LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

P. CAZES

L'analyse de certains tableaux rectangulaires décomposés en blocs : généralisation des propriétés rencontrées dans l'étude des correspondances multiples. IV. Cas modèles

Les cahiers de l'analyse des données, tome 6, n° 2 (1981), p. 135-143

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1981__6_2_135_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. VI - 1981 - n° 2 - p. 135-143

L'ANALYSE DE CERTAINS TABLEAUX RECTANGULAIRES DÉCOMPOSÉS EN BLOCS : GÉNÉRALISATION DES PROPRIÉTÉS RENCONTRÉES DANS L'ÉTUDE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES (*)

IV. CAS MODÈLES

[ANA. BLOCS IV]

par P. Cazes [1]

6 *Etude de quelques cas-modèles*

6.1 *Introduction* : Nous étudions ici quelques cas-modèles relatifs au tableau k_{IJ} défini au § 5.2, et aux tableaux dérivés (tableau de Burt B_{JJ} et sous-tableaux de B_{JJ}). Ces cas-modèles traitent donc de mélanges de variables qualitatives et de variables quantitatives non divisées en classes codées selon la technique proposée au § 5, sauf les deux derniers qui ne sont relatifs qu'aux questionnaires. Nous désignerons toujours par K et K' deux sous-ensembles quelconques de l'ensemble Q de toutes les variables, et par L et L' l'ensemble des modalités qui leur sont respectivement associées ; mais ici, K comme K' peut contenir un mélange de variables qualitatives et quantitatives , contrairement aux notations adoptées au § 5 où K (resp. K') ne caractérisait que les variables qualitatives (resp. quantitatives). Nous étudierons essentiellement, sauf pour le dernier cas-modèle reporté ici les propriétés du sous-tableau de Burt $C_{LL'}$, croisant K et K'.

Quand les hypothèses du modèle ne sont pas incompatibles avec l'égalité K = K', les résultats trouvés dans le cas général $K \neq K'$, $K \cap K' = \emptyset$ seront valables, sauf cas particulier (dont le cas-modèle étudié au § 6.5) pour le tableau de Burt modifié B^M_{LL} (cf. § 4.4), ce qui permettra d'en déduire les propriétés du tableau de Burt B_{LL}.

Nous supposerons essentiellement que toutes les variables ont le même poids i.e. que le total de tout sous-tableau (afférent aux modalités d'une seule variable qualitative, ou relatif aux deux colonnes associées à une variable quantitative (cf. § 5)) k_{IJq} de k_{IJ} est constant et égal au nombre C_I d'individus. Nous supposerons également que les variables quantitatives sont réduites, ou ce qui est équivalent , que tous les tableaux croisant une variable quantitative q avec elle même sont diagonaux.

Enfin, nous parlerons par abus de langage d'indépendance entre deux variables q et q' si la loi du couple $p_{JqJq'}$ est égale à la loi

---

(*) *suite des articles parus sous le même titre dans les* Cahiers:*[ANA. BLOCS I] (§§ 1, 2, 3) Vol V n° 2 pp 145-161 ; [ANA. BLOCS II] (§ 4) et addendum, Vol V n° 4 pp 387-406 ; [ANA. BLOCS III] (§ 5) Vol VI n° 1 pp 9-17 ; articles auxquels nous ferons ici souvent référence.*

(1) *Maître Assistant, laboratoire de statistique. Université P. et M. Curie.*

produit $p_{J_q} \otimes p_{J_{q'}}$. Il s'agira effectivement de l'indépendance si q et q' sont qualitatives ; par contre si q et q' sont quantitatives, il s'agira en fait de non corrélation, tandis que si q est qualitative et q' quantitative, la notion précédente d'indépendance traduira simplement le fait que la variance interclasse de q' relativement à la partition définie par q est nulle.

