

J. P. BENZÉCRI

## **La psychophysique : expériences et modèles de détection**

*Les cahiers de l'analyse des données*, tome 4, n° 4 (1979),  
p. 405-412

[http://www.numdam.org/item?id=CAD\\_1979\\_\\_4\\_4\\_405\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CAD_1979__4_4_405_0)

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA PSYCHOPHYSIQUE :  
EXPÉRIENCES ET MODÈLES DE DÉTECTION  
[DÉTECTION]

par J. P. Benzécri (1)

0 Théorie de la détection : Les travaux de Tanner et Swets ont été discutés au § 8 de l'article [SEUIL] : nous en donnerons ici une description précise pour les placer dans un même cadre général que les recherches de Norman et de Luce ; et concluons en suggérant quelques expériences nouvelles.

1 Protocole expérimental : (T & S p. 406). L'expérience comprend des séries d'essais. A chaque essai, l'expérimentateur peut éventuellement présenter un signal au sujet : ce signal est un disque, dont le diamètre angulaire est de 30 minutes, qui apparaît pendant un centième de seconde sur un fond de luminosité uniforme. Nous dirons que le stimulus  $s$  peut prendre deux valeurs : 1, (présence du signal), et 0, (absence). De même le sujet a deux réponses possibles :  $r = 1$  (le signal est présent),  $r = 0$  (absent). Les premières séries d'essais sont destinées à familiariser le sujet avec la situation expérimentale. On introduit ensuite après chaque essai un renforcement, qui est un gain d'argent  $g(s,r)$ . La fonction  $g(s,r)$  peut changer d'une série à l'autre : nous supposons seulement que  $g(s,r)$  est positif si  $r = s$  (réponse exacte) et négative autrement (le sujet perd de l'argent si sa réponse est inexacte). Quant à la probabilité  $p$  d'apparition du signal, (présentation du stimulus  $s = 1$ ), elle ne dépend pas des essais antérieurs, mais seulement de la série d'essais en cours.

2 Comportement du sujet : Le comportement du sujet est décrit par les quatre probabilités conditionnelles  $p(r/s)$  (probabilité que, le stimulus ayant été  $s$ , la réponse soit  $r$ ). Les  $p(r/s)$  satisfaisant aux relations :

$$p(1/1) + p(0/1) = 1$$

$$p(1/0) + p(0/0) = 1$$

il suffit pour décrire le comportement de donner le point  $(x^0, x^1)$  du carré de côté 1 :

$$x^0 = p(1/0) \in (0,1)$$

$$x^1 = p(1/1) \in (0,1)$$

Le gain moyen  $g$  (espérance mathématique du gain) du sujet à un essai est donné par la formule :

---

(1) Professeur de statistique . Université Pierre et Marie Curie.

$$\begin{aligned}
 g &= g(1,1) p(1/1) p \\
 &+ g(0,1) p(0/1) p \\
 &+ g(1,0) p(1/0) (1-p) \\
 &+ g(0,0) p(0/0) (1-p)
 \end{aligned}$$

soit en fonction de  $x^0$  et  $x^1$  :

$$y = -ax^0 + bx^1 + c,$$

$$\text{où } a = (g(0,0) - g(1,0)) (1-p) ;$$

$$b = (g(1,1) - g(0,1)) p ;$$

$$c = g(0,0) (1-p) + g(0,1) p ;$$

et  $a$  et  $b$  sont positifs d'après les hypothèses faites sur le signe de  $g(r,s)$  (positif si  $r = s$ , négatif sinon).

L'expérience montre que le sujet, qui désire que  $g$  soit aussi élevé que possible, fait varier d'une série à l'autre  $x^0$  et  $x^1$  en fonction des  $g(r,s)$  et de  $p$ . Pour décrire comment le sujet fait varier  $x^0$  et  $x^1$ , on imagine des modèles, qu'on confronte aux résultats expérimentaux.

