel qu'on l'a obtenu d'une part avec les résultats de la première passation, d'autre part avec ceux de la deuxième.

1-ère : (6,10)21)1)2)20)3)11)44)24)47)17)22)32)27)34)18)15)12)13)...

50)4)5)25)48)43)39)26)31)23)28)38)46)40)42)7)8)37)16)52)51)19)33)...

45)14)29)35)36)49)54)30)55)41)53)9).

2-ème : (6,10)21)1)2)20)11)47)17)3)24)32)44)15)50)25)27)34)18)4)26)...
12)5)38)7)43)39)13)28)48)8)42)52)31)40)23)54)46)16)37)51)35)14)...
36)33)29)45)49)19)30)55)41)9)53).

Il est satisfaisant que ces deux séries soient très semblables : en particulier les six critères les plus faciles (6,10,21,1,2,20) et les cinq les plus difficiles (30,55,41,53,9) sont les mêmes dans les deux passations.

Il faut signaler toutefois qu'en appliquant la C.A.H. avec un autre indice que l'indice de Jaccard, ou une autre procédure que celle du saut minimum on n'obtient pas en général sur nos données cet effet de chaînage parfait, indice d'une structure voisine de celle de l'échelle de Guttman.

NOTE : Inversons dans la définition de l'indice de Jaccard les rôles des succès et des échecs ; on a la formule suivante :

$$Pr2(q,q') = n(0,0)/(n(0,0) + n(1,0) + n(0,1)) .$$

A la différence de l'indice Pr (et pour des raisons tout analogues à celles invoquées ci-dessus), l'indice Pr2 surestime la proximité entre critères difficiles (fortes valeurs de n(0,0)) par rapport à celles entre questions faciles : on attend donc que la C.A.H. appliquée avec l'indice Pr2 et suivant le saut minimum produise un chaînage des questions à partir des plus difficiles. En effet, les résultats obtenus sur la 1-ère comme sur la 2-ème passation donnent un chaînage, qui n'est toutefois pas parfait ; mais ordonne bien les questions à partir des plus difficiles jusqu'aux plus faciles, en accord approximatif avec l'échelle fournie par l'indice de Jaccard Pr, ainsi qu'avec les taux de passations, présentés sur le graphique triangulaire illustrant le § 1. Pour une lecture plus facile nous donnons ces nouveaux résultats en omettant toutes les parenthèses sauf celles qui signalent les exceptions au chaînage : i.e. quelques paires de critères agrégés entre eux avant d'être insérés dans la chaîne. On a donc :

1-ère : 9,41,55,54,30,29,35,49,36,53,52,33,51,19,14,26,40,28,45,
38,42,50,23,25,(22,27), 16 , 8 ,31,43,37, 7,46,39,18,48,17,13, 4,
12, 5,32,20,24,11,47,34,15,44,21, 3, 2, (6,10), 1.

2-ème : 41, 55, 9,49,(29,30),53,35,36,54,19,52,51,33,28,(25,26),14,40,
37,38,31,42,(22,27),20,50,45,43, 23,46,16,17, 8 ,39, 7, 18, 12,
13,32, 4,48,44,47,11,21, 5,34,24,(6,10),15,(2,3),1.

3 *Analyses factorielle globales (garçons et filles)*

3.1 Echelle de Guttman et principe du bras de levier : L'analyse factorielle des correspondances a été effectuée d'abord sur les deux tableaux dédoublés de dimension 1390 (répondeurs) × (110 variables i. e. critères dédoublés). Dans le plan 1 × 2 , on obtient pour les variables la courbe parabolique bien connue qui nous signale l'effet Guttman . Plus de 25% de l'inertie est expliqué par le 1-er facteur tandis que 4%, ou à peu près, est donnée au 2-ème. (Comme il s'agit ici d'un tableau logique dédoublé, la trace est exactement 1, en sorte que les pourcentages ne sont que les valeurs propres exprimées en centièmes . Si, comme il est d'usage dans l'analyse d'un tableau en (0,1) sous forme disjonctive complète, on avait pris les valeurs propres issues du tableau de Burt, la part du 1-er facteur serait apparue encore plus prépondérante. On n'a pas jugé utile de faire ici ce calcul, ni pour la présente analyse, ni pour celles présentées au § 4). L'ordre des critères projetés sur la partie positive du premier axe diffère peu des résultats précédents, à l'exception de deux critères (9,53) qui s'écartent beaucoup des rangs attendus. Ces deux critères ont un faible effectif, mais cette propriété appartient à d'autres critères (par exemple 54,55) qui sont beaucoup mieux placés. Pour expliquer l'écart de ces deux critères, on démontre la proposition suivante qui se fonde sur la principe du bras de levier ([*VAS. CHIN.*], TII C n° 1) et qui est particulièrement utile dans le cas dont on s'occupe actuellement.

Proposition. Soit : $G(j)$ la projection de la variable j sur le 1-er axe,
$G(j')$ la projection de l'opposé dédoublé (noté j' de j,
COR le carré du cosinus de j avec l'axe :
$COR = G^2(j)/\rho^2(j)$

(ici on a repris les notations usuelles : se référer à [*PRAT. CORR.*] TII A n° 2, § 2.5)

$$\text{alors} \quad COR(j) = COR(j') = -g(j).G(j').$$

Il en résulte que si $G(j) \approx 0$ ou $G(j') \approx 0$, alors $COR \approx 0$ et la représentation de j sur j' sur cet axe est mauvaise. En ce qui concerne nos résultats les projections des variables opposées aux critères 9,53 étaient placées sur le premier axe près de l'origine ; et par conséquent les COR des variables : 9,53, étaient faibles par rapport à ceux d'autres variables.

Démonstration : Pour ce qui concerne un tableau dédoublé, on trouve la relation suivante pour l'inertie de la variable j quand on fait son développement :

$$f_j \, \rho^2(j) = (1/\mathrm{Card}\, j) - f_j \, .$$

Le terme à droite égale $f_{j'}$, et donc on trouve :

$$f_{j'}/f_j \quad = \quad \rho^2(j).$$

Or le principe du bras de levier s'énonce comme suit :