6.2 *Etude de plusieurs cas d'indépendance entre variables dans l'analyse d'un sous-tableau de Burt*

6.2.1 *Cas où les variables dans chaque groupe K et K' sont 2 à 2 indépendantes entre elles* :

Nous supposerons ici, sans nuire à la généralité que K et K' constituent une partition de Q, et donc L et L' une partition de J ; si ce n'est pas le cas, tous les résultats donnés restent valables, à condition de remplacer Q (resp. J) par l'union disjointe de K et K' (resp. L et L') (*), et C_Q par $C_K + C_{K'}$ dans les formules données.

Le cas étudié ici, où les variables de l'ensemble K sont 2 à 2 indépendantes, et de même pour les variables de l'ensemble K', a déjà été rencontré aux §§ 3.2.1, 5.3.2, et 5.4 (cf. [*ANA. BLOCS I*] et [*ANA. BLOCS III*]) ; aussi nous ne nous y attarderons pas, sauf pour rappeler l'équivalence entre les analyses de k_{IJ}, B_{JJ}, $C_{LL'}$, et l'analyse canonique dans R^I des sous-espaces respectivement engendrés par l'ensemble L et l'ensemble L' des colonnes de k_{IJ}, et préciser l'équivalence entre l'analyse de B_{JJ} et celle de $C_{LL'}$, ce qui nous permettra de voir à nouveau l'intérêt de raisonner sur le tableau de Burt modifié B^M_{JJ}.

De façon précise, si $(\varphi^L, \varphi^{L'})$ est un couple de facteurs non triviaux de variance 1, issu de $C_{LL'}$, et associé à la valeur propre λ ($\lambda \neq 0$), $(a\varphi^L, b\varphi^{L'})$ avec $a = (C_Q/(2C_K))^{1/2}$, $b = \varepsilon(C_Q/(2C_{K'}))^{1/2}$, ε étant égal à ± 1, est un couple de facteurs de variance 1 issu de B_{JJ} (resp. B^M_{JJ} ; k_{IJ}) et relatif à la valeur propre μ (resp. μ^M ; $\sqrt{\mu}$) avec $\sqrt{\mu} = (1 + \varepsilon\sqrt{\lambda C_K C_{K'}})/C_Q$ et $\sqrt{\mu^M} = \sqrt{\lambda C_K C_{K'}}/(C_Q - 1)$. On obtient donc à partir d'un facteur de $C_{LL'}$, deux facteurs pour B_{JJ} (et B^M_{JJ}), qui apportent la même information, le premier ($\varepsilon = 1$) étant direct pour le tableau de Burt modifié, et le second ($\varepsilon = -1$) étant inverse. On voit donc à nouveau l'intérêt, dans ce cas particulier, de ne raisonner que sur les facteurs directs et les valeurs propres associées, issus de B^M_{JJ}: les pourcentages d'inertie ainsi calculés, sont comme dans le cas d'un questionnaire binaire ($C_Q = 2$) identiques à ceux du tableau $C_{LL'}$, bien que les valeurs propres de B^M_{JJ} ne soient plus identiques à celles de $C_{LL'}$, mais simplement proportionnelles à ces valeurs propres.

(*) Dans ce cas, si D désigne l'union disjointe des J_q, le tableau k_{ID}, superposition des sous-tableaux k_{IJ_q} pour q appartenant à l'union disjointe de K et de K', n'est un sous-tableau de k_{IJ} que si $K \cap K' = \emptyset$. Si ce n'est pas le cas, et si $q \in K \cap K'$, k_{IJ_q} figurera deux fois comme sous-tableau de k_{ID}.

Réciproquement si $\psi^J = (\psi^L, \psi^{L'})$ est un facteur non trivial de variance 1 issu de B_{JJ}, et associé à la valeur propre μ ($\mu \neq 0$), $((1/a)\psi^L, (1/b)\psi^{L'})$ est un couple de facteurs associés de variance 1, issu de $C_{LL'}$, et relatif à la valeur propre λ, λ et μ étant reliés par la même équation que précédemment où $\varepsilon = 1$ si $\sqrt{\mu} > 1/C_Q$ (i.e. si ψ^J est direct pour B^M_{JJ}) et -1 sinon, a et b étant définis comme ci-dessus.