3 Modèle avec détections fictives : Le sujet a une probabilité  $v$  de voir le signal quand il s'est produit ; le sujet a, de plus, une probabilité  $f$  d'annoncer un signal quoiqu'il n'ait rien vu : c'est une détection fictive (qu'il y ait ou non en fait un signal...). D'où les formules :

$$x^0 = p(1/0) = f$$

$$x^1 = p(1/1) = v + (1-v)f$$

Selon ce modèle,  $v$  est un paramètre sensoriel constant, caractéristique du couple (sujet-signal), et l'ensemble des stratégies possibles est un segment de droite (cf figure 1) paramétré par  $f$  ( $f \in (0, 1)$ ) dont les extrémités sont  $(1, 1)$  ( $f = 1$ ) et  $(0, v)$  ( $f = 0$ ). Le gain moyen  $g$  est maximum à l'une de ces deux extrémités : au sommet  $(1, 1)$  du carré si :

$$b(1-v) > a,$$

et sinon en  $(0, v)$ .

En considérant les points expérimentaux  $(x^0, x^1)$ , correspondant aux divers comportements d'un même joueur dans des conditions de gain différentes, on constate d'abord que ces points n'ont pas pour abscisse  $x^0 = 1$  ni  $x^0 = 0$ . Ceci n'est pas une objection majeure au modèle et peut signifier seulement que le sujet n'est pas capable de choisir le comportement le meilleur parmi ceux que lui permettraient ses facultés sensorielles : nous reviendrons sur ce choix au § 3. Mais de plus les divers points  $(x^0, x^1)$  ne sont pas alignés avec  $(1, 1)$  ; autrement dit les valeurs de  $v$  calculées d'après la formule (obtenue en éliminant  $f = x^0$ ) :

$$v = \frac{x^1 - x^0}{1 - x^0}$$

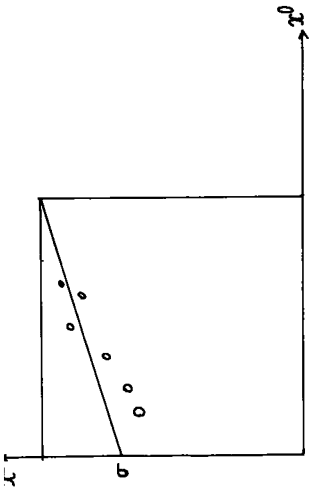


Figure 1. modèle avec détectum fictive. On a figuré des points  $(x^0, x^1)$  dominant l'allure des données expérimentales de Tanner et Swets.

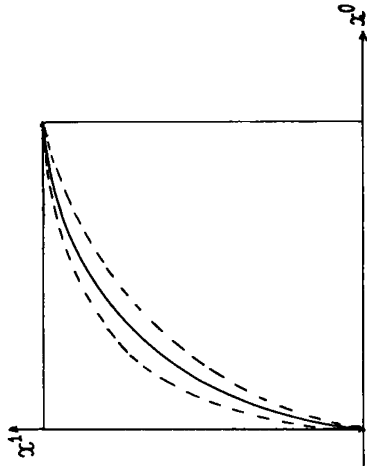


Figure 3. modèle avec seul de décision. On a figuré trois courbes, correspondant à diverses valeurs de  $t$  (rapport signal sur bruit).

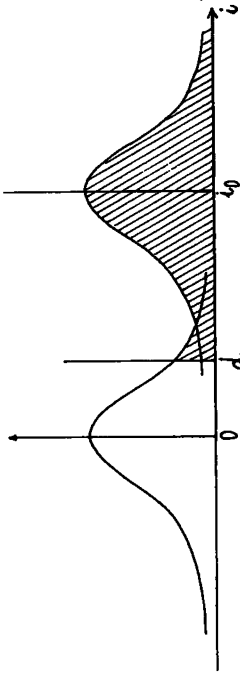


Figure 2. modèle avec seul de décision. On a figuré deux courbes en cloche, l'une représentant la distribution en l'absence de signal (moyenne 0), l'autre en présence de signal (moyenne  $x_0$ ). Les aires hachurées sous ces courbes au delà du seul  $d$  sont respectivement  $x^0$  et  $x^1$ .