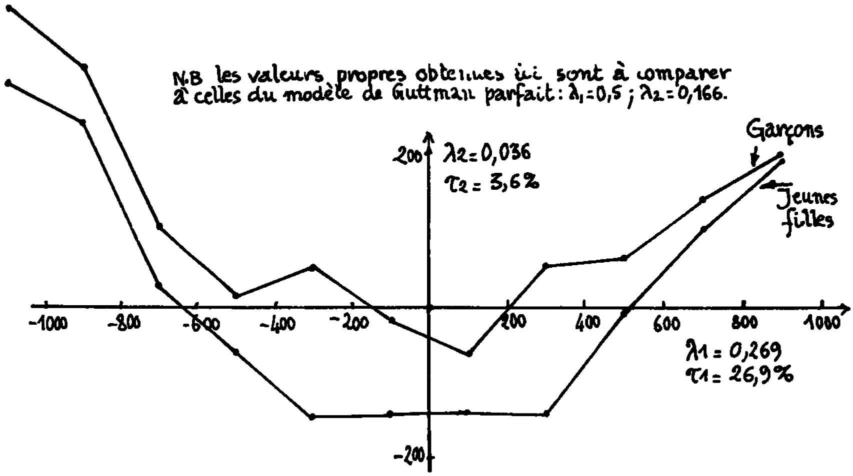
$$f_{j'}/f_j \quad = -G(j)/G(j').$$

D'où $G(j)/G(j') = -\rho^2(j)$

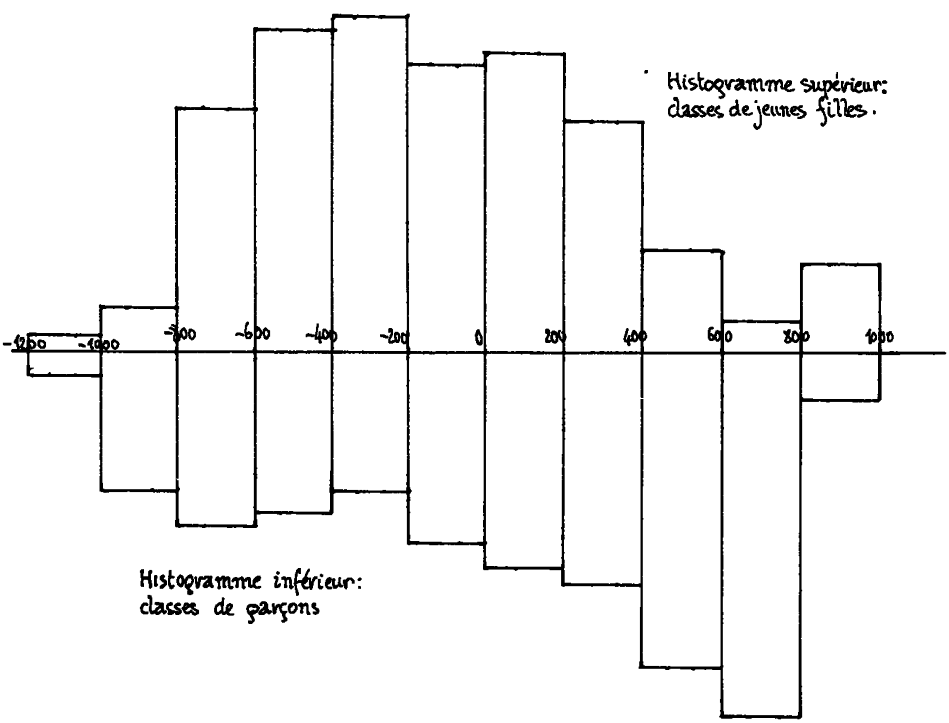
ou encore $G^2(j)/\rho^2(j) = COR(j) = -G(j).G(j')$.

En recherchant une seule droite pour représenter les variables (les critères), il en découle que l'on a intérêt à n'avoir aucun point à proximité de l'origine ; en plus ce résultat nous permet de juger immédiatement de l'ajustement des points à partir du plan des premiers axes.

3.2 *Répartition des garçons et des filles* : La mise en éléments supplémentaires des caractéristiques des élèves enquêtés permet d'examiner les rapports entre ces caractéristiques et les positions sur le premier axe des réponses. On dispose du sexe des répondeurs : il y avait 513 garçons et 877 filles enquêtés. Les barycentres des garçons et des filles se différencient nettement : celui-ci se place du côté négatif de l'axe 2 tandis que celui-là se trouve du côté positif. Afin de faire ressortir les différences entre les deux sexes, et en même temps de simplifier les sorties, on a effectué la démarche suivante sur la sortie du premier plan. Onze "lames" ont été définies sur le premier axe (de -1200 à -1000) ; de -1000 à -800 ; et ainsi de suite jusqu'à +1000 ; ces abscisses sont en millièmes) et dans chaque lame



[SCAL. MATH] § 3.2 : Comparaisons entre garçons & jeunes filles :
Ci-dessus : on a représenté dans le plan 1×2 les centres de gravité des "lames", ou sous-ensembles de garçons (ou de filles) définis par un intervalle du premier axe. On notera que le chapelet des points afférents aux jeunes filles dessine une parabole plus nette.
Ci-dessous : on a figuré par un double histogramme la suite des masses des différentes lames : l'histogramme des garçons apparaît le plus irrégulier avec une tendance nettement bimodale.



on a pris la moyenne des ordonnées sur le deuxième axe. Les sexes ont été considérés séparément. On voit le résultat de la 2-ème passation sur la figure 2. On constate que les garçons donnent une parabole qui est moins nette que celle des filles. On constate en outre que la plupart des garçons sont placés vers l'extrémité positive du premier axe.

Pour expliquer pourquoi les garçons et les filles diffèrent de cette façon, on a remarqué que les critères qui relèvent de notions mathématiques bien précises (algèbre - critères 38-43, géométrie - critères 44-49, et problèmes d'arithmatique - critères 51-55) se placent du côté positif de l'axe 2, tandis que parmi les critères du côté négatif de cet axe figurent ceux qui relèvent du calcul fondamental (critères 1-14). Le centre de gravité des garçons sur le 2-ème axe est plus proche de ceux-là. La tendance des garçons à obtenir de meilleurs résultats dans le traitement de notions bien précises et des filles à être plus aptes aux calculs fondamentaux nous paraît admise. En tout cas, il en résulte que l'échantillon des filles fournit une parabole plus nette et se prête mieux à la construction de l'échelle que nous cherchons.

Le troisième axe a un caractère particulier : alors que les critères qui traitent des opérations avec les fractions (critères 21-30) sont jonchés un peu partout sur les premier et deuxième axes, ils s'écartent sur le troisième des autres critères, et en particulier des notions bien définies et des problèmes d'arithmétique (critères 38-55), auxquels on peut adjoindre le calcul décimal et les pourcentages (critères 31-37). Les calculs fondamentaux (critères 1-14) sont à peu près à l'origine sur cet axe.

Au total, les filles sont du côté des fractions, tandis que les garçons se montrent, ici encore, associés à l'algèbre et à la géométrie.

4 *Analyse factorielle des résultats obtenus par les jeunes filles*

4.1 *Interprétation du plan 1 × 2 et ordre retenu pour l'échelle des critères*

Interprétation du plan 1 × 2 et ordre retenu pour l'échelle des critères : Du fait que les filles donnent une parabole plus claire, on cherche l'ordre définitif sur les critères uniquement à partir d'elles. On retient, d'abord, les réponses des sujets soumis aux deux passations (lesquelles étaient, on l'a dit, séparées par un intervalle de six mois) : 1167 élèves sur un total de 1390. Sur ces 1167 élèves, il y a 748 filles. Ensuite, afin de prendre en compte les deux passations, on a fait l'analyse des tableaux M et N associés aux deux passations, superposés de la manière suivante. Soit :

$\boxed{M_{IJ}}$ le tableau dédoublé de la première passation ;

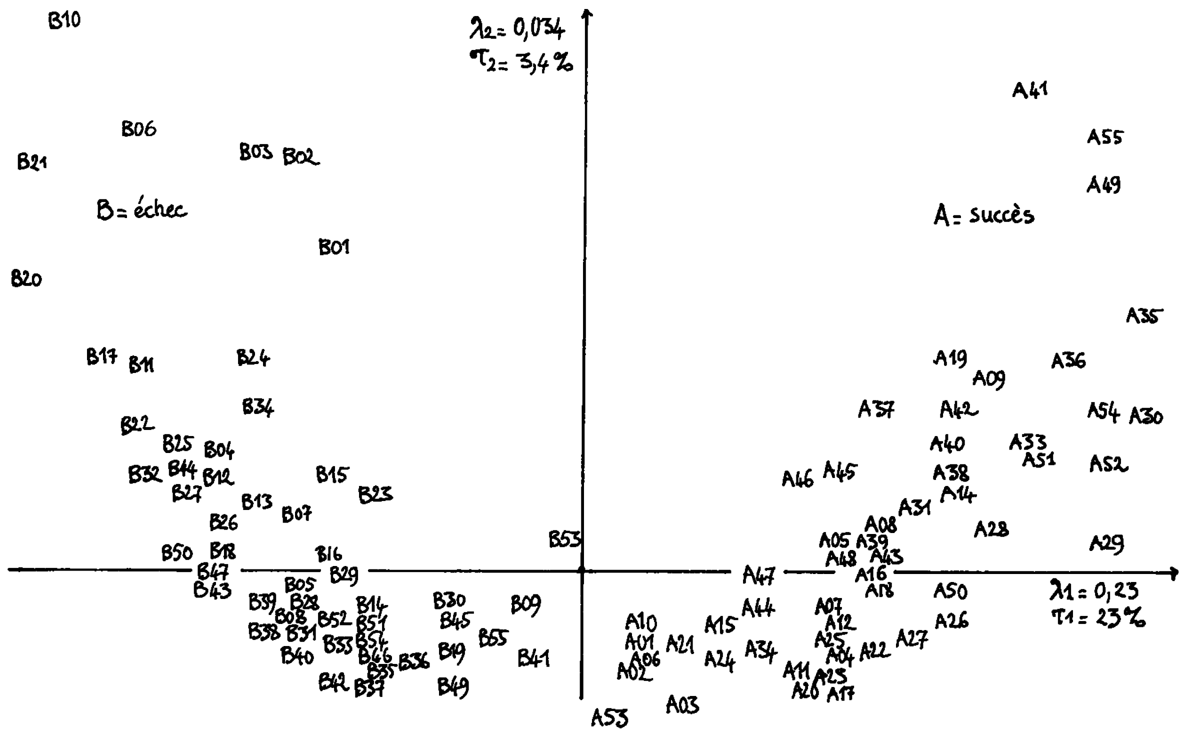
$\boxed{N_{IJ}}$ le tableau correspondant à la deuxième passation ;

où J est l'ensemble des 110 critères et leurs opposés, et I est l'ensemble des 748 filles qui ont répondu aux deux passations.