Remarque : On sait que du fait de la structure de $C_{LL'}$, il existe C_K (resp. $C_{K'}$) facteurs triviaux sur L (resp. L') issus de $C_{LL'}$. Il existe donc au plus $\min(C_L - C_K, C_{L'} - C_{K'})$ facteurs non triviaux. Si $C_{L'} - C_{K'} < C_L - C_K$, il existe donc au moins $C_L - C_K - (C_{L'} - C_{K'})$ facteurs triviaux sur L et centrés sur chaque J_q ($q \in K$). A chacun de ces facteurs φ^L correspond pour B_{JJ} (resp. B^M_{JJ}) un facteur de support L (facteur de la forme $(\sqrt{2}\, a\varphi^L, 0^{L'})$) associé à la valeur propre $(1/C_Q)^2$ (resp. 0) ; d'où l'intérêt encore de raisonner sur B^M_{JJ}, puisque ces facteurs ne traduisant pas les liaisons entre L et L', ne présentent pas d'intérêt, et ne sont non triviaux pour B_{JJ} que parce qu'ils traduisent la structure diagonale des blocs diagonaux de ce tableau.

6.2.2 *Cas où le tableau $C_{LL'}$ est partitionné en blocs, et où toute variable ligne et toute variable colonne appartenant à des blocs d'indices différents sont indépendantes* :

On suppose ici que l'on a :

$$K = \cup \{K_\alpha \mid \alpha = 1,t\}$$
$$K' = \cup \{K'_\alpha \mid \alpha = 1,t\}$$

où les K_α (resp. K'_α) constituent une partition de K (resp. K'). On suppose de plus que pour tout q appartenant à K_α et tout q' appartenant à K'_β, avec $\alpha \neq \beta$, les variables q et q' sont indépendantes (i. e. la loi $p_{JqJq'}$ du couple est égale au produit $p_{Jq} \otimes p_{Jq'}$ des lois marginales). Alors l'analyse de la correspondance $C_{LL'}$ se réduit à celle de ses blocs diagonaux.

De façon précise, si l'on pose

$$L_\alpha = \cup \{J_q \mid q \in K_\alpha\}$$
$$L'_\alpha = \cup \{J_{q'} \mid q' \in K'_\alpha\},$$

à tout couple de facteurs de variance 1 $(\varphi^{L\alpha}, \varphi^{L'\alpha})$ issu du sous-tableau $C_{L\alpha L'\alpha}$ de $C_{LL'}$, et correspondant à la valeur propre λ, est associé un couple de facteurs de variance 1 $(\psi^L, \psi^{L'})$ issu de $C_{LL'}$, ψ^L (resp. $\psi^{L'}$) ayant pour support L_α (resp. L'_α). La restriction de ψ^L (resp. $\psi^{L'}$) à L_α (resp. L'_α) est égale à $(C_K/C_{K\alpha})\varphi^{L\alpha}$ (resp. $(C_{K'}/C_{K'\alpha})\varphi^{L'\alpha}$); la valeur propre associée à $(\psi^L, \psi^{L'})$ est égale à $\lambda\, C_{K\alpha}C_{K'\alpha}/(C_K C_{K'})$.

Il est facile de voir qu'à partir de tous les facteurs non triviaux des blocs $L_\alpha \times L'_\alpha$, on obtient bien tous les facteurs non triviaux issus du tableau $C_{LL'}$, et que les résultats donnés restent valables si $K = K'$, et $L = L'$.

Remarques : 1) Ce modèle a été rencontré par A. Bohy (Thèse de 3-ème cycle, Paris 6, 1979) dans l'étude de la réaction de 23 phages (ou virus) sur plusieurs milliers de souches de staphylocoques. L'ensemble des 23 phages (qui d'un point de vue statistique définissent des variables binaires : il y a réaction, ou il n'y en a pas) était divisé en trois lots. L'analyse du tableau de Burt associé a montré que l'on pouvait considérer ces trois lots comme indépendants, la comparaison entre facteurs issus de l'analyse globale et de l'analyse de chaque lot confirmant le modèle précédent jusqu'au sixième facteur.