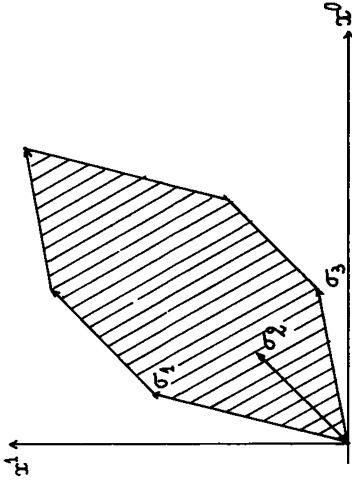


Figure 4. modèle général. Dans cet exemple,  $n = 3$ . On a figuré les vecteurs  $\sigma_i$  et le cône  $k$  est hachuré.

varient avec le taux  $f$  des détections fictives (selon T & S, p. 408,  $v$  décroît significativement en fonction de  $f$ ). C'est là une objection plus grave.

4 Modèle avec seuil de décision : L'impression sensible  $i$  éprouvée par le sujet, en l'absence de tout signal est un bruit de fond aléatoire  $b$  que l'on suppose normal centré d'écart-type unité ; en présence du signal l'impression  $i$  est la somme du bruit aléatoire  $b$  et d'une impression certaine  $i_0$ . Le sujet a un seuil de décision  $d$  ; il répond 1 si  $i > d$ , 0 si  $i < d$  ; d'où pour les probabilités conditionnelles (cf fig. 2) :

$$x^0 = p(1/0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_d^\infty e^{-x^2/2} dx$$

$$x^1 = p(1/1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d-i_0}^\infty e^{-x^2/2} dx$$

A l'ensemble des stratégies définies par un seuil de décision correspond dans le carré des  $(x^0, x^1)$  une courbe située au-dessus de la diagonale principale allant du point  $(0,0)$  ( $d = +\infty$ ) au point  $(1,1)$  ( $d = -\infty$ ). La concavité de cette courbe (cf fig. 3) est compatible avec les positions des points expérimentaux obtenus. De plus la stratégie optimale n'est pas ici une extrémité, mais c'est le point de la courbe où la tangente est une droite où  $g = cte$ , i.e. :

$$dx^0/dx^1 = b/a = e^{-d^2/2} / e^{-(d-i_0)^2/2}$$

Il est donc possible que les points expérimentaux  $(x^0, x^1)$  définissent des stratégies optimales ; ce qui est encore un avantage du modèle avec seuil de décision sur le modèle avec détections fictives.

5 Un modèle général : Dans le modèle avec détection fictive, on a supposé que l'impression sensible produite par le stimulus sur le sujet pouvait prendre l'une des deux valeurs "vu" et "non vu" ; dans le modèle avec seuil de détection, au contraire, l'impression sensible est une grandeur continue. On peut considérer plus généralement que le stimulus produit une impression sensible (est codé aléatoirement suivant une impression sensible)  $i$  qui appartient à un ensemble  $I$  quelconque (en fait, il convient de supposer que  $I$  est un espace probabilisable ; mais nous écrirons ici nos formules comme si  $I$  était un ensemble fini, et renverrons seulement au modèle à seuil de détection pour un exemple où  $I$  est la droite réelle). Une probabilité de transition  $\sigma_I^S$  (qui est l'expression mathématique du processus sensible) fait passer du stimulus  $s$  à l'impression  $i$  ; autrement dit, on a des probabilités conditionnelles (que le stimulus  $s$  produise l'impression  $i$ ) ..

$$\sigma_i^S = p(i/s)$$

si l'ensemble  $I$  a  $n$  éléments, les  $2n$  probabilités  $\sigma_1^S$  sont reliées par les deux équations (autant que de valeurs de  $s$ , 0 et 1) :

$$1 = \sum \{\sigma_i^0 \mid i \in I\} = \sum \{\sigma_i^1 \mid i \in I\}.$$

Une stratégie aléatoire de réponse très générale, (pour un modèle plus complexe cf § 6), nous semble être pour le sujet une transition  $\rho^I$

de l'ensemble I des impressions sensibles vers l'ensemble R (à deux éléments ici 0 et 1) des réponses. Autrement dit, on a les probabilités conditionnelles (qu'après l'impression i soit donnée la réponse r) :