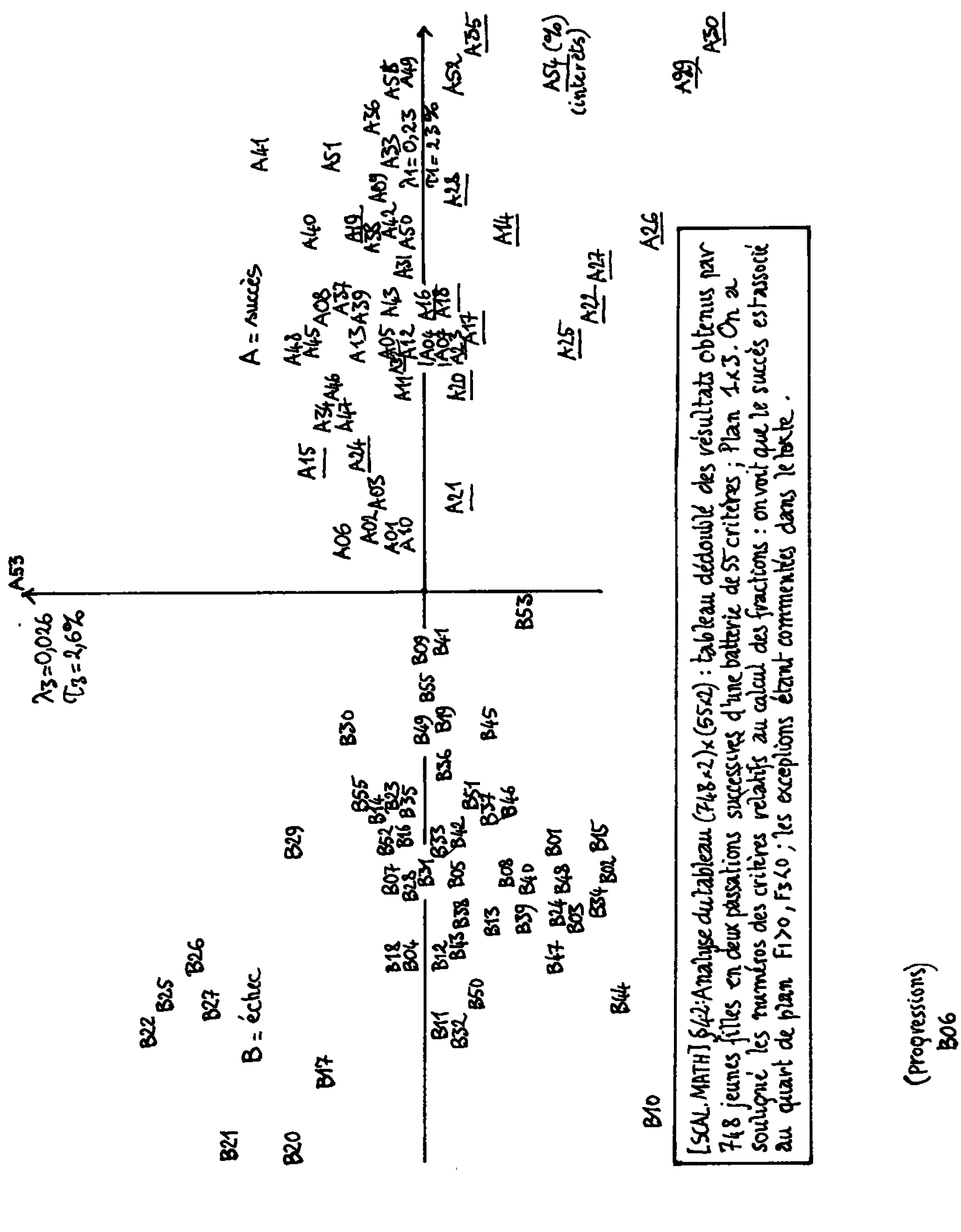
Avant de suggérer un ordre des critères résultant de l'analyse, calculons comme coefficient d'accord entre les deux passations :

$$\text{Coeff} = \Sigma\{N(i,j)\ M(,j) \mid i \in I\ ;\ j \in J\}/(\text{Card}\, I\, \text{Card}\, J/2)$$

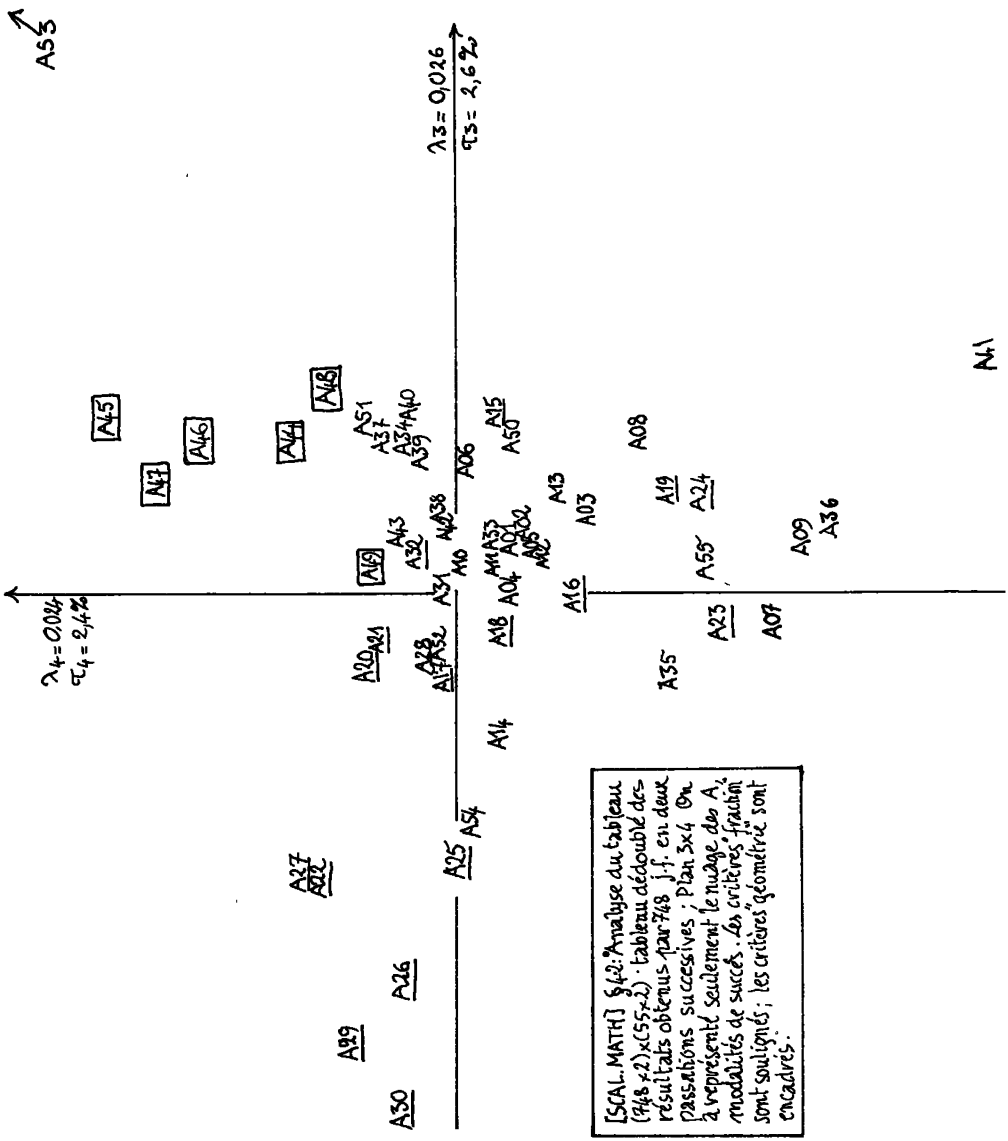
évidemment : $0 \leq \text{Coeff} \leq 1$; Coeff = 0 implique qu'il y a complémentarité absolue entre les deux passations ; Coeff = 1 implique que tout critère réussi à l'une des deux passations l'est également à l'autre. Entre ces deux cas extrêmes de corrélation absolue négative ou positive, Coeff = 0,5 exprime l'indépendance entre les deux passations. Avec les données dont on dispose ici, on trouve comme coefficient de validité



[SCAL. MATH] §4.1: Analyse du tableau (748×2) × (55×2) : tableau dédoublé des résultats obtenus par 748 jeunes filles en deux passations successives d'une batterie de 55 critères ; Plan 1×2.