2) On trouve dans le traité sur l'A. des D. (TII B n° 10 § 2.5) un cas modèle plus général étudié d'abord par B. Escofier : dans ce modèle les blocs extradiagonaux sont *proportionnels* aux produits des lois marginales ; la structure du tableau des coefficients de proportionnalité définissant des facteurs non-triviaux en plus de ceux issus des blocs diagonaux. On peut engendrer des modèles encore plus généraux, par composition hiérarchique de correspondances (cf. TII B n° 11 § 3).

6.2.3 <u>*Cas où toute variable q appartenant à K, et toute variable q' appartenant à K', (q ≠ q') sont indépendantes*</u> : Dans ce cas, si $K \cap K' = \emptyset$, le tableau $C_{LL'}$ ne comporte que des facteurs triviaux. Si $K \cap K' \neq \emptyset$, alors à toute variable $k \in K \cap K'$ est associée une valeur propre de multiplicité Card $J_k - 1$, valeur propre égale à $1/(C_K C_{K'})$; le sous-espace propre de facteurs associé est engendré (si on raisonne dans R^L) par les fonctions sur L de moyenne nulle et de support J_k. En particulier, si $K = K'$ et donc $L = L'$, le tableau $C_{LL'}$ est un tableau de Burt dont l'ensemble des $C_L - C_K$ facteurs non-triviaux engendrent un sous-espace propre associé à la valeur propre $1/(C_K)^2$; si l'on raisonne sur le tableau de Burt modifié, le sous-espace précédent devient un sous-espace relatif à la valeur propre nulle, et l'on obtient un espace de facteurs inverses de multiplicité $C_K - 1$, espace engendré par les fonctions de moyenne nulle et constantes sur chaque J_q ; cet espace qui est relatif à la valeur propre $1/(C_K - 1)^2$ n'est pas à considérer comme on l'a dit pour l'interprétation (cf. § 4.4).

6.3 <u>*Rappels et compléments sur un modèle de non-réponses*</u> : Nous reprenons ici le modèle de non-réponses traité dans [*NON REPONSES*] (cf. *Cahiers* Vol II n° 2, pp 161-172 et Pratique de l'Analyse des Données, Vol 2, VI n° 5, pp 335-353), en le généralisant au cas considéré au § 5 et dans ce § 6, d'un mélange de variables qualitatives et quantitatives. Rappelons que ce modèle revient à introduire pour chaque variable q une modalité de non-réponse q_0 ; en particulier, à toute variable quantitative x_q seront associées trois colonnes, la dernière étant associée à la non-réponse. Les relations entre le tableau de Burt initial B_{JJ} (sans non-réponses) et le tableau de Burt où sont prises en compte les modalités de non-réponses sont identiques à celles données dans l'article cité ci-dessus. Nous n'expliciterons pas ce modèle qui comprend deux cas particuliers importants en pratique :

- le cas où les non-réponses proviennent d'un groupe de sujets n'ayant répondu à aucune question.
- le cas où les non-réponses sont distribuées uniformément sur les individus et sur les variables :

Si l'on pose :

$I_q = J_q \cup \{q_0\}$

$K_0 = \cup \{q_0 | q \in K\}$; $K'_0 = \cup \{q_0 | q \in K'\}$

$M = \cup \{I_q | q \in K\} = L \cup K_0$

$M' = \cup \{I_q | q \in K'\} = L' \cup K'_0$

on est amené à analyser le tableau $D_{MM'}$ croisant M et M', et déduit de $C_{LL'}$ à partir du modèle considéré.