$$\rho_r^i = p(r/i)$$

Les 2 n nombres  $\rho_r^i$  étant liés par les n relations :

$$\forall i \in I : \rho_1^i + \rho_0^i = 1$$

Ceci posé on peut calculer la matrice produit  $\tau_R^S$  :

$$\tau_R^S = \rho_R^I \circ \sigma_I^S ;$$

qui donne les probabilités conditionnelles qu'au stimulus s soit donnée la réponse r :

$$\tau_r^s = p(r/s) = \Sigma\{p(r/i) \cdot p(i/s) | i \in I\} ;$$

En particulier, on a pour  $x^0$  et  $x^1$  :

$$x^0 = \tau_1^0 = \Sigma\{\rho_1^i \sigma_i^0 | i \in I\} ;$$

$$x^1 = \tau_1^1 = \Sigma\{\rho_1^i \sigma_i^1 | i \in I\} ;$$

Géométriquement, on peut se représenter les vecteurs :

$$\vec{\sigma}_i = (\sigma_i^0, \sigma_i^1)$$

dans le plan des  $x^0, x^1$ . Ce sont n vecteurs, tous à coordonnées  $\geq 0$ , et la somme de ces vecteurs est  $(1, 1)$  ; la stratégie  $(x^0, x^1)$  est une combinaison linéaire de vecteurs  $\vec{\sigma}_i$  à coefficients  $\rho_i^1$ , assujettis à la seule condition d'être tous compris entre 0 et 1.

Le domaine du plan où peut se trouver  $(x^0, x^1)$  est un polygone convexe K de centre de symétrie le point  $(1/2, 1/2)$ , contenant la diagonale  $((0, 0) - (1, 1))$  du carré unité. Supposons que  $i = 1, 2, \dots, n$ , et que  $(\sigma_i^1 / \sigma_i^0)$  soit une fonction décroissante de i : le polygone K aura pour sommets les points correspondant à des stratégies pures de la forme  $\vec{x}(j)$  ( $j = 0 \dots n$ )

$$\rho_1^i = 1 \text{ si } i \leq j ; \quad \rho_1^i = 0 \text{ si } i > j ;$$

$$\vec{x}(j) = \Sigma\{\vec{\sigma}_i | i = 1, \dots, j\} ;$$

$$x^0(j) = \Sigma\{\sigma_i^0 | i = 1, \dots, j\} ;$$

$$x^1(j) = \Sigma\{\sigma_i^1 | i = 1, \dots, j\}$$

ou de la forme  $\vec{x}(j)$ , ( $j = 0 \dots n$ ) :

$$\rho_1^i = 1 \text{ si } i \geq j ; \quad \rho_1^i = 0 \text{ si } i < j ;$$

$$\vec{x}(j) = \Sigma\{\vec{\sigma}_i | i = j, \dots, n\}.$$

Sur la figure 4, on a représenté un cas où  $n = 3$ .

La stratégie optimale, correspond au sommet du convexe K où est maximum  $(-ax^0 + bx^1)$  : c'est un sommet de la forme  $\vec{x}(j)$ , situé au-dessus de la diagonale (ou sur elle en  $(0, 0)$  si  $j = 0$ , en  $(1, 1)$  si  $j = n$ ).

Le cas particulier du modèle de détection fictive correspond à  $n = 2$  ; si on note  $l$  l'impression sensible produite par un signal vu, et  $2$  l'absence d'impression, on a :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_1 &= (0, v) \\ \vec{\sigma}_2 &= (1, 1 - v)\end{aligned}$$

Le convexe K est alors un parallélogramme.

Dans le modèle à seuil de détection, on a supposé I infini continu : il est facile par passage à la limite de voir que le convexe K est la région du carré comprise entre la courbe construite (cf fig. 3) pour lieu de  $(x^0, x^1)$  et la symétrique de cette courbe par rapport à la diagonale. Dans le modèle on ne considèrerait que les stratégies correspondant à l'arc de frontière de K situé au-dessus de la diagonale, les seules qui puissent être optimales. Tanner et Swets, qui ne développent pas comme nous le modèle général de l'impression sensible, paraissent avoir reconnu le convexe K car ils écrivent (p. 404) "*The curve represents the best that can be done with the information available ; and the mirror image is the curve of worst possible behaviors*". (Notre courbe représente les meilleures stratégies possibles, compte-tenu de l'information sensorielle disponible, et sa symétrique est la courbe du pire...).