[SCAL. MATH] §4.2: Analyse du tableau (748×2)×(55×2) : tableau dédoublé des résultats obtenus par 748 jeunes filles en deux passations successives d'une batterie de 55 critères ; Plan 1×3. On a souligné les numéros des critères relatifs au calcul des fractions : on voit que le succès est associé au quart de plan F1>0, F3<0 ; les exceptions étant commentées dans le texte.

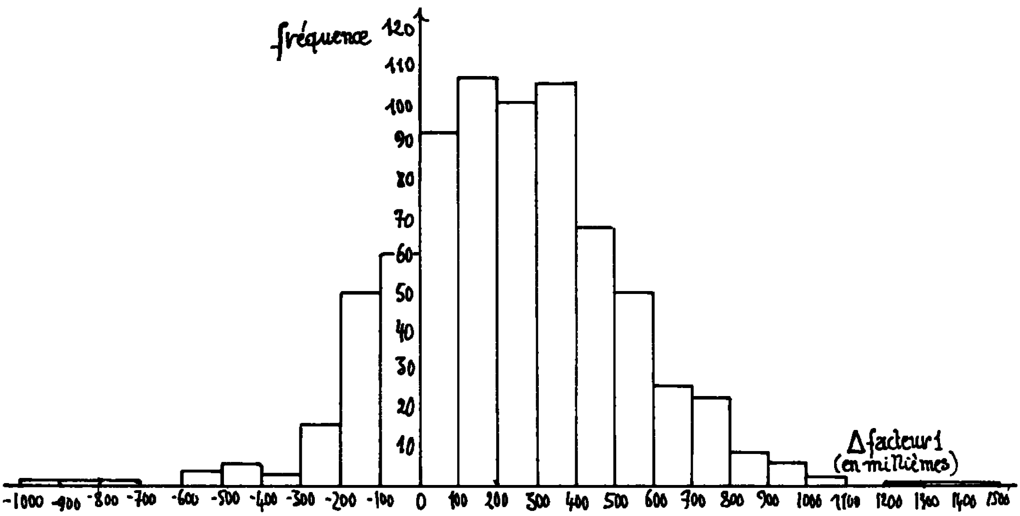


[SCAL. MATH] §4.2: "Analyse du tableau (748×2)×(55×2) : tableau dédoublé des résultats obtenus par 748 j.f. en deux passations successives ; Plan 3×4. On a représenté seulement le nuage des A_i modalités de succès. Les critères "fraction" sont soulignés ; les critères "géométrie" sont encadrés.

ou pourcentage d'accord :

Coeff = 0,766 ; soit à mi-chemin entre 0,5 et 1.

Il est également intéressant d'apprécier les progrès des élèves d'après l'histogramme de la variation du premier facteur entre les deux passations : on constate qu'il y a pour la majorité des élèves un net progrès.



[SCAL-MATH] §41: Histogramme de la variation du premier facteur entre deux passations du DCRMT, pour 748 jeunes filles. L'axe des abscisses (axe ΔF1) est gradué en millièmes; Les fréquences sont comptées en unités (nombre d'élèves). On notera qu'il n'y a rétrogradation que pour 20% des elèves ; la tendance générale au progrès étant nette.

Reste le problème épineux de la sériation des critères. Les bases de cette sériation sont certainement à prendre dans le plan 1 × 2, avec un fort effet Guttman.

On a (cf. figure), du côté positif de l'axe 1 les modalités de succès : les points les plus excentriques (e.g. A41, A55, A49), correspondent aux critères les plus difficiles à satisfaire ; au contraire du côté négatif de l'axe 1 sont les échecs, et les points les plus excentriques correspondent aux critères très faciles : (B10, B06, B21). Ceci suggère donc une double lecture du graphique : sur l'aile droite pour ordonner les critères les plus difficiles ; et sur l'aile gauche pour ordonner les critères faciles. Ce compromis nout paraît préférable à une sériation fondée sur la considération du seul facteur 1 pour l'ensemble des modalités de succès (critères q ordonnés suivant les valeurs des $F_1(Aq)$), ou d'échec (critères ordonnés suivant les valeurs $F_1(Bq)$). Assurément les deux sériations obtenues en lisant à partir de l'aile droite et de l'aile gauche ne se raccordent pas parfaitement (cet accord imparfait entre sériations par les échecs et par les succès est déjà apparu au § 2, NOTE) ; mais la partie centrale de l'échelle (questions de force moyenne) nous intéresse pratiquement beaucoup moins que les extrêmes. Voici la sériation proposée : le critère 53 en est absent, du fait de sa très mauvaise représentation dans le plan 1 × 2 (il s'agit de problèmes simples relatifs à la T.V.A, taxe sur la valeur ajoutée ; dont vraisemblablement, une partie des élèves ignorent le principe, quel que soit d'autre part leurs aptitudes au calcul).

FACILE : 10,6,21,3,2,1,20,17,11,22,24,34,25,32,44,4,27,12,13, 15,18,50,26, 7, 23, 47,16,48, 5,39,43,46, 8,31,28,45,14,38,29, 40,37,42,33,51,52,19, 9,54,30,36,35,49,55,41 : DIFFICILE.

4.2 *Interprétation des facteurs d'ordre supérieur* : Les facteurs 1,2 sont liés par l'effet Guttman et expriment la difficulté des questions. Les facteurs d'ordre supérieur séparent les parties du questionnaire mettant en jeu des aptitudes différentes. Nous donnons l'interprétation détaillée des facteurs 3 et 4 d'après deux figures.

L'axe 3 sépare les critères relatifs aux fractions : les succès à ces critères (points A15 à A30...) occupent le quart du plan $F1 > 0$, $F2 < 0$. Toutefois avec les fractions vont les calculs d'intérêt (A54), de moyenne A52 (celui-ci peu écarté de l'origine sur l'axe 3); de plus quelques critères relatifs aux fractions font exception : A15,A19,A24, A32 (celui-ci très proche de l'origine sur l'axe 3) : mais il y a entre A19 et A32 une similitude : les deux critères (conversion de fractions en nombre décimaux = 32 ; et comparer des valeurs de fraction = 19) mettent en jeu les valeurs non le calcul formel;de même avec A15 il s'agit simplement de l'équivalence entre le quotient (m : n) et une fraction.

Dans le plan 3×4, on s'est borné à représenter le nuage des modalités de succès (K) : ainsi apparaissent nettement les groupements de critères afférents aux fractions ($F3 > 0$) et à la géométrie (F3 0, $F4 > 0$).

4.3 *Analyse complémentaire* : En superposant les tableaux M et N (cf. § 4.1) nous considérons deux passations successives afférentes à une même élève comme deux individus distincts représentés par deux points dont on peut e.g. comparer les abscisses sur l'axe 1 (cf. histogramme). Au contraire, en juxtaposant les tableaux M et N, on a sur une même