Avec ce modèle, si $K \cap K' = \emptyset$, ou si $K = K'$ (auquel cas $C_{LL'}$ et $D_{MM'}$ sont des tableaux de Burt), on obtient pour facteurs de $D_{MM'}$ d'une part les facteurs de $C_{LL'}$ prolongés par 0 sur K_0 (ou K'_0), et d'autre part des facteurs de structure où toutes les modalités de réponse à une question q sont confondues et s'opposent à la modalité de non-réponse à cette question. Parmi ces facteurs de structure, on obtient en particulier un facteur que nous noterons φ_{NR}, et qui ne prend que deux valeurs différentes sur M (resp. M'), ce facteur opposant l'ensemble L (resp. L') des modalités de réponse à l'ensemble K_0 (resp. K'_0) des modalités de non-réponses.

Si $K \cap K' = \emptyset$, φ_{NR} est le seul facteur de structure non trivial que l'on obtient ; ce facteur est trivial (i.e. associé à une valeur propre nulle) dans le cas où les non-réponses sont distribuées uniformément ; il est associé à la valeur propre 1 si les non-réponses proviennent d'une fraction d'individus n'ayant répondu à aucune question.

Si $K = K'$, on obtient outre φ_{NR}, C_K-1 facteurs de structure engendrant un espace propre E_{NR} de dimension C_K-1 ; dans le cas de non-réponses uniformes, tous ces facteurs engendrent un sous-espace propre de dimension C_K relatif à la valeur propre $(1/C_K)^2$; sous-espace qui est donc trivial pour le tableau de Burt modifié.

Dans le cas où les non-réponses proviennent d'une fraction ε d'individus n'ayant répondu à aucune question, E_{NR} est un sous-espace propre trivial, et φ_{NR} est relatif à la valeur propre 1 (comme dans le cas $K \cap K' = \emptyset$). Ceci est dû au fait que dans ce cas le tableau $D_{MM'}$ est partitionné en blocs ($D_{LL'} = (1-\varepsilon)C_{LL'}$; $D_{LK'0} = 0$; $D_{K0L'} = 0$; tandis que tous les éléments de $D_{K0K'0}$ sont égaux à $\varepsilon\, C_I/C_Q$), ce résultat étant valable quels que soient K et K'.

D'un point de vue pratique, on obtient souvent comme premier facteur, un facteur opposant modalités de réponses et modalités de non-réponses ; ce cas se produit en particulier quand un petit nombre d'individus ont répondu à peu de questions ; on se trouve alors dans un cas proche du cas modèle considéré ci-dessus.

6.4 Influence d'une subdivision trop fine d'une modalité d'une question en deux sous-modalités (cf. Pratique de l'Analyse des Données, Vol 2, § VI n° 4 ; et Cahiers Vol II n° 1 pp 73-77 ; 1977):

Soit z une modalité d'une variable qualitative q ; nous supposerons pour fixer les idées que q appartient à K'. Nous supposerons de plus que l'on subdivise z en deux sous-modalités z' et z", et que le choix entre ces deux sous-modalités n'est pas corrélé avec les réponses aux autres questions, une proportion α (resp. $1-\alpha$) des individus qui ont choisi la modalité z, adoptant la modalité z' (resp. z"). Nous supposerons également que pour toute variable quantitative x_q (non divisée en classes) les moyennes $\bar{x}_q^{z'}$ et $\bar{x}_q^{z''}$ de x_q pour les individus ayant adopté respectivement les modalités z' et z" sont égales.

Nous poserons $L'_0 = L' - \{z\}$, $L'_1 = L'_0 \cup \{z',z''\}$. Si q n'appartient pas à $K \cap K'$, et si $D_{LL'_1}$ désigne le tableau déduit de $C_{LL'}$ et associé au modèle précédent (tableau qui est tel que les sous-tableaux $D_{LL'_0}$ et $C_{LL'_0}$ sont identiques), l'analyse de $D_{LL'_1}$ est équivalente à celle de $C_{LL'}$ puisque les colonnes z' et z" de $D_{LL'_1}$ sont proportionnelles et de somme la colonne z de $C_{LL'}$.