Dans les modèles de Norman, (cf [SEUIL] § 8), I est supposé infini et dénombrable (l'impression sensible est mesurée par un nombre entier de seuils quantiques). Voici l'idée des modèles d'apprentissage de la détection. Le sujet n'est pas capable de résoudre directement un problème d'optimum, mais seulement d'orienter (inconsciemment) son comportement vers le mieux. A un instant donné le sujet a une stratégie de réponse,  $\rho_R^I$ , stratégie qui définit une transition  $\tau_R^S$ , ( $\tau_R^S = \rho_R^I \circ \sigma_I^S$ ), du stimulus vers la réponse, ( $\tau_R^S$  pouvant être représenté par un point  $(x^0, x^1)$  du convexe K). Après chaque renforcement, (gain ou perte) le sujet peut modifier sa stratégie  $\rho_R^I$  et par conséquent, par le fait même la transition  $\tau_R^S$ . Il est vraisemblable de supposer que si, à un essai, le stimulus  $s$  a été codé suivant  $i$  (impression sensible), le sujet, averti par son gain de la vraie valeur de  $s$ , augmentera (resp. diminuera)  $\rho_1^i$  si  $s = 1$  (resp. si  $s = 0$ ) : en effet le sujet tend à ce moment à penser que  $i$  est fortement lié à  $s$  ( $i$  code, en général  $s$ ) et donc à donner à  $i$  la réponse qui convient à  $s$ . C'est ce qu'on peut faire par les formules suivantes qui donnent la variation  $\Delta\rho_1^i$  de  $\rho_1^i$  après un essai  $(s, i)$  :

$$\begin{aligned}\Delta\rho_1^i &= \theta(1 - \rho_1^i) & \text{si } s = 1 \\ \Delta\rho_1^i &= -\theta'\rho_1^i & \text{si } s = 0\end{aligned}$$

Dans ces formules  $\theta$  et  $\theta'$  sont des constantes, comprises entre 0 et 1, qui caractérisent le renforcement du sujet (le terme renforcement est employé ici non pour désigner l'intervention de l'expérimentateur qui rétribue ou punit, mais la modification de comportement réalisée par le sujet d'après cette intervention). Si  $\theta$  et  $\theta'$  sont nuls, les  $\Delta\rho$  sont nuls aussi le renforcement est d'autant plus fort que  $\theta$  et  $\theta'$

sont plus voisins de 1. Evidemment on peut imaginer bien d'autres modèles et comme nous l'avons dit plus haut ([SEUIL] § 8) les résultats expérimentaux ne suffisent pas, en général, à choisir telle ou telle formule de renforcement. Mais les formules présentées ici sont sans doute les plus simples possibles (compte-tenu du fait que  $\rho_1^i$  ne doit pas sortir de l'intervalle  $(0,1)$ ). Suivant ces formules, au cours d'une longue série d'essais, la stratégie  $\rho_R^I$  tend d'abord vers une valeur moyenne (dont, en général, l'efficacité n'est pas optimale, mais est supérieure à celle d'un comportement tout arbitraire) puis elle fluctue autour de cette valeur au gré des renforcements. Nous n'étudierons pas dans cette leçon le détail de ce processus, notre but étant seulement, de signaler un exemple d'apprentissage.

Notons pour conclure que les considérations développées ici se généraliseraient au cas où S et R ne sont pas des ensembles à 2 éléments ; mais, alors, il n'y a pas de représentation géométrique aussi simple.