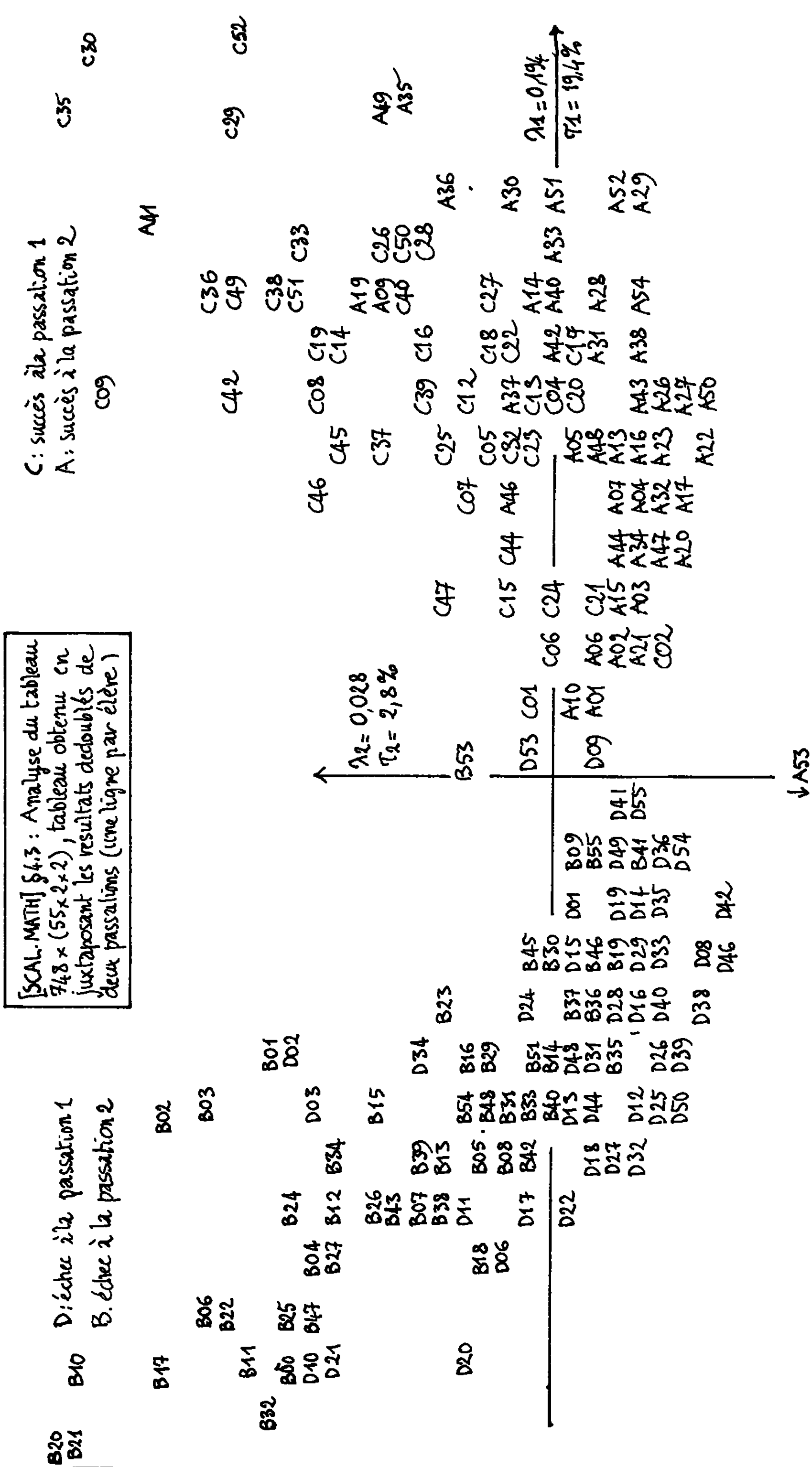
$\boxed{M_{IJ} \mid N_{IJ}}$: tableau MN : I(748 élèves) $\times (2 \times 2 \times 55)$

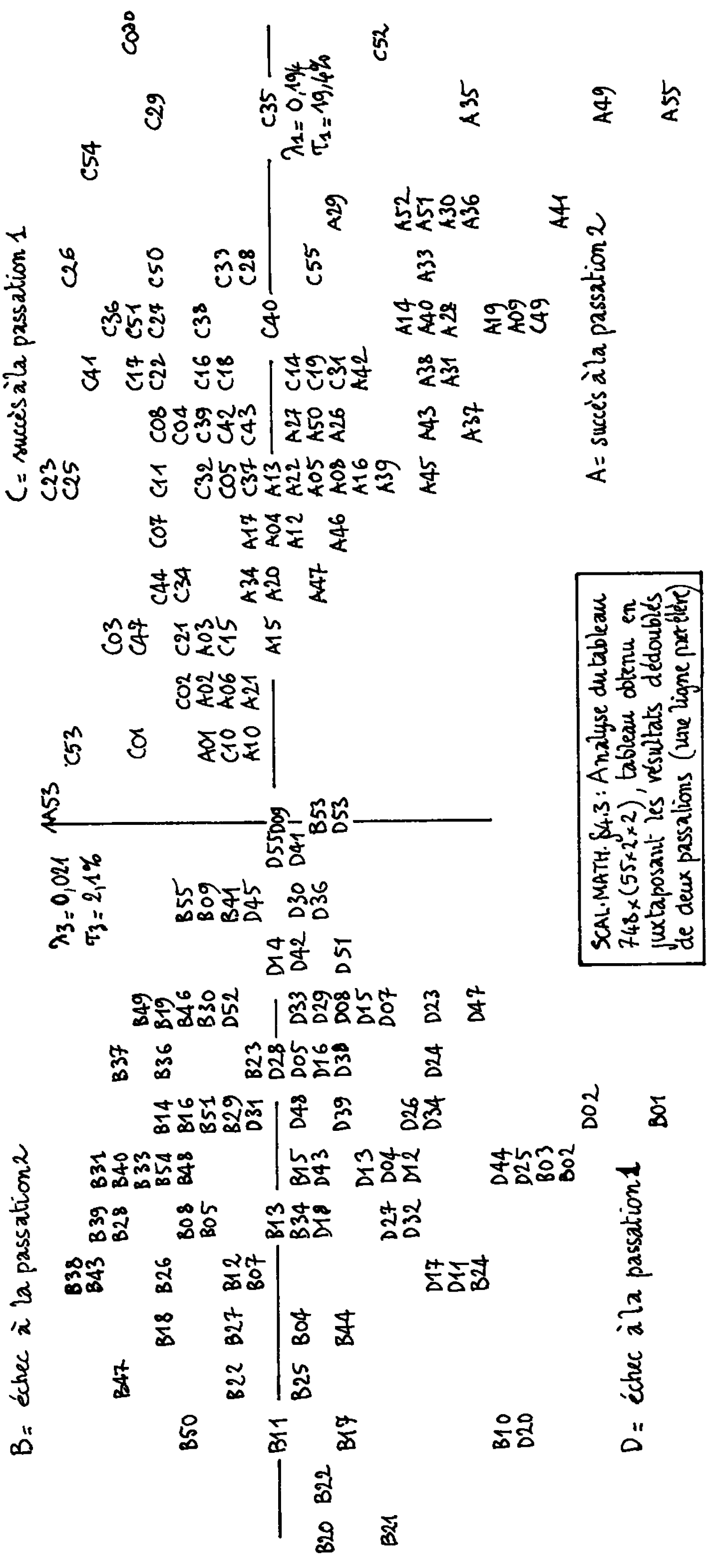
ligne les résultats des deux passations de chaque élève ; mais à chaque critère il correspond 4 colonnes : A,B,C,D : où A,C sont les modalités de succès aux passations 2 et 1 respectivement ; et B,D les modalités d'échec.

En examinant le plan 1×2 on constate (outre l'effet Guttman attendu) que les extrémités des ailes du nuage sont occupées quasi exclusivement par des points C (succès à la passation 1) et B (échec à la passation 2) : en effet les élèves ont progressé d'une passation à l'autre ; les modalités C sont donc plus légères que A, et B que D ; et l'on sait que les modalités légères occupent généralement des positions excentriques.