Supposons maintenant que q appartienne à $K \cap K'$ (ce qui est en particulier réalisé si $K = K'$) et désignons par L_0 et L_1 les ensembles déduits de L comme L'_0 et L'_1 le sont de L'. Nous poserons encore $M_q = (J_q - \{z\}) \cup \{z',z''\}$ et appellerons $D_{L_1L'_1}$ le tableau issu de $C_{LL'}$ et construit à partir du modèle précédent (tableau qui est tel que $D_{L_0L'_0} = C_{L_0L'_0}$). Du fait du bloc diagonal $M_q \times M_q$, les lignes (resp. colonnes) z' et z" du tableau $D_{L_1L'_1}$ ne sont pas proportionnelles. Il en résulte que l'on a pour $D_{L_1L'_1}$ un facteur φ nul sur L_0 (ou L'_0) et qui oppose z' à z", facteur relatif à la valeur propre $1/(C_K C_K)$. Les autres facteurs de $D_{L_1L'_1}$ étant orthogonaux à φ prennent la même valeur pour z' et z". On peut donc les obtenir à partir du tableau déduit de $D_{L_1L'_1}$ en cumulant les lignes (resp. colonnes) z' et z" de $D_{L_1L'_1}$ (comme si ces lignes (resp. colonnes) étaient proportionnelles, ce qui n'est pas le cas), tableau qui est identique à $C_{LL'}$. Ainsi l'analyse de $D_{L_1L'_1}$ se ramène à l'analyse de $C_{LL'}$ à laquelle il faut ajouter le facteur opposant z' et z". D'un point de vue pratique ce facteur est sans intérêt et traduit simplement le fait que le choix entre z' et z" se fait aléatoirement, sans corrélation avec les autres variables. On voit donc qu'on n'a pas intérêt, à trop multiplier les modalités d'une même question, si on veut éviter des subdivisions de modalités triviales, bien qu'apportant une contribution non nulle à la trace du tableau analysé. Notons que si $K = K'$, et donc $L = L'$, le tableau $C_{LL'}$ est un tableau de Burt, et le facteur φ précédent est trivial si l'on considère le tableau de Burt modifié.

6.5 Etude d'un modèle ou la liaison entre une variable ligne et une variable colonne est indépendante du couple de variables considéré : On suppose ici comme au § 6.6 que l'on a un questionnaire usuel (où les variables quantitatives, s'il y en a, ont été découpées en classes). On suppose de plus que les questions q de K (resp.

q' de K') admettent des ensembles de modalités de réponse isomorphes à un même ensemble A (resp. A') :

$$\forall\, q \in K,\ \forall\, q' \in K' : J_q = A\ ;\ J_{q'} = A'$$

On a donc $L = A \times K$ et $L' = A' \times K'$.

On suppose enfin que :

$$\forall\, (q\,, q') \in K \times K' : q \neq q' \Rightarrow c_{J_q J_{q'}} = p_{AA'}$$

$c_{J_q J_{q'}}$ étant le tableau croisant les variables q et q', et $p_{AA'}$ un tableau donné sur $A \times A'$.

Si $K \cap K' = \emptyset$, le tableau $c_{LL'}$ est proportionnel au produit tensoriel $p_{AA'} \otimes q_{KK'}$, où $q_{KK'}$ est le tableau dont tous les éléments valent 1, tableau qui ne comporte que des facteurs triviaux. On en déduit que les facteurs non triviaux de $c_{LL'}$ sont de la forme$(\varphi^A \otimes \delta^K, \varphi^{A'} \otimes \delta^{K'})$, δ^K (resp. $\delta^{K'}$) désignant la fonction constante et égale à 1 sur K (resp. K'), $(\varphi^A, \varphi^{A'})$ étant un couple de facteurs non triviaux issu de $p_{AA'}$; si $(\varphi^A, \varphi^{A'})$ est un couple de facteurs associés, de variance 1 et relatif à la valeur propre λ , il en est de même de $(\varphi^A \otimes \delta^K, \varphi^{A'} \otimes \delta^{K'})$.