On doit alors traiter sans restriction de dimensions le problème suivant :

Soit R, S, I trois ensembles et  $\sigma_I^S$  une transition donnée de S vers I ; notons  $P_R^I$ , l'ensemble des probabilités de transition de I vers R. Considérons l'ensemble  $S_R^S$  défini par :

$$S_R^S = \{ \tau_R^S \mid \exists \rho_R^I \in P_R^I : \tau_R^S = \rho_R^I \circ \sigma_I^S \} \subset P_R^S ;$$

$S_R^S$  est un convexe (parce que  $P_R^I$  est un convexe et que la composition avec  $\sigma_I^S$  est une transformation linéaire qui à une matrice  $\rho_R^I$  fait correspondre une matrice  $\tau_R^S$ ). Il est intéressant de rechercher les points extrémaux du convexe  $S_R^S$ , notamment ceux où atteint ses valeurs extrêmes une forme linéaire,

$$\sum \{ g_s^r \sigma_r^s p_s \mid s \in S ; r \in R \}.$$

qui représente l'espérance mathématique du gain du sujet si  $p_s$  est la probabilité que le signal présenté soit s, et  $g_s^r$  le gain si au signal s on fait la réponse r.

Dans l'étude de la vision chromatique, on rencontre un problème analogue pour décrire l'ensemble des impressions sensibles que produisent les stimuli obtenus par filtrage (ou diffusion) d'un rayonnement blanc de brillance énergétique spectrale donnée. Nous nous réservons donc de consacrer un article aux convexes définis comme l'ensemble  $S_R^S$  considéré ci-dessus.

6 Un modèle de réglage sensoriel : Dans ce § nous voulons suggérer un complément au modèle général présenté au § 5. Nous partirons d'une analogie qui, si elle ne peut être suivie jusque dans les détails n'en est pas moins sous-jacente à toutes les applications psychologiques de la théorie de la détection.

Un exemple typique de problème de détection est celui du veilleur qui doit décider de donner ou non l'alarme, d'après ce qu'il voit sur l'écran d'un radar. Selon la théorie psychologique de la détection, tout observateur qui guette un signal est semblable au système complexe formé d'un veilleur et d'un radar. A l'appareil radar correspond l'appareil



sensoriel ; au veilleur la conscience ; entre les deux est un écran sensoriel qu'on peut identifier anatomiquement avec les aires primaires de projection corticale... Certes, la conscience ne connaît pas directement cet écran ; mais elle dispose indirectement des informations qui y sont projetées.

AU § 5, nous avons écrit la transition  $\tau_R^S$ , qui fait passer du stimulus à la réponse, comme le produit de deux matrices :  $\sigma_I^S$  qui est constante et ne dépend que de l'appareil périphérique ; et  $\rho_R^I$ , que le sujet élabore selon ses intérêts. Mais dans l'analogie du veilleur et du radar, l'homme ne se borne pas à choisir une stratégie pour utiliser les informations visuelles qui lui viennent de l'écran, il peut aussi régler son appareil en manipulant des boutons. Ceci suggère le modèle suivant :

Soit B l'ensemble continu ou discontinu des différents réglages possibles de l'appareil sensoriel. L'impression sensible i résulte du couple (s,b) du stimulus présenté,  $s \in S$  et de l'état du réglage  $b \in B$ . L'appareil doit donc être décrit par la matrice  $\sigma_I^{S \times B}$  :

$$\sigma_I^{S \times B} = \{\sigma_i^{s,b}\} = \{p(i/s,b)\}$$

des probabilités conditionnelles (qu'avec le réglage b le stimulus s produise l'impression i). A un instant donné, la stratégie du sujet est un couple  $(\rho_R^I, b)$  d'une transition et d'un état de réglage.

Pour décrire l'évolution du comportement, il faut compléter le modèle de Norman en y ajoutant une règle de recherche du réglage optimum.

Sans plus préciser ce que seraient de tels modèles (certes complexes!) terminons en suggérant qu'on entreprenne des expériences de détection des signaux e.g. acoustiques où le sujet pourrait choisir entre plusieurs réglages (e.g. divers filtres) afin que les signaux se distinguent au mieux du bruit. Ainsi l'ensemble B serait matérialisé à l'extérieur du sujet. Pour qu'il soit intéressant d'étudier le processus de réglage (la variation de b) il faudrait que les divers signaux ne soient pas tous favorisés par le même réglage : le réglage optimum serait alors fonction de la règle de présentation des stimuli (et aussi de la matrice du gain).