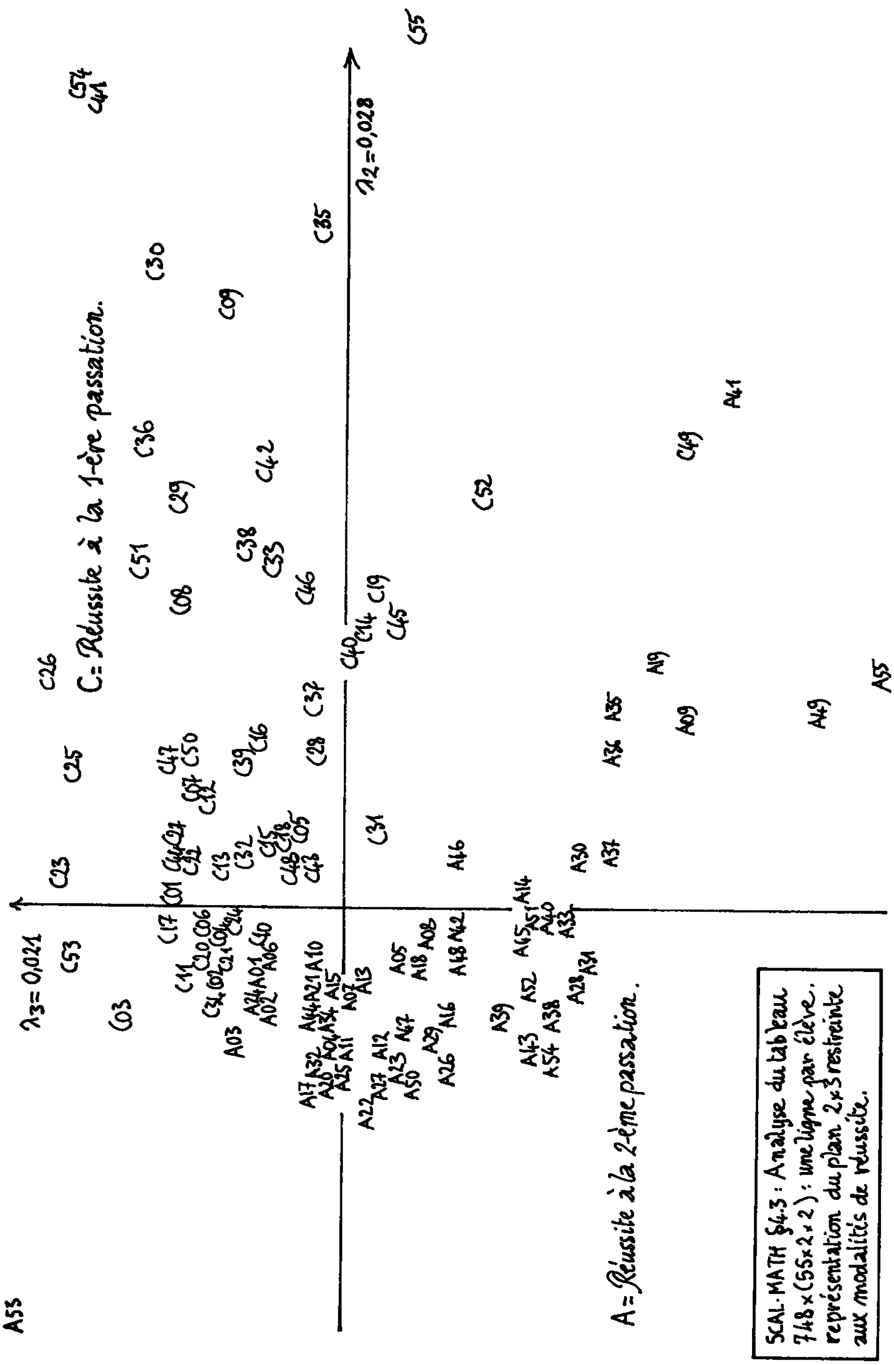
De même sur l'axe 3 (cf. plan 1×3) on remarque principalement du côté positif des modalités B associées au C ; et du côté négatif,des A associés à des D.

Pour préciser ce que suggèrent ces graphiques (plans 1×2 et 1×3), on a fait des représentations partielles dans le plan 2×3 des deux demi-espaces $F1 > 0$ et $F1 < 0$; c'est-à-dire d'une part des modalités de succès A et C ; et d'autre part des modalités d'échec B et D. On voit alors que la 2-ème bissectrice du plan 2×3 réalise une séparation quasi parfaite d'une part entre A et C, d'autre part entre D et B.

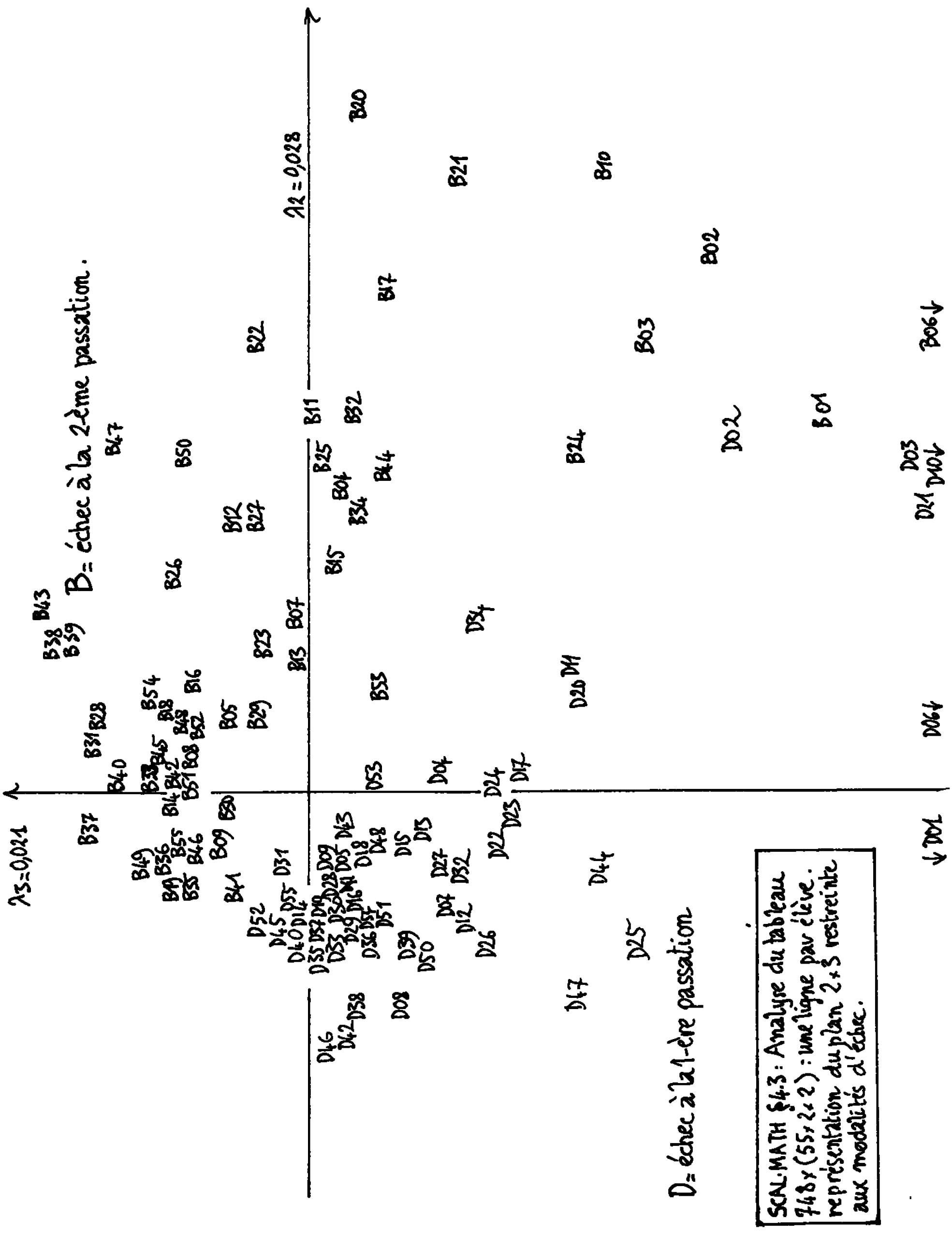

[SCAL. MATH] §4.3 : Analyse du tableau 748 × (55×2×2), tableau obtenu en juxtaposant les résultats dédoublés de deux passations (une ligne par élève)
C : succès à la passation 1
A : succès à la passation 2
D : échec à la passation 1
B : échec à la passation 2
λ1 = 0,194
τ1 = 19,4%
λ2 = 0,028
τ2 = 2,8%