Si maintenant $K = K'$, il résulte des hypothèses faites que $A = A'$, $L = L' = A \times K$, et que la tableau p_{AA} est symétrique. L'analyse directe du tableau c_{LL} qui est un tableau de Burt est un peu moins évidente que précédemment, puisque ce tableau comporte deux types de blocs : les blocs diagonaux dont les termes non nuls sont portés par la diagonale et correspondent à la marge p_A de p_{AA} ,et les blocs non diagonaux qui correspondent à p_{AA}. Par contre, l'analyse du tableau de Burt modifié c^M_{LL} (où les blocs diagonaux ont été annulés, cf. § 4.4) qui fournit des résultats équivalents est immédiate : en effet, ce tableau est proportionnel au produit tensoriel $p_{AA} \otimes r_{KK}$, r_{KK} étant le tableau symétrique dont tous les éléments valent 1 sauf les éléments diagonaux qui sont nuls, tableau dont tous les facteurs non triviaux sont inverses , et engendrent un sous-espace de dimension c_K-1 relatif à la valeur propre $1/(c_K-1)^2$.

Soit $\{\varphi^K_\alpha | \alpha = 0, c_K - 1\}$ un système de fonctions sur K orthonormées (K étant muni de la loi uniforme) dont la première φ^K_0 est la fonction constante et égale à $1:\delta^K$. Ces fonctions sont facteurs du tableau r_{KK} (y compris le facteur trivial). Il résulte des considérations précédentes qu'à tout facteur φ^A de variance 1, de parité ε, issu de p_{AA} et relatif à la valeur propre μ correspondent c_K facteurs $\{\varphi^A \otimes \varphi^K_\alpha | \alpha = 0, c_K - 1\}$ pour c^M_{LL} (et donc pour c_{LL}), ces facteurs étant orthonormés : $\varphi^A \otimes \delta^K$ est de parité ε et est relatif à la valeur propre $\lambda^M = \mu$ pour c^M_{LL} (et donc d'après la formule (60) du § 4.4 : $\lambda = ((1 + \varepsilon\sqrt{\mu}(c_K - 1))/c_K)^2$ pour c_{LL}) tandis que les $\{\varphi^A \otimes \varphi^K_\alpha | \alpha = 1, c_K - 1\}$

forment un sous-espace propre de facteurs de parité $-\varepsilon$, sous-espace de dimension $C_K - 1$ et associé à la valeur propre $\lambda^M = \mu/(C_K - 1)^2$ pour C^M_{LL} (et donc $\lambda = ((1 - \varepsilon\sqrt{\mu})/C_K)^2$ pour C_{LL}). On obtient ainsi tous les facteurs de C^M_{LL} et de C_{LL}. Si tous les facteurs issus de p_{AA} sont directs, les seuls facteurs intéressants du tableau C_{LL} (facteurs associés à une valeur propre supérieure ou égale à $1/(C_K)^2$) sont de la forme $\varphi^A \otimes \delta^K$: si j_q désigne la modalité j de la variable q, pour une modalité j donnée, tous les $j_q (1 \leq q \leq C_K)$ sont confondus sur les axes factoriels. L'analyse d'une telle situation a été rencontrée par D. Maïti (cf. [Burt Guttman], *Cahiers*, Vol IV n° 3 pp 261-270) lors d'une étude de physique corpusculaire, le tableau de Burt étudié étant relatif à cinq variables physiques divisées chacune en dix classes ; toutes les variables étant très corrélées , les modalités s'ordonnaient sur une parabole dans le plan des axes 1-2, sur une cubique dans le plan des axes 1-3 etc., les cinq modalités associées à une même classe étant pratiquement confondues.

Une autre situation réelle approximativement conforme au modèle , objet du présent §, est celle des questionnaires où toutes les questions admettent un même ensemble de réponses tel que :

1 = absolument d'accord ; 2 = à peu près d'accord ;
3 = plutôt opposé ; 4 = tout à fait opposé ;
5 = ne sait pas, sans opinion.

Dans ce cas, ainsi que l'ont d'abord remarqué L. Lebart et N. Tabard, la tendance générale des sujets à affectionner certains types de réponses indépendamment du contenu de la question, produit des facteurs groupant les modalités de même nom (e.g. tous les 1 ensemble etc.). A ces facteurs se mêlent toutefois des facteurs liés au sens ! Pour un exemple de telle structure , cf. F. Pêtapermal et M. Rigaud [*OUI NON ABST.*] in Prat. de l'A. des D. en Linguistique, LC3 n° 1 ; un abrégé de cet exemple est donné dans [*SONDAGES*] *Cahiers* Vol V n° 4. Un autre exemple rencontré par S. Haddad doit paraître dans les *Cahiers*.

Remarques : 1) Si φ^A est un facteur de p_{AA} relatif à la valeur propre nulle, il lui correspond pour C_{LL} un sous-espace propre de facteurs de dimension C_K et relatif à la valeur propre $(1/C_K)^2$. On trouve encore une fois que cette valeur propre correspond à un effet trivial.

2) Le modèle précédent est encore valable si l'on n'a que des variables quantitatives non découpées en classes, et codées suivant la procédure du § 5. Dans ce cas le tableau p_{AA}, est un tableau symétrique 2×2. Si l'on raisonne sur des variables réduites, et si on se place dans le cas où $K \cap K' = \emptyset$, le modèle précédent revient à supposer que la corrélation entre toute variable q de K et toute variable q' de K' est indépendante du couple considéré. La seule valeur propre non triviale issue de p_{AA}, et donc de C_{LL}, est égale au carré de cette corrélation. La double représentation des variables sur le facteur associé se réduit à deux points opposant tous les x_q^+ $(q \in K \cup K')$ aux x_q^-. Cette analyse, relativement triviale, est moins intéressante que celle que l'on aurait effectuée en découpant les variables en classes, puisque dans ce dernier cas, on tient compte des liaisons non linéaires entre les variables.

3°) Dans le cas d'un mélange de variables qualitatives et quantitatives analysées suivant la procédure du § 5, le modèle précédent est encore valable mais ne présente aucun intérêt pratique.

6.6 Etude du tableau disjonctif complet où tout système de réponses est pris une fois et une seule, et de tableaux déduits à partir d'une partition de l'ensemble de tous ces systèmes : On considère le tableau disjonctif complet λ_{SJ} où $S = \Pi\{J_q | q \in Q\}$, $J = \cup\{J_q | q \in Q\}$ associé à un questionnaire où tout système possible de réponses a été pris une fois et une seule (tableau déjà considéré au § 4.2.4). Tous les facteurs non triviaux de λ_{SJ} engendrent un sous-espace propre de dimension $C_J - C_Q$, sous-espace associé à la valeur propre $1/C_Q$ et qui est constitué par les fonctions sur J de moyenne nulle sur chaque J_q.

Soit M une partition de S, et soit k_{MJ} le tableau obtenu en cumulant pour une classe m de M toutes les lignes s de λ_{SJ} appartenant à cette classe : $\forall\, m \in M : k(m,j) = \Sigma\{\lambda(s,j) | s \in m\}$

Alors la valeur propre d'ordre α issue de k_{MJ} est inférieure ou égale à la valeur propre de même rang issue de λ_{SJ}, (cf. partition et v. propre, *Cahiers* Vol IV n° 3 pp 289-297) ; il en résulte que toutes les valeurs propres issues de k_{MJ} sont inférieures ou égales à $1/C_Q$.

Supposons qu'il existe une question q dont l'ensemble des modalités J_q peut être partitionné en deux parties A et A' telles que dans le tableau k_{MJ} le bloc de colonnes A soit orthogonal au bloc de colonnes A' :

$$\forall\, j \in A,\ \forall\, j' \in A',\ \forall\, m \in M : k(m,j) \times k(m,j') = 0$$

Alors le tableau k_{MJ} possède un facteur sur J relatif à la valeur propre $1/C_Q$ et traduisant cette particularité : ce facteur a pour support J_q, et il est constant sur chacune des parties A et A'. L'analyse du tableau cumulatif du code génétique (cf. [*CORR. GEN.*], *Cahiers* Vol IV n° 2, pp 219-230) fournit l'exemple de tels facteurs.