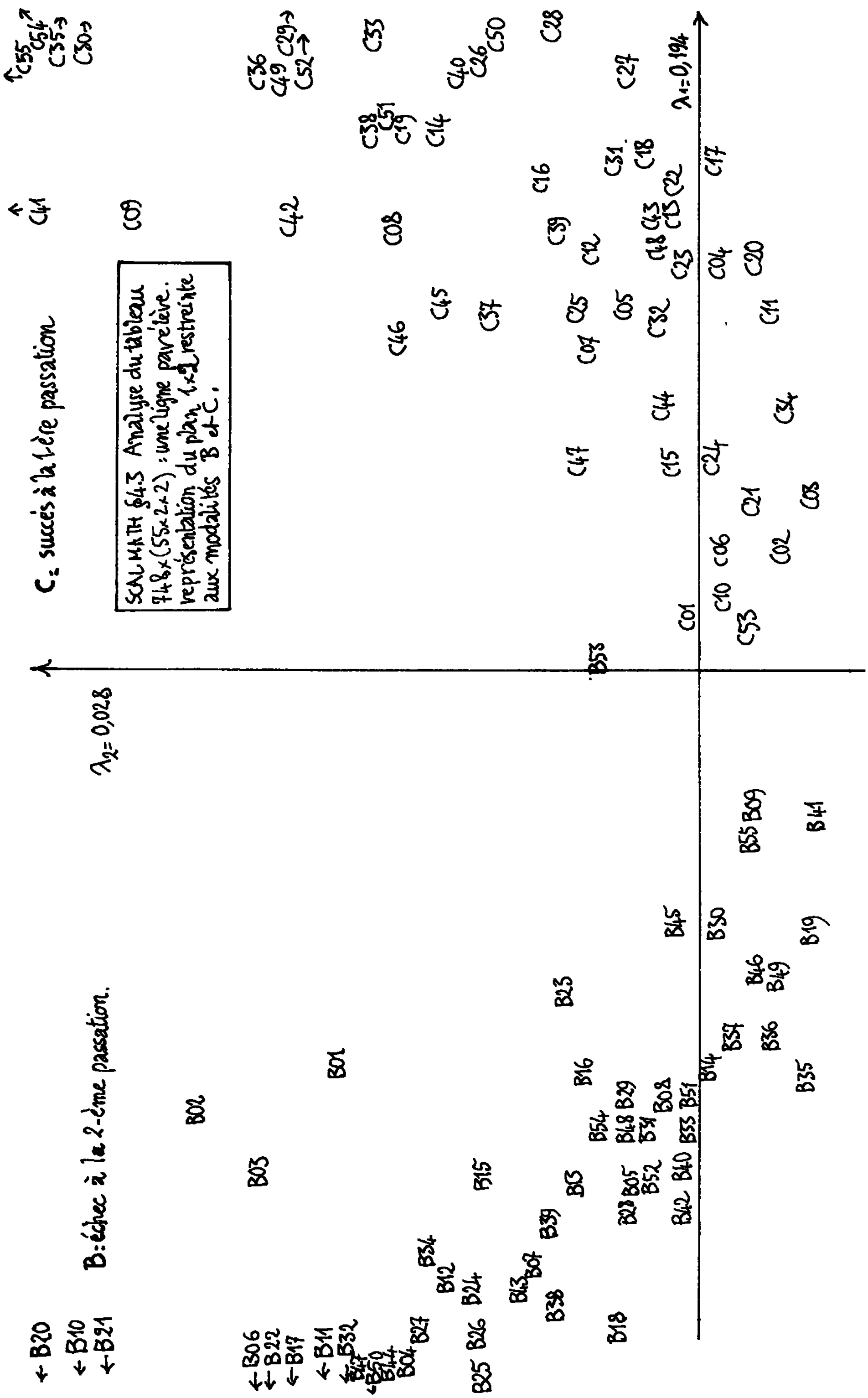
SCAL.MATH. §4.3 : Analyse du tableau 748×(55×2×2), tableau obtenu en juxtaposant les résultats dédoublés de deux passations (une ligne par élève)

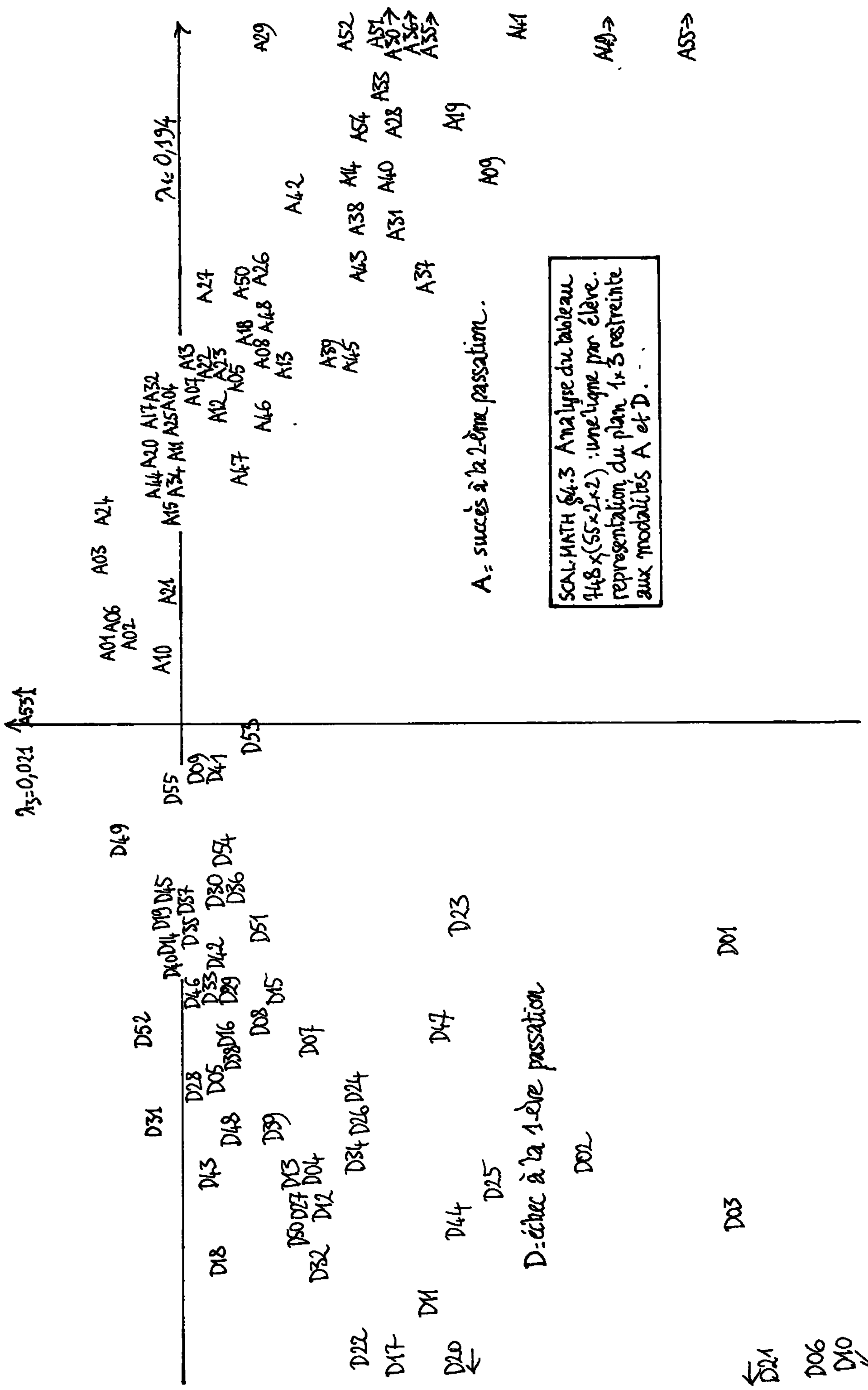


SCAL-MATH §4.3 : Analyse du tableau 748×(55×2×2) : une ligne par élève. représentation du plan 2×3 restreinte aux modalités de réussite.



SCAL.MATH §4.3 : Analyse du tableau 748 × (55 × 2 × 2) : une ligne par élève. représentation du plan 2×3 restreinte aux modalités d'échec.


C: succès à la 1ère passation
B: échec à la 2-ème passation.
λ1=0,194
λ2=0,028
SCALMATH 84.3 Analyse du tableau 748x(55x2x2) ; une ligne par élève.
représentation du plan 1x2 restreinte aux modalités B et C.



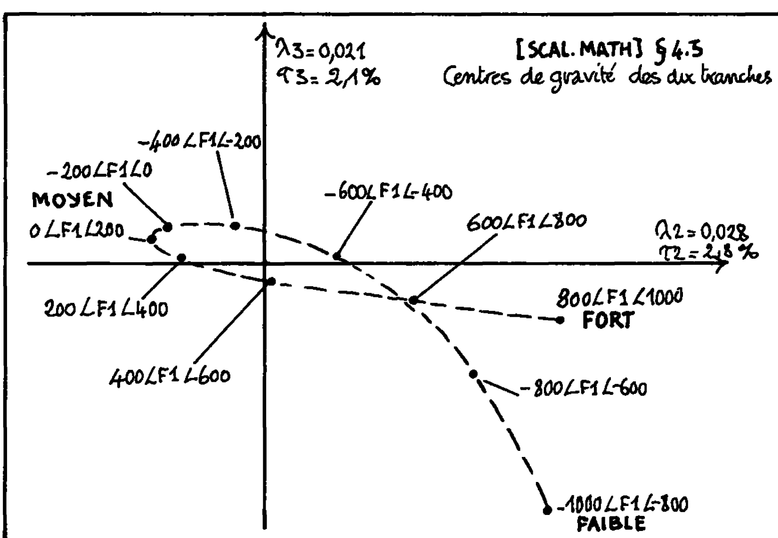
SCAL.MATH §4.3 Analyse du tableau 448x(55x2x2) : une ligne par élève. représentation du plan 1x3 restreinte aux modalités A et D.

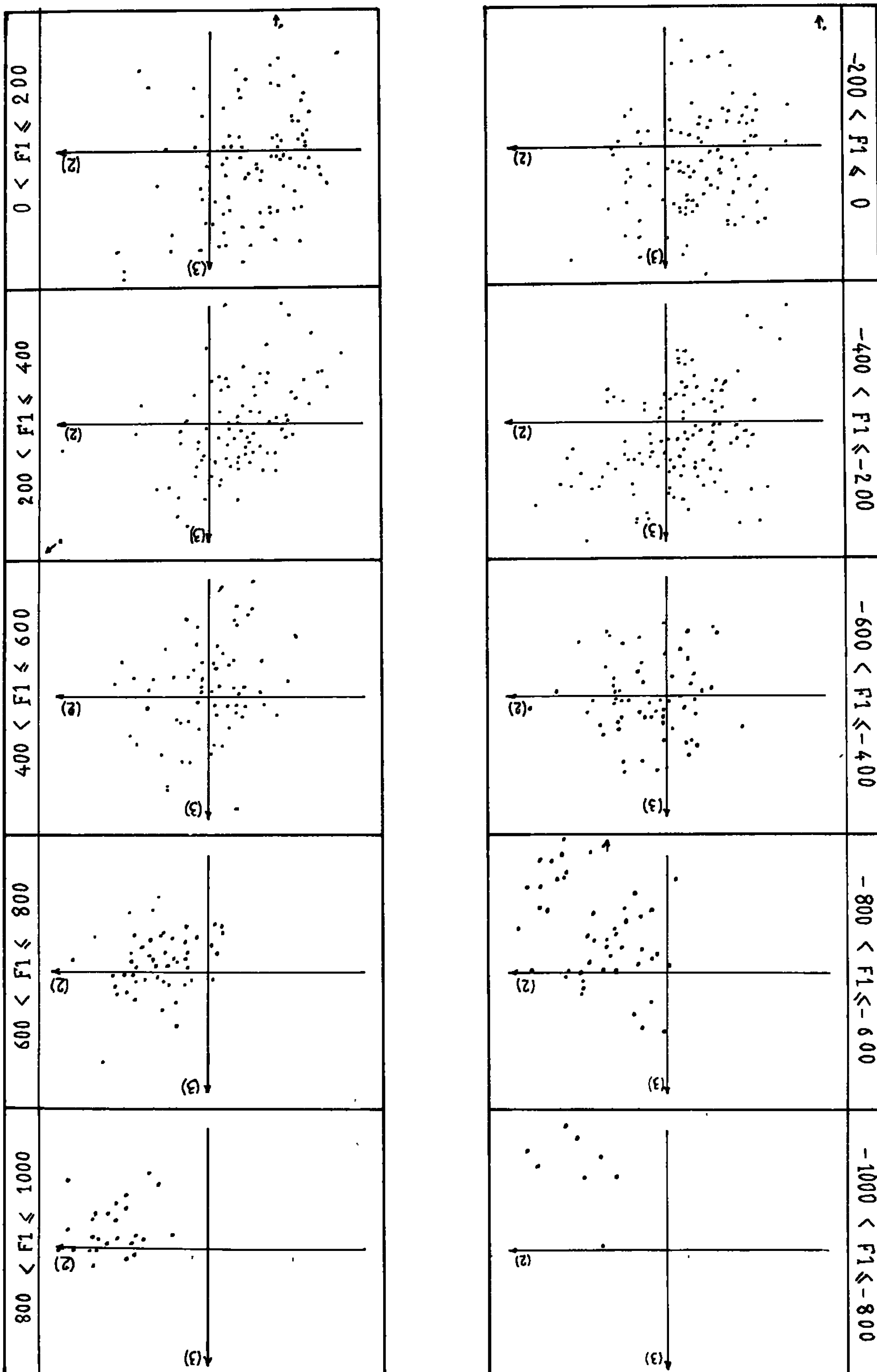
Puisque les sous-nuages A et D se développent principalement dans la direction de l'axe 3 , tandis que les sous-nuages B et C se développent dans la direction de l'axe 2 , on a repris les plans 1 × 3 et 1 × 2 pour y faire une représentation partielle restreinte aux sous-nuages qui y sont le mieux représentés : c'est-à-dire B et C dans le plan 1 × 2 et A et D dans le plan 1 × 3. On obtient ainsi des croissants paraboliques caractéristiques : fait particulièrement remarquable dans le plan 1 × 3, où l'ensemble des 220 points A,B,C,D montre seulement deux amas, à peu près symétriques par rapport à l'origine.

Quant aux sujets, on peut dire que la première bissectrice du plan 2 × 3 représente pour eux un axe opposant régression et progrès : En effet le quadrant (F2 > 0 ; F3 > 0), contient principalement des modalités CB (succès à la 1-ère p-tion ; B échec à la 2-ème) ; tandis que le quadrant (F2 < 0 ; F3 < 0), contient des modalités AD (A succès à la 2-ème p-tion ; D échec à la 1-ère): donc passer de CB à AD c'est progresser ; passer de AD à CB, c'est régresser. Mais la place des individus dans le plan 2×3 dépend également de leur niveau. La deuxième bissectrice de ce plan étant par un effet Guttman associée à l'axe 1 : de façon précise, les sujets de niveau extrême (très forts ou très faibles) sont plutôt dans le quadrant (F2>0; F3 < 0) ; tandis que le quadrant (F2 < 0 ; F3 > 0) ne contient que des sujets de niveau moyen.

Pour plus de précision, on a divisé les individus en dix tranches, d'après la valeur du facteur F1 : et pour chacune de ces tranches , on a représenté le sous-nuage des individus dans le plan 2 × 3 ; et calculé le centre de gravité de ce sous-nuage. On constate que les individus forts (presque tous situés dans le quadrant (F2 > 0 ; F3 < 0) tendent à avoir un F2 supérieur à celui des individus faibles (tous situés dans ce même quadrant). Comme il est naturel le facteur de progrès (première bissectrice du plan 2 × 3) intéresse particulièrement les classes moyennes, qui s'étalent dans cette direction avec une densité maxima dans le quadrant (F2 < 0 ; F3 > 0).

On a dessiné ci-dessous les centres de gravité des dix tranches ; et ci-contre les sous-nuages correspondant à ces tranches.




0 < F1 ⩽ 200
200 < F1 ⩽ 400
400 < F1 ⩽ 600
600 < F1 ⩽ 800
800 < F1 ⩽ 1000
-200 < F1 ⩽ 0
-400 < F1 ⩽ -200
-600 < F1 ⩽ -400
-800 < F1 ⩽ -600
-1000 < F1 ⩽ -800
(2)
(3)

FORAS TAIGHDE AR OIDEACHAS EDUCATIONAL RESEARCH CENTRE

COLÁISTE PHÁDRAIG BAILE ÁTHA CLIATH 9 ST. PATRICK'S COLLEGE · DUBLIN 9

Drumcondra Criterion Referenced Mathematics Test

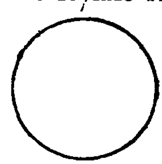
SAMPLE X

Add

8	(A) 12
12	(B) 24
4	(C) 26
	(D) 144

SAMPLE Y

What is this figure called?



(A) square
(B) triangle
(C) rectangle
(D) circle

READ THESE INSTRUCTIONS CAREFULLY

1. This test contains many short questions in mathematics. The purpose of the test is to help you and your teacher to identify your strengths and weaknesses in mathematics.
2. Start at the beginning and work carefully through each page. When resuming the test after a break make sure you restart at the right place.
3. Do not write on this booklet. Mark the answers on the separate answer sheet. Do your calculations on the rough work sheet provided.
4. If you make a mistake on your answer sheet, rub it out carefully and fill in the space under the correct answer. Do not fold or bend the answer sheet.
5. Try to answer all the questions. Some of the questions may be unfamiliar so do not spend too much time on them.
6. If at any time you break your pencil, put up your hand immediately and you will be given a new one.

DO NOT OPEN THIS BOOK UNTIL YOU ARE TOLD